

7. Aufgabenblatt zur Vertiefung Mathematik II für NWI

Abgabe bis 4.6.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe.

Hausaufgabe 7.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Verfahren für einen Bluttest. Die zu testenden $n \cdot k$ Personen werden in Gruppen zu je k Personen eingeteilt. Die Blutproben jeder einzelnen Gruppe werden zunächst gemischt, so daß nur ein Test pro Gruppe erfolgt. Ist das Resultat negativ, so genügt dieser eine Test pro Gruppe. Ist das Resultat positiv, so werden die Personen der betroffenen Gruppe einzeln getestet, also weitere k Tests durchgeführt.

Wir nehmen an, daß der Test für eine Einzelperson mit Wahrscheinlichkeit p positiv ausfällt und daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine ganze Gruppe negativ getestet wird, $(1 - p)^k$ ist.

- Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der insgesamt durchzuführenden Tests.
- Verwenden Sie die Abschätzung $(1 - p)^k \geq 1 - kp$, um die ideale Gruppengröße k zu bestimmen.

Hausaufgabe 7.2 (4 Punkte)

Wir ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit r unterscheidbaren Kugeln, bis wir jede Kugel mindestens einmal gezogen haben. Es sei X die Anzahl der benötigten Versuche.

Sei $T_i \in \mathbb{N}$ der Zeitpunkt, zu dem wir die i -te neue Kugel ziehen, mit $T_1 = 1$ und $T_r = X$.

- Bestimmen Sie die Verteilung von $T_{i+1} - T_i$.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert von $T_{i+1} - T_i$.
- Zeigen Sie schließlich

$$\mathbb{E}(X) = 1 + r \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r-1} \right).$$

Hausaufgabe 7.3 (4 Punkte)

Alle n Teilnehmer eines Workshops sollten schriftlich von einer Programmänderung informiert werden. In der Eile wurden die Briefe rasch in die bereits adressierten Umschläge verteilt und abgesandt. Dabei wurde übersehen, daß jeder der Briefe den Empfängernamen in der Anrede trägt. Bestimmen Sie (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) die erwartete Anzahl von Briefen, die korrekt zugeordnet wurden.

Lösen Sie diese Aufgabe, ohne die Lösung von Aufgabe 7.4 zu verwenden.

Hausaufgabe 7.4 (4 Punkte) *(Fortsetzung der Aufgabe 7.3)*

Bestimmen Sie im Kontext der Aufgabe 7.3 die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt ist. Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für große n ?

Hinweis

Es handelt sich hierbei um das so genannte Rencontre-Problem. Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses. Überlegen Sie sich zunächst das Resultat für $n = 3, 4, \dots$, und beachten Sie, daß Sie gegebenenfalls beim Abzählen Fälle mehrfach "erwischen" und dies dann wieder korrigieren müssen. Denken Sie an das Ein- und Auschlußprinzip!