Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

9. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 13.6.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen.

Hausaufgabe 9.1 (4 Punkte)

Es seien X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine *lokal beschränkte* Funktion, das heißt, zu jedem Punkt $p \in X$ gebe es eine Umgebung U von p, so daß die Einschränkung $f|_U$ von f auf U beschränkt ist. Zeigen Sie, daß dann f auf ganz X beschränkt ist.

Hausaufgabe 9.2 (4 Punkte)

Es sei $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine absteigende Folge von nichtleeren, kompakten Teilmengen eines metrischen Raums. Zeigen Sie, daß dann auch

$$A := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

nichtleer und kompakt ist.

Hausaufgabe 9.3 (4 Punkte)

Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß jede Folge $(x_i)_i$ mit $x_i \in A$ eine Teilfolge $(x_{i_k})_k$ besitzt, die gegen ein $a \in A$ konvergiert. Zeigen Sie, daß in diesem Fall die Menge A kompakt sein muß.

Hausaufgabe 9.4 (4 Punkte)

Es seien $K \subset \mathbb{R}^n$ und $L \subset \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, daß $K \times L \subset \mathbb{R}^{n+m}$ genau dann kompakt ist, wenn K und L kompakt sind.