Blatt 13 - Abgabe bis 24.01.2025

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert
Die mit ** markierten Aufgaben sind auch zusätzlich, aber werden nicht korrigiert.

100. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{3x^2 - x\sqrt{x}}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+13}}{x^2-9}$

101. Beweisen Sie das für jedes Polynom $P(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_n$ mit reellen Koeffizienten c_k und für alle $a > 0$ gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{e^{ax}} = 0.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Ungleichung $e^z > \frac{z^k}{k!}$ für alle $z > 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

102. Beweisen Sie:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Hinweis. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von Exponentialreihe dass

$$\frac{e^x-1}{x} - 1 = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + ... \tag{40}$$

und beweisen dass die Summe der Reihe in der rechten Seite von (40) gegen 0 konvergiert für $x \to 0$. Dafür schätzen Sie die Summe dieser Reihe von oben mit Hilfe einer geometrischen Reihe. Sie können immer annehmen dass $|x| < 1$ da $x \to 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Hinweis. Verwenden Sie die Exponentialreihe wie in (a) .

103. Beweisen Sie:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = 1$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Hinweis. Verwenden Sie die Darstellungen der Funktionen $\sin, \cos, \sinh, \cosh$ über die Reihen.

104. * Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion $f(x) = |x|$ (Betragsfunktion) ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(b) Die Funktion $f(x) = [x]$ (Gaußklammer) ist unstetig an alle $x \in \mathbb{Z}$ und stetig an allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(c) Die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist unstetig an allen $x \in \mathbb{R}$.

(d) Die folgende Funktion ist stetig auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

105. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Die folgende Funktion ist unstetig an $x = 0$ für jede Wahl von $a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ a, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(b) Die folgende Funktion ist stetig auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

106. ** Beweisen Sie, dass für alle $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{41}$$

Mit Hilfe von (41) berechnen Sie $e^{1/2}$ mit drei korrekten Nachkommastellen.

107. ** Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für alle $x \in [0, 3]$:

(a) $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

(b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

Hinweis. Verwenden Sie die Sinus- und Kosinusreihen und das Leibniz-Kriterium.

(c) Mit Hilfe von (a) und (b) beweisen Sie, dass

(i) $0,479 < \sin\dfrac{1}{2} < 0,480$ (ii) $0,875 < \cos\dfrac{1}{2} < 0,878$