Blatt 12 - Abgabe bis 17.01.2025

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert
Die mit ** markierten Aufgaben sind auch zusätzlich, aber werden nicht korrigiert.

88. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (wobei $\overline{z}$ die komplexe Konjugierte von z bezeichnet).
(b) $\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(c) $|\exp(ix)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(d) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

89. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die Hyperbelfunktionen für alle $x, y \in \mathbb{C}$:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
(b) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
(c) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

90. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für jede komplexe Zahl x mit $|x| < 1$ gilt

$$|\exp(x) - 1| \le \frac{|x|}{1-|x|}. \tag{35}$$

(b) Für jede komplexe Zahl x mit $|x| \le 1/2$ gilt

$$|\exp(x) - 1 - x| \le |x|^2.$$

(c) Für jede Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen mit $z_n \to z$ gilt

$$\exp(z_n) \to \exp(z). \tag{36}$$

Hinweis. Zuerst beweisen Sie (36) für $z = 0$ mit Hilfe von (35).

91. * Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

(a) Für alle reelle $x \ge 0$ gilt

$$\exp(x) \ge 1 + x. \tag{37}$$

(b) Für alle reelle $x \in [0, 1)$ gilt

$$\exp(x) \le \frac{1}{1-x}. \tag{38}$$

(c) Die Ungleichung (37) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis. Für $x \in (-1, 0)$ benutzen Sie

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$$

und verwenden (38).

92. ** Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

(a) Für alle $x \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $(e^x)^n = e^{xn}$. Leiten Sie daraus her, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sqrt{e^x} = e^{x/2} \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{e^x} = e^{x/n}.$$

(b) Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq \frac{1}{8}(N+1)$ gilt
$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{8}{7} \frac{|x|^N}{N!}.$$

(c) Es gelten die Ungleichungen
$$\left| e - \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} \right| < 3 \cdot 10^{-8} \quad \text{und} \quad \left| e - \sum_{k=0}^{20} \frac{1}{k!} \right| < 3 \cdot 10^{-20}.$$

Sie dürfen einen Taschenrechner benutzen um $\frac{8}{7 \cdot N!}$ zu berechnen.

93. Mit Hilfe von dem Leibniz-Kriterium bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind:
$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 + (-1)^k}{k} \qquad \text{(iii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + k + (-1)^k k^2}{k^3}$$

94. ** Zeigen Sie: die Glieder der Leibniz-Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
können neu angeordnet werden, so dass die resultierende Reihe gegen $+\infty$ divergiert.

Hinweis. Benutzen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \infty$.

95. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) *(Cauchysches Verdichtungskriterium)* Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent genau dann wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent ist.
Hinweis: Setzen Sie $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und beweisen zunächst, dass für alle $k \in \mathbb{N}$
$$\frac{1}{2} \left(2^{k+1} a_{2^{k+1}} \right) \leq S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leq 2^k a_{2^k}.$$

(b) (*Dirichlet-Reihe*) Sei $p \in \mathbb{R}$. Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
konvergiert genau dann wenn $p > 1$.

96. ** Der Abstand $d(a,b)$ zwischen komplexen Zahlen a,b wird wie folgt definiert:

$$d(a,b) := |a-b|.$$

Eine Abbildung $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ heißt *Bewegung* wenn der Abstand unter F erhalten bleibt, d.h. wenn für alle $z,w\in\mathbb{C}$ gilt

$$d(F(z),F(w)) = d(z,w).$$

(a) Fixieren wir komplexe Zahlen α und β mit $|\alpha|=1$ and definieren die Abbildungen $A_{\alpha,\beta}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und $B_{\alpha,\beta}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit

$$A_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z+\beta \quad \text{und} \quad B_{\alpha,\beta}(z) = \alpha\overline{z}+\beta.$$

Beweisen Sie, dass $A_{\alpha,\beta}$ und $B_{\alpha,\beta}$ Bewegungen sind.

(b) Beweisen Sie dass die Komposition zweier Bewegungen wieder eine Bewegung ist.

(c) Beweisen Sie: ist F eine Bewegung mit $F(w)=w$ für $w=0$, $w=1$ und $w=i$ so ist F die identische Abbildung von $\mathbb{C}$.

(d) Beweisen Sie: für jede Bewegung F von $\mathbb{C}$ gibt es komplexe Zahlen α und β mit $|\alpha|=1$ so dass $F=A_{\alpha,\beta}$ oder $F=B_{\alpha,\beta}$.

97. ** Stellen Sie die folgenden Brüche im Dualsystem dar:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8}.$$

Bemerkung. Siehe Aufgabe 86 für Darstellung von Zahlen $x\in(0,1)$ in q-adischen Zahlensystem. Das Dualsystem ist das q-adische Zahlensystem mit $q=2$.

Hinweis. Verwenden Sie die folgende Identität die für alle $r>1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} = \frac{1}{r-1}. \tag{39}$$

98. ** Beweisen Sie: es gibt keine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die alle reelle Zahlen enthält.

Hinweis. Konstruieren Sie eine Intervallschachtelung $\{I_n\}$ von abgeschlossenen beschränkten Intervallen so dass $x_n\notin I_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Bemerkung. Somit existiert keine surjektive Abbildung $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Eine unendliche Menge X heißt *überabzählbar* falls X nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Folglich ist die Menge $\mathbb{R}$ überabzählbar.

99. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Alle Intervalle (a,b) mit reellen $a<b$ sind gleichmächtig.

(b) Das Intervall $(-1,1)$ und $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig.

(c) Jedes Intervall (a,b) mit $a<b$ enthält irrationale Zahlen.