Blatt 10 - Abgabe bis 20.12.2024

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

71. Beweisen Sie die folgende Identität für alle komplexe Zahlen $z \neq w$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}.$$

72. Fixieren wir eine natürliche Zahl $q > 1$. Als *q-adische Ziffern* gelten alle ganze Zahlen von 0 bis $q-1$. Für jede endliche Folge $\{z_k\}_{k=1}^n$ von q-adischen Ziffern definieren wir die q-adische *Kommazahl*

$$0, z_1 z_2 ... z_n := \sum_{k=1}^n z_k q^{-k}.$$

(Z.B. wenn q gleich zehn ist, so bekommen wir die üblichen dezimalen Kommazahlen).

Sei $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ eine unendliche Folge von q-adischen Ziffern. Man definiert die *unendliche q-adische Kommazahl* $0, z_1 z_2......$ mit

$$0, z_1 z_2 ...... := \lim_{n\to\infty} 0, z_1 z_2 ... z_n. \tag{23}$$

(a) Beweisen Sie, dass der Grenzwert in (23) existiert und im Intervall $[0,1]$ liegt.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0, z_1 z_2 ... z_n \leq \ 0, z_1 z_2 ...... \ \leq \ 0, z_1 z_2 ... z_n + q^{-n}.$$

Hinweis. Verwenden Sie die folgede Formel aus der Aufgabe 31b:

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad (a \neq 1). \tag{24}$$

73. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < x < 1/n$ gilt

$$(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$$

Hinweis. Benutzen Sie die Identität $1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$ und die Bernoullische Ungleichung.

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

74. Fixieren wir eine reelle Zahl $q > 1$ und eine natürliche Zahl m.

(a) Beweisen Sie, dass für alle natürliche $n \geq 2m+2$ gilt $q^n \geq cn^{m+1}$, wobei c eine von q und m abhängige positive Konstante ist.

Hinweis. Setzen Sie $q = 1 + a$ mit $a > 0$ und benutzen Sie den binomischen Lehrsatz.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{q^n} = 0.$$

75. * Der Zweck dieser Aufgabe ist den Wert des folgenden unendlichen *Kettenbruches* zu bestimmen:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{25}$$

Dafür definieren wir eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per Induktion wie folgt:

$$x_1 = 1 \text{ und } \; x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

insbesondere

$$x_2 = \frac{1}{1+1}, \quad x_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad x_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \quad x_5 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}, \quad \text{usw.}$$

Der Wert von (25) wird als $\lim x_n$ definiert, vorausgesetzt dass der Grenzwert existiert.

(a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n+1} - x_{m+1}| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_m|.$$

(c) Beweisen dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt

$$|x_n - x_m| \leq 2^{-m}.$$

Dafür verwenden Sie Induktion nach m.

Beschließen Sie daraus, dass $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert.

(d) Bestimmen Sie $x = \lim x_n$, was der Wert des Kettenbruches (25) ist.