

Blatt 5 - Abgabe bis 15.11.2024

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert
Verwenden Sie das Induktionsprinzip wann immer möglich

30. (Bernoullische Ungleichung) Beweisen Sie, dass für alle reelle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

31. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Es gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \quad (9)$$

- (b) (Summenformel für die geometrische Reihe) Für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \quad (10)$$

- (c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x-y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k = x^{n+1} - y^{n+1}. \quad (11)$$

Bemerkung. Für $n=1$ ergibt (11)

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

und für $n=2$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3.$$

32. Eine natürliche Zahl n heißt *gerade* wenn $n/2 \in \mathbb{N}$, und *ungerade* wenn $(n+1)/2 \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Jede natürliche Zahl n ist entweder gerade oder ungerade.

Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach n .

- (b) Das Produkt nm zweier natürlichen Zahlen n, m ist ungerade genau dann wenn die beiden Zahlen n und m ungerade sind.

Hinweis. Die obigen Definitionen der geraden und ungeraden Zahlen ergeben folgendes: für jede gerade Zahl n gilt $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, und für ungerade Zahl n gilt $n = 2k - 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

33. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(ab)^n = a^n b^n$

(b) $a^{n+m} = a^n a^m$

(c) $(a^n)^m = a^{nm}$

34. * Beweisen Sie die Identitäten (a), (b) und (c) von Aufgabe 33 auch für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hinweis. Benutzen Sie, dass $a^0 = 1$ und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a^{-k} := (a^{-1})^k = (a^k)^{-1}. \quad (12)$$

35. * Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Summenformeln:

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(c) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(d) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

36. * Für ganze Zahlen $n \geq k \geq 0$ definieren wir den *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

wobei $n! := \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

- (a) Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n \geq k \geq 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{j=n-k+1}^n j}{k!} \quad \left(= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!} \right).$$

- (b) Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n \geq k \geq 1$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

37. * Beweisen Sie die folgenden Identitäten für endliche Summen von reellen Zahlen:

$$(a) c \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (ca_k)$$

$$(b) \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

$$(c) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{l=1}^m b_l \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^m a_k b_l \right) = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_k b_l \right)$$

- (d) Sei $\{a_k\}_{k=m}^n$ eine Folge von reellen Zahlen, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m < n$. Beweisen Sie die folgende Identität für alle $l \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq l < n$:

$$\sum_{k=m}^l a_k + \sum_{k=l+1}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_k. \quad (13)$$

Hinweis. Fixieren Sie m und l mit $l \geq m$ und beweisen (13) für alle $n > l$ per Induktion nach n .