Blatt 14 - Keine Abgabe

Die mit ** markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

108. ** (*Wurzelkriterium*) Bei dieser Aufgabe können Sie davon ausgehen, dass für alle $a \in [0, +\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ die n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ in $[0, +\infty)$ existiert und eindeutig bestimmt ist. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen. Setzen wir

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

   (a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (b) Gilt $r < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent.
   (c) Gilt $r > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ divergent.

109. ** Für jede von den folgenden Reihen bestimmen Sie mit Hilfe von Wurzelkriterium, ob sie konvergent oder divergent ist.

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{4^n} \quad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{(-1)^n}{2}\right)^n \quad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 2^n}.$$

110. ** Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Hyperbelfunktionen.

   (a) $\sinh x$ und $\cosh x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
   (b) $\sinh x$ ist streng monotone steigend auf $\mathbb{R}$.
   (c) $\cosh x$ ist streng monotone steigend auf $[0, +\infty)$.
   (d) Beschließen Sie aus (b) und (c) die Existenz der inversen Funktionen

$$\sinh^{-1} \quad \text{und} \quad \cosh^{-1}$$

   und bestimmen ihre Definitionsbereiche und Bildmengen.

111. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen über die inversen Hyperbelfunktionen.

   (a) Die Funktion $y = \sinh x$ mit dem Definitionsbereich $x \in [0, \infty)$ has die inverse Funktion

$$x = \sinh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

   die für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert ist.

   (b) Die Funktion $y = \cosh x$ mit dem Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$ has die inverse Funktion

$$x = \cosh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),$$

   die für alle $y \in [1, \infty)$ definiert ist.

112. ** Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall J heißt *konvex* wenn für alle $x, y \in J$ mit gilt

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{42}$$

Beweisen Sie: ist f konvex so gilt die folgende Ungleichung für beliebige endliche Folge $\{x_k\}_{k=1}^n$ von Zahlen aus J:

$$f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}. \tag{43}$$

Hinweis. Beweisen Sie (43) zunächst für $n = 2^m$ per Induktion nach m.

113. ** Beweisen Sie dass die Funktion $f(x) = x^k$ auf $[0, +\infty)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvex ist.

114. ** Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$ konvex ist.

115. ** Beweisen Sie dass die folgenden Funktionen konvex sind.

   (a) $f(x) = \cosh x$ auf $\mathbb{R}$.

   (b) $f(x) = \sinh x$ auf $[0, +\infty)$.

116. ** Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine konvexe stetige Funktion auf einem Intervall J. Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in J$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f\left((1-\lambda)\,x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda f(y). \tag{44}$$

   Bemerkung. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ gilt (44) nach der o.g. Definition von konvexen Funktionen.

117. ** Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für alle $n, k \in \mathbb{N}$ und nicht-negative Zahlen $x_1, ..., x_n$.

   (a) $\left(\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)^k \leq \dfrac{x_1^k + ... + x_n^k}{n}$

   (b) $\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n} \leq \sqrt[n]{x_1 ... x_n}$ (die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel).

   Hinweis. Verwenden Sie die Aufgaben 112, 113 und 114.