Blatt 4 - Abgabe bis 08.11.2024

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

24. Seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$. Beweisen Sie dass das Intervall (a, b) mit der Menge von allen Zahlen der Form $\lambda a + (1-\lambda) b$ mit $\lambda \in (0,1)$ übereinstimmt.

    Bemerkung. Eine äquivalente Formulierung ist wie folgt: für die Abbildung

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto f(\lambda) = \lambda a + (1-\lambda) b \end{aligned}$$

    stimmt die *Bildmenge* $\{f(\lambda) : \lambda \in (0,1)\}$ mit dem Intervall (a, b) überein.

25. * Für reelle Zahlen a, b definieren wir die Operationen $\wedge$ und $\vee$ durch

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \min\{a, b\} \\ a \vee b &= \max\{a, b\}. \end{aligned}$$

    (a) Beweisen Sie die Kommutativ- und Assoziativgesetze für $\wedge$ und $\vee$.

    (b) Beweisen Sie zwei Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

26. * Beweisen Sie, dass der Durchschnitt zweier Intervalle immer ein Intervall ist.

    Bemerkung. Die leere Menge ist auch ein Intervall, z.B. $\emptyset = (0,0)$.

    Bemerkung. Die Vereinigung zweier Intervalle muss nicht ein Intervall sein, z.B. $(0,1) \cup (2,3)$ ist kein Intervall.

27. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Quadratwurzel.

    (a) Für alle $0 \le a \le b$ gilt $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$.

    (b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.

    (c) Für alle $a, b \ge 0$ gilt $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, und für $b > 0$ gilt $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

    (d) Für jede $a > 0$ hat die Gleichung $x^2 = a$ genau zwei reelle Lösungen: $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$.

28. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle reellen Zahlen a, b, c, x, y, z.

    (a) Die Identität

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2. \quad (4)$$

    (b) Die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$(ax + by + cz)^2 \le \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right). \quad (5)$$

    (c) Die Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel

$$\frac{a + b + c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}. \quad (6)$$

29. Betrachten wir die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{7}$$

mit reellen Koeffizienten a, b, c, wobei $a \neq 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Gleichung (7) hat eine reelle Lösung x genau dann wenn $d := b^2 - 4ac \geq 0$.

(b) Im Fall $d > 0$ hat die Gleichung (7) zwei reelle Lösungen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}, \tag{8}$$

und im Fall $d = 0$ hat (7) genau eine reelle Lösung $x = -\frac{b}{2a}$.

Hinweis. Verwenden Sie die quadratische Ergänzung und die Aufgabe $27(d)$.