Spieß

(Probe-)Klausur zur Vorlesung Analysis 1

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Alle Antworten und Rechenschritte sind zu begründen.
Die 5 besten Lösungen werden gewertet.

Wintersemester 2012/13 — Fr, 01.02.13

Aufgabe 1. (1 + 3 + 4 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass.

(b) Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig Funktion. Zeigen Sie, dass f ein Maximum besitzt, d.h. es gibt ein $\xi \in [a, b]$ so dass $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in [a, b]$.

(c) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $\xi \in (a, b)$ wie in (b) ein Maximum von f. Beweisen Sie $f'(\xi) = 0$.

Aufgabe 2. (4+ 4 Punkte)

(a) Überprüfe die Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2}.$$

(b) Überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{n^4 - 10n - 7}.$$

Aufgabe 3. (2 + 2 + 2 +2 Punkte)

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Berechne die Ableitung von $f(x) = \frac{e^{-ax^2}}{1+bx}$.

(b) Berechne die Ableitung von $g(x) = x^{\cos x}$.

(c) Finden Sie eine Stammfunktion von $h(x) = x \sin(x)$.

(d) Berechne das Integral $\int_1^e \log(x)\, dx$.

Aufgabe 4. (1 + 3 + 4 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in [0,1/2]$ gibt mit $f(x+1/2) = f(x)$ (Hinweis: Betrachte die Funktion $g(x) := f(x+1/2) - f(x)$).

(c) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f_a : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\sin 2x}{\cos x} & \text{falls } x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 5. (2 + 6 Punkte)

(a) Formuliere den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

(b) Für $x \in (0,+\infty)$ setze $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Zeigen Sie, ohne Benutzung des Logarithmus:

(i) $L(x)$ ist streng monoton wachsend, stetig und hat die Ableitung $L'(x) = \frac{1}{x}$;

(ii) $L(xy) = L(x) + L(y)$ für alle $x, y \in (0,1)$;

(iii) $L(\exp(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. (4 + 2 + 2 Punkte)

(i) Es sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass f ebenfalls stetig ist.

(ii) Zeige, dass die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(iii) Zeige, dass die Folge $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{n} f_n(x)$ gleichmäßig konvergiert und bestimme den Grenzwert.