Blatt 11 - Abgabe bis 10.01.2025

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert
Die mit ** markierten Aufgaben sind auch zusätzlich, aber werden nicht korrigiert.

76. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Sei $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Menge von Häufungspunkten der Folge $\{x_n\}$. Die folgende Aussage wurde in Vorlesung bewiesen: ist $a \in H$ so enthält jede Umgebung $U(a)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$.

    (a) Beweisen Sie die Umkehrung der o.g. Aussage: wenn jede Umgebung $U(a)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält, dann gilt $a \in H$.

    Hinweis. Konstruieren Sie per Induktion nach k eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $x_{n_k} \to a$.

    (b) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von H. Beweisen Sie: hat die Folge $\{a_n\}$ einen Grenzwert $a = \lim a_n$, so gilt $a \in H$.

    Hinweis. Verwenden Sie (a).

77. * Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von reellen Zahlen. Man definiert den *Limes inferior* und *Limes superior* von $\{x_n\}$ wie folgt:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{m\to\infty} \inf\{x_m : m \geq n\} \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{m\to\infty} \sup\{x_m : m \geq n\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

    (a) Ist die Folge $\{x_n\}$ konvergent oder bestimmt divergent (d.h. existiert $\lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$), so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{26}$$

    (b) Gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

    so ist die Folge $\{x_n\}$ konvergent oder bestimmt divergent.

78. ** Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Menge von Häufungspunkten der Folge $\{x_n\}$. Beweisen Sie, dass

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min H \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \max H.$$

79. Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Menge von Häufungspunkten der Folge $\{x_n\}$.

    (a) Nehmen wir an, dass

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = a \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = b. \tag{27}$$

    Beweisen Sie, dass $H = \{a, b\}$.

    (b) Für die gegebenen Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie $\liminf x_n$ und $\limsup x_n$:

$$\text{(i)} \quad x_n = n^{(-1)^n} \qquad \text{(ii)} \quad x_n = \frac{2n + (-1)^n n}{n+1} \qquad \text{(iii)} \quad x_n = 3^{(-1)^n}$$

Hinweis. Sie können benutzen, dass

$$\limsup x_n = \max H \quad \text{und} \quad \liminf x_n = \min H, \tag{28}$$

wobei H die Menge von Häufungspunkten von $\{x_n\}$ ist (siehe Aufgabe 78).

80. ** Set $\{x_n\}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen. Sei $p > 1$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass die Folge $\{x_n^p\}$ genau dann konvergiert wenn $\{x_n\}$ konvergiert.

81. ** Sei a eine positive reelle Zahl. Definieren wir eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per Induktion wie folgt:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

   (a) Beweisen Sie die Identität

$$x_{n+1}^3 - a = \frac{8x_n^3 + a}{27x_n^6}\left(x_n^3 - a\right)^2. \tag{30}$$

   (b) Beweisen Sie, dass $\lim x_n^3 = a$.

   (c) Beschließen Sie daraus (mit Hilfe von Aufgabe 80), dass die Folge $\{x_n\}$ auch konvergiert. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $x = \lim x_n$ die Gleichung $x^3 = a$ erfüllt.

Bemerkung. Die Zahl x heißt *Kubikwurzel* aus a und wird mit $\sqrt[3]{a}$ bezeichnet.

82. (a) Beweisen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \tag{31}$$

und bestimmen Sie ihre Summe. *Hinweis.* Benutzen Sie Aufgabe 35.

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{32}$$

Hinweis. Vergleichen Sie die Reihen (31) und (32).

(c) Für jede der gegebenen Reihen bestimmen Sie, ob sie konvergiert oder divergiert:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^2+1} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k k}{k^3}$$

83. Mit Hilfe von dem Quotientenkriterium bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergiert sind.

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k^2}{3^k - k^3 + 1}$$

84. * Bestimmen Sie ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{\left(\sqrt{k}\right)^k} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(\sqrt{k})^k}$$

Hinweis. Verwenden Sie das Quotientenkriterium und das folgende Ergebnis der Aufgabe 69:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e = 2,718...$$

85. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexwertige Reihe. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Sei $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+2}}{a_k}\right| < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(c) Die Fibonacci-Folge $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ wird induktiv wie folgt definiert: $u_0 = u_1 = 1$ und

$$u_{k+1} = u_k + u_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zum Beispiel, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8$ usw. Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k}$$

konvergent. *Hinweis.* Beweisen Sie, dass $\limsup \frac{u_{k-1}}{u_{k+1}} < 1$ und benutzen (b).

86. ** Fixieren wir eine natürliche Zahl $q > 1$. Nach Aufgabe 72, jede Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von q-adischen Ziffern bestimmt eine reelle Zahl

$$0, z_1 z_2 ...... := \sum_{k=1}^{\infty} z_k q^{-k} \in [0,1] .$$

Mit anderen Worten, jede q-adische Kommazahl $0, z_1 z_2 ......$ hat den Wert in $[0,1]$. Der Zweck dieser Aufgabe ist die Umkehrung zu beweisen. Dafür beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ gibt es eine Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von q-adischen Ziffern so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0, z_1 ... z_n \leq x < 0, z_1 ... z_n + q^{-n}.$$

Leiten Sie daraus her, dass

$$x = 0, z_1 z_2 ...... \tag{33}$$

Somit lässt sich jede reelle Zahl $x \in [0,1)$ als q-adische Kommazahl darstellen.

(b) Eine unendliche q-adische Kommazahl $0, z_1 z_2 ......$ heißt *echt* wenn

$$\text{die Menge } \{k \in \mathbb{N} : z_k < q-1\} \text{ unendlich ist} \tag{34}$$

(folglich ist $0, z_1 z_2 ......$ ist unecht wenn $z_k = q - 1$ für fast alle k). Beweisen Sie: für jedes $x \in [0,1)$ gibt es genau eine echte q-adische Kommazahl mit dem Wert x.

Bemerkung. Ohne Bedingung (34) gibt es keine Eindeutigkeit in der Darstellung (33), z.B.

$$0, 0\,(q-1)\,(q-1)\,...... = 0, 1$$

da

$$\sum_{k=2}^{\infty} (q-1)\, q^{-k} = q^{-1}.$$

87. ** Beweisen Sie die Gleichmächtigkeit der folgenden Mengen:

$$[0,1) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) .$$

Hinweis. Verwenden Sie das Dualsystem, d.h. das q-adische Zahlensystem mit $q = 2$.