Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

12. Aufgabenblatt zur Vertiefung Mathematik II für NWI

Abgabe bis 9.7.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe.

Hausaufgabe 12.1 (4 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß P eine stochastische Matrix ist.

(b) Es seien der Zustandsraum $\{\text{rot}, \text{gelb}, \text{grün}\}$ und die Startverteilung ν mit $\nu(\text{rot}) = 0.7$, $\nu(\text{gelb}) = 0.2$ und $\nu(\text{grün}) = 0.1$ gegeben. Betrachten Sie die zugehörige Markovkette, und bestimmen Sie die Verteilung von X_2. Ist ν eine Gleichgewichtsverteilung dieser Markovkette?

Hausaufgabe 12.2 (4 Punkte)
Ein Käfer versucht, eine Treppe von vier Stufen zu erklimmen. Dabei erreicht er, auf der i-ten Stufe stehend ($i = 0, 1, 2, 3$, die 0-te Stufe sei der Boden vor der Treppe), mit Wahrscheinlichkeit $p_i \in (0, 1)$ die nächste Stufe, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ fällt er jedoch die ganze Treppe hinunter. Wenn der Käfer die 4-te Stufe erreicht hat, so verbleibt er dort.

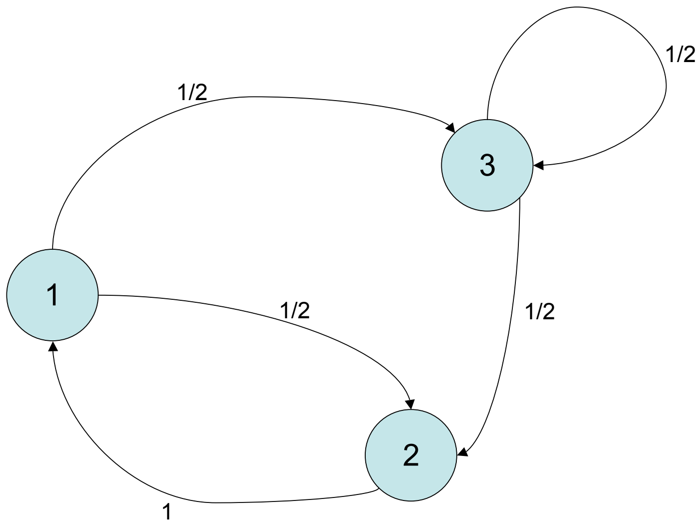
(a) Veranschaulichen Sie das Problem durch ein geeignetes Diagramm. Liegt eine Markovkette vor? Falls ja, geben Sie die zugehörige stochastische Matrix an, sowie Zustandsraum und Startverteilung.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Käfer nach genau 7 Schritten die Treppe erstmalig erklommen hat, das heißt, erstmalig die vierte Stufe erreicht hat?

(c) Gibt es eine Gleichgewichtsverteilung? Falls ja, bestimmen Sie eine solche. Ist diese eindeutig bestimmt?

Hausaufgabe 12.3 (4 Punkte)
Eine Urne enthalte $M \geq 2$ Kugeln, die numeriert sind. Es wird fortlaufen mit Zurücklegen eine Kugel gezogen. Es sei X_n die Anzahl der verschieden numerierten Kugeln, die in den ersten n Ziehungen auftreten. Ist $(X_n)_n$ eine Markovkette? Falls ja, bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten.

Hausaufgabe 12.4 (4 Punkte)
Die Markovkette $(X_n)_n$ sei gegeben durch den Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$, die Startverteilung $\nu(1) = \nu(2) = 0.5$, $\nu(3) = 0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß folgender Skizze:



(a) Bestimmen Sie die zugehörige stochastische Matrix.

(b) Ist die Markovkette irreduzibel? Bestimmen Sie die Periode.

(c) Bestimmen Sie sowohl die Verteilung von X_2 als auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 = 3, X_2 = 2\}$.

(d) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung π.

(e) Verifizieren Sie durch direkte Rechnung, daß für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x, y) = \pi(y) \qquad \forall x, y \in S$$

gilt.