

- terminale Sigma-Algebra, Kolmogoroffsches 0-1-Gesetz
- Borel-Cantelli-Lemma

Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie I

Inhalt

1. Einleitung

- Inhaltsproblem
- Maßproblem (Banach-Tarski)

2. Mengensysteme

- Stabilität bzgl. diverser Mengenoperationen
- Erzeugtes Mengensystem
- Algebra, Sigma-Algebra, Ring, Dynkin-System, monotone Klasse und deren Beziehungen
- "Prinzip der guten Mengen"
- Wann stimmen erzeugte Sigma-Algebra und erzeugtes Dynkin-System überein? (Und ähnliche Zusammenhänge)

3. Inhalte und Maße

- Inhalt, stetiger Inhalt/Prämaß, Maß und Rechenregeln
- Stetigkeit von Inhalten (stetig von oben, von unten, stetig in der leeren Menge) und Beziehungen
- "Stetigkeit durch kompakte Approximation"
- Fortsetzung stetiger Inhalte, äußeres Maß, Satz von Carathéodory, Carathéodory-Erweiterung
- meßbarer Raum, Wahrscheinlichkeitsraum, Vollständigkeit
- Lebesgue-Maß

4. Stochastische Unabhängigkeit und 0-1-Gesetze

- Ereignis, Wahrscheinlichkeit, unmögliches Ereignis, sicheres Ereignis, fast-sicheres Ereignis
- elementare bedingte Wahrscheinlichkeit
- Unabhängigkeit von Ereignissen, Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, Bayes-Formel

5. Meßbare Abbildungen und Zufallsgrößen

- Meßbarkeit von Funktionen und numerischen Funktionen, Zufallsgrößen, einfache Funktionen, Borel-Meßbarkeit
- Kriterien für Meßbarkeit, Koordinatenabbildungen
- Approximation durch einfache Funktionen
- Faktorisierungslemma
- Bildmaß
- Verteilung von Zufallsgrößen, Beispiele von Verteilungen
- Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

6. Das Integral

- Integral für nichtnegative, einfache Funktionen
- Integral für numerische, nichtnegative Funktionen, Satz von der monotonen Konvergenz
- Integral für numerische Funktionen
- Kriterien für Integrierbarkeit
- Fast-sichere Eigenschaften

7. Konvergenzbegriffe und -sätze

- Satz von der monotonen Konvergenz
- Lemma von Fatou
- Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz von Lebesgue)
- fast sichere Konvergenz, stochastische Konvergenz, Konvergenz in L_1
- Beziehungen zwischen den Konvergenzbegriffen
- gleichmäßige Integrierbarkeit
- Vergleich Riemann- und Lebesgue-Integral
- Parameterabhängige Integrale, Differenzieren unter dem Integralzeichen

8. Funktionenräume

- Erwartungswert und Varianz
- L_p -Norm und -Räume
- Höldersche Ungleichung, Minkowskische Ungleichung
- Satz von Fischer-Riesz

9. Endliche Produktmaße

- Koordinatenabbildungen/Projektion, Produktabbildung
- Produkt-Sigma-Algebra
- Schnitte von Mengen und Funktionen
- Übergangskerne, Übergangswahrscheinlichkeiten
- Existenz und Eindeutigkeit des Produkts von endlichem Maß und Übergangswahrscheinlichkeit
- Produktmaße
- Satz von Fubini
- Transformationssatz
- gemeinsame Verteilung von Zufallsgrößen, Unabhängigkeit und Produktdarstellung der gemeinsamen Verteilung
- Erwartungswert vom Produkt unabhängiger Zufallsgrößen, Gleichung von Bienaymé
- Borel-Cantelli-Lemma für paarweise unabhängige Zufallsgrößen

10. Unendliche Produktmaße

- Zylindermengen, Darstellung meßbarer Mengen durch Zylindermengen
- Verträglichkeitsbedingung/konsistente Familien von Wahrscheinlichkeitsräumen
- kompakte Approximierbarkeit
- Satz von Kolmogoroff über die Existenz unendlicher Produktmaße
- Satz von Ionescu-Tulcea
- Kriterium für Unabhängigkeit einer unendlichen Familie von Zufallsgrößen via Produktmaße

11. Gesetze der großen Zahlen

- schwaches Gesetz der großen Zahlen
- Satz von Ottaviani-Skorokhod
- Satz von Lévy über die Äquivalenz der stochastischen und der fast sicheren Konvergenz von Summen unabhängiger Zufallsgrößen
- Kolmogoroffsches starkes Gesetz der großen Zahlen (für L_2 -Zufallsgrößen)

12. Bedingte Erwartungen

- bedingte Wahrscheinlichkeit einer Menge
- Satz von Radon-Nikodym (ohne Beweis)
- reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten
- bedingte Erwartungswerte, inkl. Rechenregeln und Konvergenzsätze
- Jensensche Ungleichung
- bedingter Erwartungswert als Projektion