Blatt 3 - Abgabe bis 01.11.2024

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

Bei den Aufgaben mit reellen Zahlen dürfen Sie nur die Axiome von $\mathbb{R}$ und ihre Folgerungen verwenden, die in den Vorlesungen bewiesen wurden.

16. Beweisen Sie folgendes.

    (a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $-(a+b) = -a - b$.
    (b) Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
    (c) Die Gleichung $ax = b$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat genau eine reelle Lösung $x = a^{-1}b$.

17. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ definieren wir den Bruch

$$\frac{a}{b} := b^{-1}a.$$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für beliebige reellen Zahlen a, b, c, d mit $b, d \neq 0$.

(a) $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$ für alle $x \neq 0$
(b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
(c) $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
(d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ (vorausgesetzt $a, b \neq 0$).

18. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen und Identitäten für reelle Zahlen.

    (a) Für alle $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq a \leq b$ gilt $ax \leq by$.
    (b) Für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d, mit $a \leq c$ und $b \geq d$ gilt $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.
    (c) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
    (d) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

19. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Betrag $|x|$ durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Betrages.

(a) $|x+y| \leq |x| + |y|$
(b) $|x+y| \geq ||x| - |y||$
(c) $|xy| = |x|\,|y|$
(d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ falls $y \neq 0$.

20. * Betrachten wir eine Menge $K = \{0, 1\}$ die aus zwei verschiedenen Elementen 0 und 1 besteht, und definieren in K die Operationen $+$ und $\cdot$ wie folgt:

$$0 + x = x + 0 = x, \quad 1 + 1 = 0,$$
$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \qquad 1 \cdot 1 = 1,$$

für alle $x \in K$.

(a) Beweisen Sie, dass K ein Körper ist. Dieser Körper wird standardmäßig mit $\mathbb{F}_2$ bezeichnet.

(b) Beweisen Sie, dass in $\mathbb{F}_2$ die folgenden Identitäten gelten:

$$x + x = 0 \quad \text{und} \quad x \cdot x = x.$$

21. * Sei X eine Grundmenge. Für jede Teilmenge $A \subset X$ definieren wir die *Indikatorfunktion* $\mathbf{1}_A : X \to \mathbb{F}_2$ mit

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^c \end{cases}$$

Bewiesen Sie die folgenden Identitäten für beliebige Teilmengen A, B von X.

(a) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$

(b) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$

(c) $\mathbf{1}_{A \triangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$

(d) $\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_A$.

Bemerkung: Die Operationen $+$ und $\cdot$ mit Funktionen $f, g : X \to \mathbb{F}_2$ werden wie folgt definiert:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

22. * Mit Hilfe von Indikatorfunktionen der Aufgabe 21 beweisen Sie die folgenden Identitäten für die Mengenoperationen:

(a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(c) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$

(d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Hinweis. Sie können annehmen, dass die Mengen A, B, C Teilmengen einer Grundmenge X sind (z.B. $X = A \cup B \cup C$). Um die Identität zweier Mengen $M, N \subset X$ zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $\mathbf{1}_M = \mathbf{1}_N$.

23. * Sei X eine Grundmenge und $\mathcal{F}$ eine Menge von Teilmengen von X, d.h. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Definieren wir den Durchschnitt von allen Mengen $A \in \mathcal{F}$ mit

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X : \forall A \in \mathcal{F} \text{ gilt } x \in A\},$$

und die Vereinigung von allen Mengen $A \in \mathcal{F}$ mit

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X : \exists A \in \mathcal{F} \text{ mit } x \in A\}.$$

Beweisen Sie die Formeln von De Morgan für $\bigcap$ und $\bigcup$:

$$\left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A\right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A^c \quad \text{und} \quad \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A\right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A^c. \tag{3}$$