Blatt 2 - Abgabe bis 25.10.2024

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

11. Seien A eine Teilmenge von X und B eine Teilmenge von Y. Beweisen Sie die Identität

$$X \times Y = (A \times B) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c),$$

wobei A^c das Komplement von A in X ist und B^c – das Komplement von B in Y.

12. * Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des kartesischen Produkts.

    (a) $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$
    (b) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$
    (c) $(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$
    (d) $(A_1 \triangle A_2) \times B = (A_1 \times B) \triangle (A_2 \times B)$.

13. Seien X, Y beliebige nichtleere Mengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

    (a) Betrachten wir die Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$. Gilt $f \circ g = \mathrm{Id}_X$, so ist g injektiv und f surjektiv.
    (b) Für jede injektive Abbildung $g : X \to Y$ gibt es eine Abbildung $f : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{Id}_X$.
    (c) Für jede surjektive Abbildung $f : Y \to X$ gibt es eine Abbildung $g : X \to Y$ mit $f \circ g = \mathrm{Id}_X$.

14. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$.

    (a) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist g injektiv.
    (b) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist f surjektiv.

15. Gegeben sei eine Abbildung $f : X \to Y$. Für jede Teilmenge $A \subset X$ definieren wir das Bild $f(A)$ von A wie folgt

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

so dass $f(A)$ eine Teilmenge von Y ist. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle Teilmengen A, B von X.

    (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
    (b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
    (c) Die Identität $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ gilt für alle Teilmengen A, B von X genau dann, wenn f injektiv ist.