Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

Probeklausur zur Vertiefung Mathematik II für NWI

Besprechung in der Vorlesung vom 16.7.2008

Aufgabe 1

Es seien zwei reellwertige Zufallsgrößen X, Y gegeben, deren gemeinsame Verteilung eine Dichte der Form

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

habe.

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, daß f eine Dichte auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Randdichten $x \mapsto f_X(x)$ von X und $y \mapsto f_Y(y)$ von Y.

(c) Sind die Zufallsgrößen X und Y unabhängig?

(d) Bestimmen Sie $P(X < Y)$.

(e) Berechnen Sie $P(X < Y/3)$.

Sollten Sie (a) nicht gelöst haben, so können Sie in den folgenden Aufgabenteilen mit dem unbekannten Parameter c rechnen.

Aufgabe 2

In einer Fabrik werden Glühbirnen hergestellt. Die Maschinen A, B und C stellen jeweils 30%, 30% bzw. 40% der Tagesproduktion her. Der Ausschußanteil der einzelnen Maschinen beträgt 4% für Maschine A, 2% für Maschine B und 5% für Maschine C. Die Glühbirnen werden gut gemischt verkauft.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine verkaufte Glühbirne defekt ist?
2. Angenommen, eine defekte Glühbirne wird verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie von Maschine C?
3. Es wird eine funktionierende Glühbirne verkauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie von Maschine C?

Aufgabe 3
Die Studentin Anna fährt jeden Tag mit dem Bus zur Universität. Wir wollen annehmen, daß die Zeit X, die Anna an der Haltestelle warten muß, exponentialverteilt ist mit Erwartungswert 10 Minuten.

1. Bestimmen Sie den Parameter dieser Exponentialverteilung und die Varianz von X. (Sie dürfen dabei die allgemein gültigen, aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke für Erwartungswert und Varianz der Exponentialverteilung verwenden.)

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Anna länger als 20 Minuten warten muß?

3. Wenn Anna schon mindestens 20 Minuten gewartet hat, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie weitere 20 Minuten warten muß?

4. Die Fahrzeit des Busses sei ebenfalls exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Minuten. Die Fahrzeit sei unabhängig von der Zeit, die Anna bereits an der Haltestelle gewartet hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß Anna insgesamt nicht länger als 30 Minuten benötigt von ihrem Eintreffen an der Haltestelle bis zur Ankunft an der Universität.

5. Ist die Summe zweier unabhängiger exponentialverteilter Zufallsgrößen wieder exponentialverteilt? (Beachten Sie das Ergebnis aus Teil 4.)

Aufgabe 4
Bei der Muschelzucht gibt erfahrungsgemäß nur jede 50. Muschel eine Perle.

1. Betrachten Sie das Zufallsexperiment, das gegeben ist durch das Überprüfen von N Muscheln auf Perlen. Welche Verteilung hat die Anzahl S_N der gefundenen Perlen? Was für Annahmen machen Sie?

2. Wie groß ist die erwartete Anzahl von Perlen, wenn 100 Muscheln geöffnet werden? Bestimmen Sie auch die Varianz dieser Zufallsgröße. (Sie dürfen die allgemein gültigen, aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke verwenden.)

3. Wie groß ist die exakte Wahrscheinlichkeit, unter 100 Muscheln keine Perle zu finden?

4. Wie viele Muscheln müssen geöffnet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% mindestens eine Perle zu finden?

5. Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Approximation die Wahrscheinlichkeit, mindestens drei Perlen unter 100 Muscheln zu finden. Begründen Sie Ihre Wahl der Approximation.