Blatt 8 - Abgabe bis 06.12.2024

Die mit * markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert.
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

58. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$$

Hinweis. Verwenden Sie, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Hinweis. Multiplizieren und dividieren Sie den Ausdruck $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - n^2 + \sqrt{n}}{(n+2)(n^2+1)}$$

Hinweis. Zuerst können Sie n^3 aus Nenner und Zähler ausklammern.

59. Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Für jede konvergente Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von nichtnegativen reellen Zahlen gilt die Identität:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

Hinweis. Setzen Sie $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und betrachten separat zwei Fälle: $a > 0$ und $a = 0$.

(b) Für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von nicht Null reellen Zahlen gilt die Äquivalenz:

$$\lim x_n = 0 \iff \lim \frac{1}{|x_n|} = +\infty.$$

(c) Für jede Folge $\{x_n\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ und $x_n \neq 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3 - 1}{x_n - 1} = 3.$$

60. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4} - n) n$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}n + 2^n}{3^n (1 + \sqrt{n})^2}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n - \sqrt{n^2 - 1})}$$

61. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für jede reelle Zahl $q > 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0$.

Hinweis. Zeigen Sie zuerst dass für alle $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^2$.

(b) Für jede positive reelle Zahl b gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0.$$

Hinweis. Setzen Sie $x_n = \frac{b!}{n!}$ und zeigen, dass $\frac{x_n}{x_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$ für ausreichend große n .

62. * Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^n}{(2^n + n)^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{3^{n-1} - 2^{n-1}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right).$

63. ** Definieren wir eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv wie folgt:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergent ist und bestimmen Sie $\lim x_n$.

Hinweis. Bestimmen Sie zuerst $\lim x_n$, vorausgesetzt, dass $\{x_n\}$ konvergent ist.

64. ** Sei a eine positive reelle Zahl. Definieren wir eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ per Induktion wie folgt:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{(x_n^2 - a)^2}{4x_n^2}.$$

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergiert und $\lim x_n = \sqrt{a}$.

Bemerkung. Für $a = 2$ berechnet man:

$$x_2 = 1,5, \quad x_3 = 1,416666\dots, \quad x_4 = 1,414215\dots, \quad x_5 = 1,414213562374\dots$$

usw., so dass die Folge $\{x_n\}$ gegen

$$\sqrt{2} = 1,414213562373\dots$$

ziemlich schnell konvergiert.