

Blatt 7 - Abgabe bis 29.11.2024

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert.

Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

45. Führen Sie die folgenden Operationen mit komplexen Zahlen durch:

(a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

(b) $(5 - 2i)^2 \left(\frac{1}{2} + i\right)^2$

(c) $(1 + i)^5$ (mit Hilfe vom binomischen Lehrsatz).

(d) Bestimmen Sie alle komplexe Lösungen z der Gleichung

$$z^2 = 3 - 4i.$$

Hinweis. Schreiben Sie die Gleichung in der Form

$$(x + yi)^2 = 3 - 4i$$

mit reellen x, y um und erhalten ein System zweier Gleichungen für die Unbekannten x, y .

46. Führen Sie die folgenden Operationen mit komplexen Zahlen durch:

(a) $(2 - i)^4 + |12 - 5i| (1 + 3i)$

(b) $\frac{(3 + 2i)^3}{(1 + i)^4}$

(c) $\frac{1 - 2i}{2 + i} |3 - 4i|$

(d) $\frac{25}{3 + 4i} + \frac{4 + 2i}{3 - i}$

47. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für komplexe Zahlen:

(a) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$

(b) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

(c) $(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$

(d) $|zw| = |z| |w|$ (mit Hilfe von (c)).

48. Führen Sie die folgenden Operationen mit komplexen Zahlen durch:

(a) $\frac{3 - i}{2 + i} + \frac{3 + i}{2 - i}$

(b) $\frac{(3 + i)^3}{|1 + i|^2} - (\overline{2 + i})^2$

(c) $|i - 3i^2 - 6i^3 + 2i^4 + 5i^5|$

(d) $(1 + i)^{-3} + (1 - i)^{-3}$

49. * Beweisen Sie: für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau zwei komplexe Zahlen z mit $z^2 = w$.

50. ** Beweisen Sie, dass für die komplexe Zahl

$$z = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{i}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

gilt $z^5 = -1$.

51. ** Eine Relation $\sim$ auf einer Menge M heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $x \sim x \quad \forall x \in M$ (Reflexivität)
- (ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)
- (iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

Für jedes Element $x \in M$ bezeichnen wir mit $[x]$ die folgende Teilmenge von M :

$$[x] := \{z \in M : z \sim x\}.$$

Die Teilmenge $[x]$ heißt die *Äquivalenzklasse* von x . Beweise Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Die Vereinigung von allen Äquivalenzklassen ist M (d.h. $\bigcup_{x \in M} [x] = M$).
- (b) Je zwei Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ sind entweder identisch oder disjunkt.
- (c) Für je zwei Elemente $x, y \in M$ gilt $x \sim y$ genau dann, wenn x und y in derselben Äquivalenzklasse sind.

Bemerkung. Die Menge von verschiedenen Äquivalenzklassen heißt die *Quotientenmenge* von $\sim$ und wird mit $M/\sim$ bezeichnet.

52. ** In einer endlichen Menge A mit $\text{card } A \geq 2$ ist eine Relation $\sim$ definiert mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $x \not\sim x$ für alle $x \in A$ (anti-Reflexivität)
- (ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)

Für jedes $x \in A$ bezeichnen wir mit A_x die Menge von allen Elementen $z \in A$ mit $z \sim x$. Beweisen Sie: es gibt zwei verschiedene Elemente $x, y \in A$ mit

$$\text{card } A_x = \text{card } A_y. \quad (18)$$

Bemerkung. Ein Paar $(A, \sim)$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) heißt *Graph*. Die Elemente von A heißen *Knoten* des Graphen und die Paare (x, y) mit $x \sim y$ heißen *Kanten*. Die Zahl $\text{card } A_x$ heißt der *Grad* des Knotens x . Die Identität (18) bedeutet: jeder endliche Graph mit mindestens 2 Knoten enthält zwei Knoten von gleichen Graden.

Hinweis. Verwenden Sie das Schubfachprinzip.

53. ** Sei $\{a_k\}_{k=0}^n$ eine Folge von reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: es gibt verschiedene ganze Zahlen $i, j \in \{0, \dots, n\}$ mit

$$|a_i - a_j| < \frac{1}{n}.$$

Hinweis. Verwenden Sie das Schubfachprinzip.

54. ** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit S_n die Menge von allen bijektiven Selbstabbildungen von $\mathcal{E}_n = \{1, \dots, n\}$. Die Elemente von S_n heißen n -stellige *Permutationen*. Beweisen Sie dass

$$\text{card } S_n = n!.$$

Hinweis. Induktion nach n .

55. ** Für ganze Zahlen $0 \leq m \leq n$ bezeichnen wir mit $K(n, m)$ das Mengensystem von allen m -elementigen Teilmengen von $\mathcal{E}_n$, d.h.

$$K(n, m) = \{A \in \mathcal{P}(\mathcal{E}_n) : \text{card } A = m\}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\text{card } K(n, m) = \binom{n}{m}.$$

Hinweis. Induktion nach n .

56. ** Seien X und Y endliche Mengen. Bezeichnen wir mit Y^X die Menge von allen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$. Beweisen Sie dass

$$\text{card}(Y^X) = (\text{card } Y)^{\text{card } X}.$$

Hinweis. Induktion nach $n = \text{card } X$.

57. ** Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \tag{19}$$