Blatt 9 - Abgabe bis 13.12.2024

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert
Die mit ** markierten Aufgaben sind auch zusätzlich, aber werden nicht korrigiert.

65. Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexwertige Folge, d.h. $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ mit reellen x_n, y_n. Man sagt dass die Folge z_n gegen eine komplexe Zahl $a = x + iy$ konvergiert und schreibt $z_n \to a$ oder $\lim z_n = a$ when $|z_n \to a| \to 0$. Beweisen Sie, dass

$$z_n \to a \quad \Leftrightarrow \quad x_n \to x \text{ und } y_n \to y.$$

66. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für komplexwertige konvergente Folgen $\{z_n\}$ und $\{w_n\}$ mit den Grenzwerten $a = \lim z_n$ und $b = \lim w_n$:

$$\lim (z_n + w_n) = a + b, \quad \lim (z_n - w_n) = a - b, \quad \lim (z_n w_n) = ab, \quad \lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b}$$

(im letzten Teil wird es vorausgesetzt, dass $w_n \neq 0$ und $b \neq 0$).

Hinweis. Verwenden Sie die Aufgabe 65 und die Rechenregeln für reellwertige Folgen.

67. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}$, die induktiv wie folgt definiert ist:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $x_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie, dass $x_{n+1} \leq x_n$ so dass die Folge $\{x_n\}$ monoton fallend ist. Beschließen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergent ist.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $x = \lim x_n$. Dafür zeigen Sie, dass x die folgende Gleichung erfüllt:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

68. Der Zweck dieser Aufgabe ist den Wert des Ausdrucks

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}} \tag{21}$$

zu bestimmen. Nach Definition ist der Wert von (21) gleich $\lim x_n$, wobei die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv definiert wird wie folgt

$$x_1 = 0 \text{ und } x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Beweisen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend ist, d.h. $x_{n+1} \geq x_n$. Dafür verwenden Sie Induktion nach n.

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ beschränkt ist. Beschließen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergent ist.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $x := \lim x_n$. Dafür zeigen Sie zunächst dass $x = \sqrt{1 + x}$, und dann lösen diese Gleichung.

69. * Betrachten wir die Folgen

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n > 1$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \frac{n}{n+1}. \tag{22}$$

(b) Beweisen Sie, dass $\{x_n\}$ monoton steigend ist und $\{y_n\}$ monoton fallend.
Hinweis. Mit Hilfe von (22) und Bernoullischer Ungleichung (Aufgabe 30) beweisen Sie, dass

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq 1 \quad \text{und} \quad \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1.$$

(c) Beweisen Sie, dass die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ konvergent sind und $\lim x_n = \lim y_n$.

(d) Setzen wir $e := \lim x_n = \lim y_n$. Beweisen Sie, dass $2 < e < 3$.
Hinweis. Vergleichen Sie e mit x_2 und y_5. Um y_5 zu bestimmen dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.
Bemerkung. Die Zahl e heißt die *Eulersche Zahl.* Es ist bekannt, dass

$$e = 2,718281828459045...$$

70. ** Fixieren wir reelle Zahlen α und β und definieren eine neue "Multiplikation" $\star$ von komplexen Zahlen wie folgt:

$$(x + yi) \star (x' + y'i) = xx' + yy'(i \star i) + (xy' + yx')\, i,$$

wobei

$$i \star i = -\alpha + \beta i.$$

(a) Beweisen Sie folgendes: gilt $4\alpha > \beta^2$ so hat jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ das Inverse bezüglich der Operation $\star$, d.h. es gibt $w \in \mathbb{C}$ mit

$$z \star w = 1.$$

Hinweis. Sie können annehmen dass die Operation $\star$ kommutativ, assoziativ und distributiv ist. Versuchen Sie zunächst, die Konjugierte von z bezüglich $\star$ zu finden, d.h. ein $z' \in \mathbb{C}$ so dass $z \star z'$ reell und positiv ist.
Bemerkung. Im Fall $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ gilt $i \star i = -1$ so dass die Operation $\star$ mit der üblichen Multiplikation von komplexen Zahlen übereinstimmt.

(b) Beweisen Sie, dass im Fall $4\alpha \leq \beta^2$ eine nicht-Null komplexe Zahl z ohne Inverse existiert.