Blatt 6 - Abgabe bis 22.11.2024

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

38. Beweisen Sie, dass die Zahl $\sqrt{2}$ irrational ist.

   Hinweis. Nehmen Sie an, dass $\sqrt{2}$ rational ist und stellen $\sqrt{2}$ in der Form $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ dar, wobei q die kleinste mögliche Zahl in solche Darstellung ist. Mit Hilfe von Aufgabe 32 beweisen Sie, dass die beiden Zahlen p und q gerade sind. Daraus folgt $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$ wobei $p' = p/2$ und $q' = q/2$ natürliche Zahlen sind, was im Widerspruch zur Minimalität von q steht.

39. Seien a und b reelle Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über das Intervall (a, b).

   (a) Gilt $b > a + 1$ so enthält das Intervall (a, b) eine ganze Zahl.
   Hinweis. Benutzen Sie den Begriff von Gaußklammer.

   (b) Gilt $b > a$ so enthält das Intervall (a, b) eine rationale Zahl.
   Hinweis. Finden Sie eine ausreichend große natürliche Zahl q so dass $qb > qa + 1$ und verwenden (a).

40. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über endliche Mengen.

   (a) Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist A endlich so existieren $\max A$ und $\min A$.
   Hinweis. Beweis per Induktion nach $n = \operatorname{card} A$.

   (b) Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Ist A (nach unten und nach oben) beschränkt, so ist A endlich.

   Bemerkung. Es folgt aus (a) und (b) dass eine nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{Z}$ genau dann endlich ist wenn sie beschränkt ist.

41. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für beliebige endliche Mengen A, B:

   (a) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$
   Hinweis. Verwenden Sie dass für disjunkte endliche Mengen X, Y gilt

   $$\operatorname{card}(X \sqcup Y) = \operatorname{card} X + \operatorname{card} Y. \tag{14}$$

   (b) $\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \operatorname{card} B$
   Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach $n = \operatorname{card} A$.

42. * Sei A eine endliche Menge. Beweisen Sie, dass

   $$\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A}.$$

   Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach $n = \operatorname{card} A$ und (14).

43. * Beweisen Sie die folgenden Aussagen für die Folgen $\{x_k\}_{k=1}^n$ und $\{y_k\}_{k=1}^n$ von reellen Zahlen, wobei $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Die Identität:

   $$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (x_k y_l - x_l y_k)^2. \tag{15}$$

   Hinweis. Verwenden Sie die Aufgabe 37.

(b) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right). \tag{16}$$

(c) Die Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,. \tag{17}$$

44. * Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\{a_k\}_{k=1}^n$ eine endliche Folge von *reellen* Zahlen wobei $n \ge 2$. Nehmen wir an dass

$$a_k < a_{k+1} \quad \text{für alle } k \in \{1, ..., n-1\}\,.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} (a_k, a_{k+1}] = (a_1, a_n],$$

d.h. die Vereinigung von allen Intervallen $(a_k, a_{k+1}]$ mit $1 \le k \le n-1$ ist gleich $(a_1, a_n]$.

(b) Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine *unendliche* Folge von *ganzen* Zahlen, d.h. eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ wobei $a(k) =: a_k$. Nehmen wir an, dass

$$a_k < a_{k+1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k, a_{k+1}] = (a_1, +\infty)\,,$$

d.h. die Vereinigung von allen Intervallen $(a_k, a_{k+1}]$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist gleich $(a_1, +\infty)$.

Hinweis. Benutzen Sie (a) und zeigen per Induktion nach n, dass $a_n \ge a_1 + n - 1$. Dafür verwenden Sie die Eigenschaft von ganzen Zahlen: $x > y \Leftrightarrow x \ge y + 1$.