Analysis I

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

WS 2024/25

Contents

Chapter 1

Mengen und reelle Zahlen

09.10.2024 **Vorlesung 1**

Die zentralen Objekte im Kurs Analysis I/II sind der Begriff von *Funktion* und die Operationen mit Funktionen, insbesondere *Differenzieren* und *Integrieren.* Somit besteht der Kurs Analysis I/II aus zwei Bestandteilen: *Differentialrechnung* und *Integralrechnung.* Diese sind mathematische Werkzeuge für Untersuchung von Funktionen, die in Anwendungen in Physik, Technik und Wirtschaft weit benutzt werden.

Diese Theorie wird rigorous eingeführt d.h. alle wichtige Eigenschaften werden logisch bewiesen. Darüber hinaus machen die Beweise einen großen Teil der Theorie aus.

Um mit dem Begriff einer Funktion arbeiten zu können, müssen wir zuerst die Theorie von *reellen Zahlen* entwickeln, die die Grundlage der Analysis bildet. Diese sind Kommazahlen die alle Menschen jeden Tag benutzen, aber für Anwendungen in Analysis benötigen wir einige grundlegende Eigenschaften von Zahlen die außerhalb der Mathematik kaum bekannt sind.

Die Theorie von reellen Zahlen wird axiomatisch eingeführt, d.h. man formuliert einige Axiome die wir ohne Beweis annehmen, und alle weiteren Eigenschaften werden aus den Axiomen hergeleitet. Um diese Theorie entwickeln zu können, brauchen wir zunächst die *Mengenlehre*: die Theorie von Mengen, die die Sprache der gesamten Mathematik ist. Die axiomatische Darstellung von Mengenlehre ist ziemlich lang und basiert auf Mathematischer Logik. Wir benutzen stattdessen einen intuitiven Ansatz zur Mengenlehre und Mathematischen Logik bei dem die Axiome implizit verwendet werden.

1.1 Mengen und Operationen auf den Mengen

Elemente von Mengen. In Mathematik arbeitet man mit verschiedenen Objekten. Aus Objekten macht man Mengen.

> Eine *Menge* ist eine Sammlung von anderen Objekten, die selbst als ein Objekt betrachtet wird.

Somit besteht jede Menge M aus bestimmten Objekten, die *die Elemente* von M heißen. Ist x ein Element von M, so schreibt man

$$x \in M$$

("x ist Element von M", "x gehört zu M", "x ist in M", "x liegt in M", "M enthält x"). Ist x kein Element von M, so schreibt man

$$x \notin M.$$

Es gibt eine Menge, die keine Elemente besitzt. Diese Menge heißt die *leere Menge* und wird mit dem Zeichen $\emptyset$ bezeichnet (eine durchgestrichene Null)

Für Mengen benutzt man häufig eine graphische Darstellung. Man zeigt eine Menge als eine Figure auf der Ebene und ihre Elemente – als die Punkte von der Figure.

Eine Menge kann explizit angegeben werden wie folgt. Zum Beispiel, die Menge M, die aus den Elementen (Buchstaben) a, b, c, d besteht, bezeichnet man mit

$$M = \{a, b, c, d\}$$

(d.h. alle Elemente von M in den geschwungenen Klammern). Das bedeutet, dass die Elemente von M die Buchstaben a, b, c, d sind, und nichts anderes. Zum Beispiel, $a \in M$ während $e \notin M$. Noch ein Beispiel: die Menge $M = \{a\}$ besteht nur aus einem Element a.

Die Elemente dürfen selber Mengen sein. Zum Beispiel, die Menge $M = \{\emptyset\}$ besteht aus einem Element $\emptyset$. (Die Menge $\{\emptyset\}$ soll mit der Menge $\emptyset$ nicht verwechselt werden: die erste Menge hat ein Element, während die zweite Menge hat kein Element).

Teilmengen und Inklusion.

Definition. Zwei Mengen A und B heißen gleich oder identisch wenn

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B \ ,$$

wobei der Doppelpfeil $\Leftrightarrow$ bedeutet "äquivalent", "genau dann, wenn". In diesem Fall schreibt man $A = B$.

Definition. Menge A heißt *Teilmenge* von Menge B und wenn

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

wobei das Zeichen $\Rightarrow$ (der Pfeil) bedeutet: "impliziert", "ergibt", "aus ... folgt ...". In diesem Fall schreibt man

$$A \subset B$$

("A ist Teilmenge von B"). Die Beziehung $\subset$ zwischen zwei Mengen heißt *Inklusion.* Eine äquivalente Notation: $A \subseteq B$.

Zum Beispiel, es gilt immer $\emptyset \subset A$. Es ist klar, dass $A = B$ genau dann gilt, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

Mit Hilfe von den logischen Symbolen '$\Rightarrow$' und '$\Leftrightarrow$' können wir die Definitionen von Inklusion und Identität von Mengen so umschreiben:

$$A = B \ \Leftrightarrow \ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,, \qquad A \subset B \ \Leftrightarrow \ (x \in A \Rightarrow x \in B)\,.$$

Behauptung. *Die Inklusion von Mengen ist transitiv, d.h.*

$$A \subset B \ \ \textit{und} \ \ B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C.$$

Beweis. Da $A \subset B$, so gilt

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

und nach $B \subset C$ gilt

$$x \in B \Rightarrow x \in C.$$

Es folgt, dass

$$x \in A \Rightarrow x \in C$$

und deshalb $A \subset C$. ■

Durchschnitt und Vereinigung. Jetzt definieren wir einige wichtige Operationen auf den Mengen. Häufig ist eine Menge M durch eine *Eigenschaft* E von Elementen angegeben, d.h.

$$x \in M \ \Leftrightarrow \ x \text{ erfüllt } E,$$

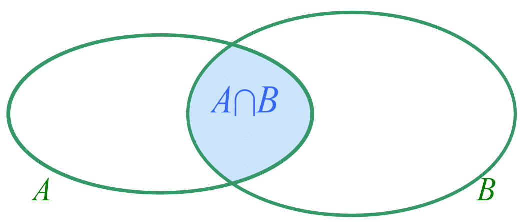
was bedeutet: M ist die Menge von den Elementen x mit der Eigenschaft E. In diesem Fall schreibt man auch

$$M = \{x : x \text{ erfüllt } E\} \quad \text{oder} \quad M = \{x \mid x \text{ erfüllt } E\}.$$

Definition. Der *Durchschnitt* zweier Mengen A und B ist die folgende Menge

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

wobei das Zeichen $\wedge$ (der Keil) bedeutet "und".



Die äquivalente Definition ist:

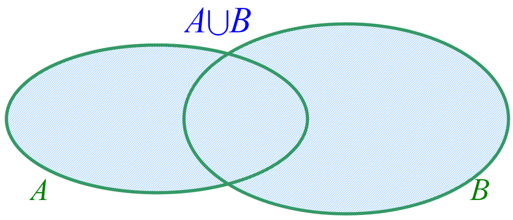
$$x \in A \cap B \ \Leftrightarrow \ x \in A \ \wedge \ x \in B.$$

Die Mengen A und B heißen *disjunkt* wenn $A \cap B = \emptyset$.

Definition. Die *Vereinigung* zweier Mengen A und B ist die folgende Menge:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

wobei das Zeichen $\vee$ bedeutet "oder".



Die äquivalente Definition ist:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$$

Beispiel. Es folgt aus den Definitionen, dass

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

und

$$A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Gelten die Inklusionen $A' \subset A$ und $B' \subset B$, so erhalten wir

$$A' \cap B' \subset A \cap B$$

und

$$A' \cup B' \subset A \cup B.$$

Auch gelten die Identitäten

$$A \cap A = A = A \cup A$$

und

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Die Gesetze von den Operationen $\cap, \cup$.

Satz 1.1 *Die Operationen $\cap$ und $\cup$ sind kommutativ und assoziativ, d.h. die folgenden Identitäten gelten für alle Mengen A, B.*

(a) (Kommutativgesetze)

$$A \cap B = B \cap A \quad \textit{und} \quad A \cup B = B \cup A$$

(b) (Assoziativgesetze)

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \textit{und} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,.$$

Das Wort “kommutativ” bedeutet, dass die Operanden A und B vertauschbar sind. Das Wort “assoziativ” bedeutet, dass das Ergebnis zweier Operationen unabhängig von der Reihenfolge der Operationen ist.

Beweis. (a) Es ist klar, dass

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \ \Leftrightarrow \ x \in B \ \wedge \ x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$$

woraus die Identität $A \cap B = B \cap A$ folgt. Die zweite Identität beweist man analog:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \ \Leftrightarrow \ x \in B \ \vee \ x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A.$$

(b) Nach den Definitionen erhalten wir

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \ \wedge \ x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in C. \end{aligned}$$

Gleichfalls erhalten wir

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in C, \end{aligned}$$

woraus die erste Identität folgt. Die zweite Identität beweist man analog:

$$x \in \ (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \ \ \vee \ \ x \in B \ \vee \ \ x \in C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

■

Man definiert den Durchschnitt der Mengen A, B, C durch

$$A \cap B \cap C := (A \cap B) \cap C.$$

wobei das Zeichen “:=” bedeutet “ist definiert durch”, und die Vereinigung dreier Mengen A, B, C durch

$$A \cup B \cup C := (A \cup B) \cup C.$$

Es folgt aus dem obigen Beweis, dass

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \cap C &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in C \\ x \in A \cup B \cup C &\Leftrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B \ \vee \ x \in C. \end{aligned}$$

Satz 1.2 (Distributivgesetze) *Es gelten die Identitäten*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1.1}$$

und

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.2}$$

Das Wort “distributiv” bedeutet, dass C auf A und B distributiert (verteilt) werden kann.

11.10.2024 Vorlesung 2

Beweis. Beweisen wir zunächst (1.1). We haben nach Definition

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \ \vee \ x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ x \in C \end{aligned}$$

und

$$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in C) \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C).$$

Betrachten wir die folgenden Aussagen:

$$\mathcal{A} = (x \in A), \quad \mathcal{B} = (x \in B), \quad \mathcal{C} = (x \in C).$$

Dann bleibt es zu zeigen, dass

$$(\mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{B}) \ \vee \mathcal{C} \ \ \Leftrightarrow \ \ (\mathcal{A} \ \vee \ \mathcal{C}) \ \wedge \ (\mathcal{B} \ \vee \ \mathcal{C}), \tag{1.3}$$

d.h. das Distributivgesetz für Aussagen.

Vor dem Beweis von (1.3) besprechen wir die Ergebnisse von Operationen $\wedge$ und $\vee$ mit Aussagen. Jede Aussage kann wahr oder falsch sein, wir schreiben entsprechend w oder f. Dann gelten offensichtlich die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} & w \wedge w = w \\ & w \wedge f = f \wedge w = f \\ & f \wedge f = f \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & w \vee w = w \\ & w \vee f = f \vee w = w \\ & f \vee f = f, \end{aligned}$$

die in der axiomatischen Mathematischen Logik als Axiome angenommen werden.

Um (1.3) zu beweisen, betrachten wir zwei Fälle.

Fall 1. $\mathcal{C} = w$. Dann sind die beiden Seiten von (1.3) wahr, und die Äquivalenz gilt.

Fall 2. $\mathcal{C} = f$. Dann erhalten wir

$$(\mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{B}) \ \vee \mathcal{C} \ \ \Leftrightarrow \ \mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{B}$$

und

$$(\mathcal{A} \ \vee \ \mathcal{C}) \ \wedge \ (\mathcal{B} \ \vee \ \mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{B},$$

woraus (1.3) folgt.

Analog ist (1.2) äquivalent zum zweiten Distributivgesetz für Aussagen:

$$(\mathcal{A} \ \vee \ \mathcal{B}) \ \wedge \mathcal{C} \ \ \Leftrightarrow \ \ (\mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{C}) \ \vee \ (\mathcal{B} \ \wedge \ \mathcal{C}). \tag{1.4}$$

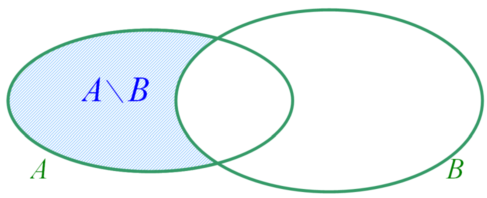
Fall 1. $\mathcal{C} = f$. Dann sind die beiden Seiten von (1.4) falsch.

Fall 2. $\mathcal{C} = w$. Dann sind die beiden Seiten von (1.4) äquivalent zu $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, woraus (1.4) folgt. ∎

Subtraktion von Mengen.

Definition. Die Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A, B ist definiert wie folgt:

$$A \setminus B := \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$



Die äquivalente Definition ist

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B.$$

Das Zeichen $\setminus$ (umgekehrter Schrägstrich) heißt "Mengenminus" oder einfach "Minus".

Es folgt, dass $A \setminus B \subset A$, während $A \setminus B$ und B disjunkt sind. Zum Beispiel, $A \setminus A = \emptyset$ und $A \setminus \emptyset = A$.

Potenzmenge. Betrachten wir jetzt nur die Teilmengen einer *Grundmenge* X.

Definition. Die Menge von allen Teilmengen der Menge X heißt die *Potenzmenge* von X und ist mit $\mathcal{P}(X)$ (oder 2^X) bezeichnet. d.h.

$$A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X.$$

Mit anderen Worten die Elemente von $\mathcal{P}(X)$ sind alle Teilmengen von X. Die Operationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$ mit den Elementen von $\mathcal{P}(X)$ ergeben offensichtlich wieder Elemente von $\mathcal{P}(X)$. Es gilt immer $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ und $X \in \mathcal{P}(X)$.

Beispiel. Für $X = \emptyset$ gilt $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Für $X = \{a\}$ gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

Für $X = \{a, b\}$ gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

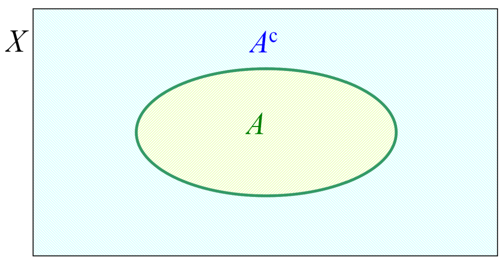
Für $X = \{a, b, c\}$ gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Komplement. Für die Elemente von $\mathcal{P}(X)$ gibt es noch eine Operation, die "Komplement" heißt.

Definition. Für jede Menge $A \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir das *Komplement* A^c durch

$$A^c = X \setminus A.$$



Äquivalent haben wir: für all $x \in X$,

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A. \tag{1.5}$$

Man benutzt für das Komplement A^c auch die Notation $\complement A$ (wobei 'C' aus dem englischen Wort "Complement" stammt).

Es folgt aus (1.5), dass

$$(A^c)^c = A.$$

Satz 1.3 *Die folgenden Identitäten gelten für die beliebigen Mengen $A, B \in \mathcal{P}(X)$:*

$$A \setminus B = A \cap B^c \tag{1.6}$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \tag{1.7}$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c. \tag{1.8}$$

Die zweite und dritte Identitäten heißen *De Morgan Formeln.* Diese Formeln lassen sich als die folgende Regel formulieren: das Komplement der Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplementen, und umgekehrt.

Beweis. We haben für alle $x \in X$

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B^c \end{aligned}$$

woraus (1.6) folgt.

Um die zweite Identität (1.7) zu beweisen, schreiben wir zuerst

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B.$$

Nun brauchen wir die Negation (Verneinung) der Aussage $x \in A \cap B$. Die Negation bezeichnet man mit dem Zeichen $\neg$, so dass

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow \neg (x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg (x \in A \ \wedge \ x \in B) .$$

Für beliebige Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{array}{c} \neg (\mathcal{A} \text{ und } \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \text{ oder } \neg\mathcal{B} \\ \neg (\mathcal{A} \text{ oder } \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \text{ und } \neg\mathcal{B} \end{array},$$

d.h. "und" und "oder" verwandeln sich ineinander unter der Negation. Diese Regeln lassen sich wie folgt umschreiben:

$$\boxed{\begin{array}{c} \neg (\mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \ \vee \ \neg\mathcal{B} \\ \neg (\mathcal{A} \ \vee \ \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \ \wedge \ \neg\mathcal{B} \end{array}}.$$

Zum Beweis soll man verschiedene Kombinationen von w und f für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ überprüfen. Zum Beispiel, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wahr sind, so gilt

$$\neg (w \wedge w) = \neg w = f \quad \text{und} \quad \neg w \vee \neg w = f \vee f = f,$$

wenn $\mathcal{A} = w$ und $\mathcal{B} = f$ so gilt

$$\neg (w \wedge f) = \neg f = w \quad \text{und} \quad \neg w \vee \neg f = f \vee w = w,$$

wenn $\mathcal{A} = f$ und $\mathcal{B} = f$ so gilt

$$\neg (f \wedge f) = \neg f = w \quad \text{und} \quad \neg f \vee \neg f = w \vee w = w,$$

so dass in alle Fällen

$$\neg (\mathcal{A} \ \wedge \ \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \ \vee \ \neg\mathcal{B}.$$

Analog beweist man die zweite Regel

$$\neg (\mathcal{A} \ \vee \ \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \ \wedge \ \neg\mathcal{B}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow \neg (x \in A \ \wedge \ x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg (x \in A) \ \vee \ \neg (x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \ \vee \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \ \vee \ x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c, \end{aligned}$$

woraus die Identität $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ folgt.

Analog lässt sich auch die dritte Identität (1.8) beweisen. Alternativ beweist man (1.8) mit Hilfe von (1.7) und der Identität $(A^c)^c = A$ wie folgt:

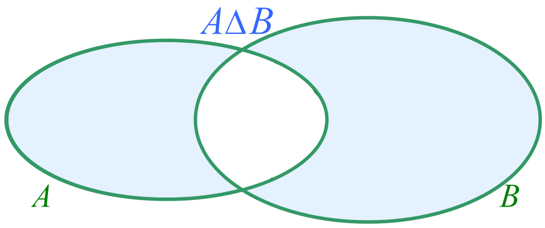
$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B,$$

woraus $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ folgt. ■

Symmetrische Differenz.

Definition. Die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ zweier Mengen A, B wird wie folgt definiert:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$



Es folgt daraus, dass

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \vee \ (x \in B \ \ \wedge \ x \notin A) ,$$

d.h. $x \in A \triangle B$ gilt genau dann, wenn x genau zu einer Menge von A, B gehört.

Für symmetrische Differenz gelten die folgenden Identitäten.

1. Alternative Definition (Aufgabe 10):

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$

2. Kommutativgesetz (offensichtlich):

$$A \triangle B = B \triangle A.$$

3. Assoziativgesetz (Aufgabe 2):

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) .$$

4. Distributivgesetz bezüglich $\cap$ (Aufgabe 3):

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C) .$$

Kartesisches Produkt.

Definition. Für je zwei Mengen A, B definieren wir *kartesisches (direktes) Produkt* $A \times B$ der Mengen A, B wie folgt: die Menge $A \times B$ besteht aus allen geordneten *Paaren* (x, y) wobei $x \in A$ und $y \in B$:

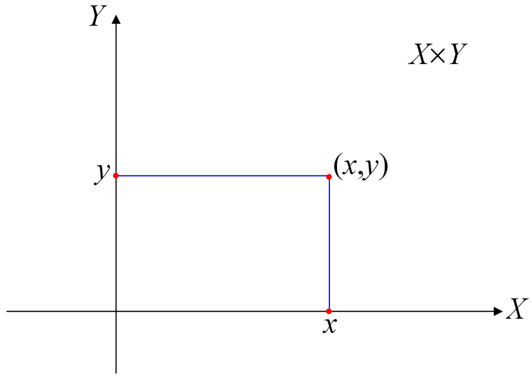
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, \quad y \in B\} .$$

Das geordnete Paar (x, y) ist ein neues Objekt, das man aus den Elementen von A und B erstellt. Zwei Paaren (x, y) und (x', y') sind gleich genau dann, wenn $x = x'$ und $y = y'$.

Beispiel. Für die Mengen $A = \{a, b\}$ und $B = \{0, 1\}$ erhalten wir nach Definition

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}.$$

Beispiel. Sei X eine waagerecht Gerade in der Ebene und Y – eine senkrechte Gerade. Dann kann das Produkt $X \times Y$ als die Ebene dargestellt werden.



Kartesisches Produkt ist nicht kommutativ, aber assoziativ. Beachten wir, dass

$$(A \times B) \times C = \{((x, y), z) : x \in A, y \in B, z \in C\}$$

und

$$A \times (B \times C) = \{(x, (y, z)) : x \in A, y \in B, z \in C\}.$$

Nun identifizieren wir die Paaren $((x, y), z)$ und $(x, (y, z))$ miteinander und mit dem geordneten Tripel (x, y, z) nach Definition:

$$((x, y), z) = (x, (y, z)) = (x, y, z).$$

Dann gilt für kartesisches Produkt das Assoziativgesetz:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

Darüber hinaus definieren wir kartesisches Produkt $A \times B \times C$ dreier Mengen A, B, C mit

$$A \times B \times C := \{(x, y, z) : x \in A, y \in B, z \in C\},$$

und erhalten, dass

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C.$$

Kartesisches Produkt erfüllt auch das Distributivgesetz:

$$(A_1 \star A_2) \times B = (A_1 \times B) \star (A_2 \times B)$$

wobei $\star$ irgendeine Mengenoperation $\cap, \cup, \setminus, \triangle$ bezeichnet (Aufgabe 12).

16.10.2024 **Vorlesung 3**

1.2 Abbildungen

Gegeben seien zwei Mengen X, Y. Eine Abbildung (=Funktion) f von X nach Y ist eine Zuordnung (Vorschrift, Regel) $x \mapsto y$, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Die Abbildung wird wie folgt bezeichnet:

$$f : X \to Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Wenn dem Element $x \in X$ das Element $y \in Y$ zugeordnet ist (d.h. $x \mapsto y$), so heißt y der *Wert* von f an der Stelle x (oder das *Bild* von x) und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Sprachweise:

x auf y (oder auf $f(x)$) abgebildet wird.

Man bezeichnet die Abbildung auch mit

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

oder mit

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y.$$

Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* (oder *Definitionsmenge*) von f, die Menge Y – der *Wertebereich* (oder *Zielmenge*).

Zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X' \to Y'$ heißen gleich oder identisch wenn $X = X'$, $Y = Y'$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Jetzt besprechen wir, was genau eine Zuordnung $x \mapsto y$ bedeutet. Unterhalb benutzen wir die folgenden logischen Symbolen (*Quantoren*):

$\forall$ bedeutet "für alle", "für jedes",

$\exists$ bedeutet "es existiert", "es gibt mindestens ein", "für mindestens ein",

$\exists!$ bedeutet "es gibt genau ein", "es existiert genau ein".

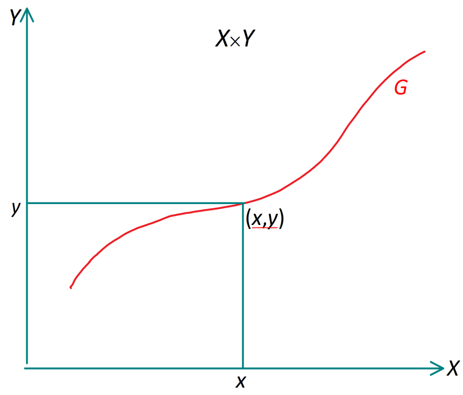
Das Zeichen $\forall$ stammt aus dem umgedrehten Buchstabe "*A*" (*A*lle) und heißt *Allquantor*. Das Zeichen $\exists$ stammt aus dem umgedrehten "*E*" (*E*xistiert) und heißt *Existenzquantor*.

Jetzt geben wir eine genaue Definition was eine Zuordnung ist.

Definition. Eine Zuordnung $x \mapsto y$ (wobei $x \in X$ und $y \in Y$) ist eine Teilmenge G von $X \times Y$ mit der folgenden Bedingung:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \text{ mit } (x, y) \in G. \tag{1.9}$$

Jede solche Teilmenge $G \subset X \times Y$ heißt ein *Graph*.



Die Eigenschaft (1.9) erlaubt jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnen, was eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

bestimmt. Eine Zuordnung ist somit ein Graph.

In Bezug auf die Funktion f können wir den Graph G wie folgt darstellen:

$$G = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}.$$

Die Menge G heißt dann *der* Graph der Abbildung f.

Jetzt können wir eine richtige Definition von Abbildung angeben.

Definition. Eine Abbildung f ist ein Tripel (X, Y, G) von dem Definitionsbereich X, Wertebereich Y und einem Graph $G \subset X \times Y$.

Beispiel. Die Abbildung $f : X \to X$ mit $f(x) = x$ heißt die *Identitätsabbildung* der Menge X. Man bezeichnet die Identitätsabbildung von X mit Id_X, so dass $\mathrm{Id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$. Der Graph von Id_X besteht aus den Paaren (x, x), die die *Diagonale* von $X \times X$ formen.

Beispiel. Betrachten wir eine beliebige Menge X und die Menge $Y = \{0, 1\}$, die aus den Symbolen $0, 1$ besteht. Sei A eine Teilmenge von X. Definition wir eine Funktion $\mathbf{1}_A : X \to Y$ mit

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

Der Graph von $\mathbf{1}_A$ besteht aus den Paaren $(x, 1)$ mit $x \in A$ und $(x, 0)$ mit $x \in A^c$. Die Funktion $\mathbf{1}_A$ heißt die *charakteristische* Funktion oder die *Indikatorfunktion* von A.

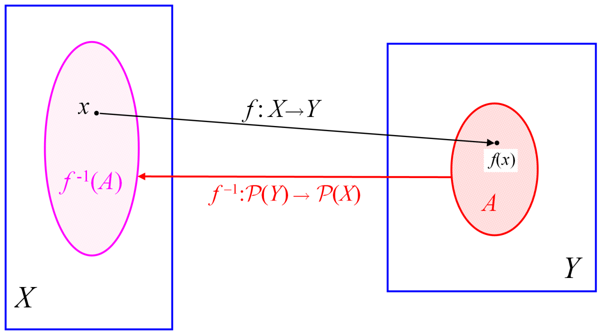
Urbild.

Jede Abbildung $f : X \to Y$ induziert eine Abbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ wie folgt. Für jede Teilmenge $A \subset Y$, definieren wir das *Urbild* $f^{-1}(A)$ von A durch

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\},$$

d.h. für jedes $x \in X$ gilt

$$x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A. \tag{1.10}$$



Nach Definition ist $f^{-1}(A)$ eine Teilmenge von X, und somit bestimmt die Zuordnung

$$A \mapsto f^{-1}(A)$$

eine Abbildung von $\mathcal{P}(Y)$ nach $\mathcal{P}(X)$. Diese Abbildung

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\to \mathcal{P}(X) \\ A &\mapsto f^{-1}(A) \end{aligned}$$

heißt die *Urbildabbildung* von f.

Satz 1.4 *Die Urbildabbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ ist mit den Mengenoperationen $\cap, \cup, \setminus$ vertauschbar:*

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Beweis. We haben nach (1.10)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \ \wedge \ f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \ \wedge \ x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

woraus die erste Identität folgt. Die anderen Identitäten werden analog bewiesen. ∎

Komposition von Abbildungen. Seien X, Y, Z beliebige Mengen.
Definition. Gegeben seien zwei Abbildungen

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z,$$

die *Komposition (Verkettung, zusammengesetzte Abbildung)* von f und g ist eine Abbildung $f \circ g$ von X nach Z die wie folgt definiert ist:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Mit anderen Worten, die Komposition ist die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} f \circ g : X &\to Z \\ x &\mapsto f\left(g\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

Schematisch kann man die Komposition so darstellen:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Beispiel. Für jede Abbildung $g : X \to Y$ ist die Komposition $\mathrm{Id}_Y \circ g$ auch eine Abbildung von X nach Y, was aus dem folgenden Diagram klar ist:

$$X \stackrel{g}{\to} Y \stackrel{\mathrm{Id}_Y}{\to} Y,$$

und es gilt

$$\mathrm{Id}_Y \circ g = g. \tag{1.11}$$

In der Tat, für jedes $x \in X$ gilt

$$\left(\mathrm{Id}_Y \circ g\right)(x) = \mathrm{Id}_Y\left(g\left(x\right)\right) = g\left(x\right),$$

woraus (1.11) folgt. Analog gilt

$$g \circ \mathrm{Id}_X = g.$$

Man muss betonen, dass die Komposition $f \circ g$ nur dann wohldefiniert ist, wenn der Wertebereich von g im Definitionsbereich for f liegt so dass $f\left(g\left(x\right)\right)$ definiert ist. Daraus folgt, dass $g \circ f$ nicht unbedingt wohldefiniert sein soll, sogar wenn $f \circ g$ wohldefiniert ist. Insbesondere kann man nicht erwarten, dass die Komposition kommutativ ist. Aber die Komposition ist immer assoziativ.

Satz 1.5 (Assoziativgesetz für Komposition) *Für je drei Abbildungen*

$$X \stackrel{h}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z \stackrel{f}{\to} U$$

gilt die Identität

$$\left(f \circ g\right) \circ h = f \circ \left(g \circ h\right).$$

Beweis. Bemerken wir zunächst, dass die beiden Verkettungen $\left(f \circ g\right) \circ h$ und $f \circ \left(g \circ h\right)$ von X nach U abbilden, wie man auf den folgenden Diagrammen sieht:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend left=50, "(f\circ g)\circ h"] \arrow[rr, bend right, "g\circ h"'] \arrow[rrr, bend right=50, "f\circ(g\circ h)"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & Z \arrow[r, "f"] & U \end{tikzcd}$$

Für jedes $x \in X$ gilt

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

und analog

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))),$$

woraus die Identität $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ folgt. ■

Das Assoziativgesetz erlaubt uns die Verkettung dreier Abbildungen zu definieren wie folgt:

$$f \circ g \circ h := (f \circ g) \circ h.$$

Schematisch sieht die Komposition $f \circ g \circ h$ so aus:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend right, "f \circ g \circ h"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "f"] & U \end{tikzcd}$$

18.10.2024 Vorlesung 4

Satz 1.6 *Gegeben seien zwei Abbildungen*

$$X \overset{g}{\to} Y \overset{f}{\to} Z.$$

Die folgende Identität gilt für die Urbildabbildungen:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}. \tag{1.12}$$

Beweis. Nach Definition haben wir das folgende Diagramm von der Urbildabbildungen f^{-1} und g^{-1}:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) & \mathcal{P}(Y) \arrow[l, "g^{-1}"'] & \mathcal{P}(Z) \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[ll, bend left, "g^{-1} \circ f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Somit ist $g^{-1} \circ f^{-1}$ wohldefiniert als eine Abbildung von $\mathcal{P}(Z)$ nach $\mathcal{P}(X)$. Es folgt aus $X \overset{f \circ g}{\longrightarrow} Z$, dass auch

$$\mathcal{P}(X) \overset{(f \circ g)^{-1}}{\longleftarrow} \mathcal{P}(Z).$$

Insbesondere können wir die Abbildungen $(f \circ g)^{-1}$ und $g^{-1} \circ f^{-1}$ vergleichen. Es gilt für jede Teilmenge $A \subset Z$

$$x \in (f \circ g)^{-1}(A) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ g(x) \in A$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad f(g(x)) \in A \\
&\Leftrightarrow \quad g(x) \in f^{-1}(A) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in g^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in g^{-1} \circ f^{-1}(A),
\end{aligned}
$$

woraus $(f \circ g)^{-1}(A) = (g^{-1} \circ f^{-1})(A)$ folgt und somit auch (1.12). ■

Inverse Abbildung. Gegeben seien zwei Abbildungen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$. Dann sind die beiden Kompositionen

$$f \circ g : Y \to Y \quad \text{und} \quad g \circ f : X \to X$$

wohldefiniert.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Definition. Eine Abbildung $g : Y \to X$ heißt die *inverse Abbildung (Umkehrabbildung, Umkehrfunktion, inverse Funktion)* von $f : X \to Y$, wenn

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Y \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_X .$$

In diesem Fall ist f auch die inverse Abbildung von g.

Die inverse Abbildung ist eindeutig bestimmt: gibt es zwei inverse Abbildungen g_1 und g_2 von f, so erhalten wir

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{Id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{Id}_X \circ g_2 = g_2.$$

Wir besprechen jetzt die Bedingungen für Existenz der inversen Abbildung.

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *bijektiv* wenn

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y, \tag{1.13}$$

d.h.

$$\forall y \in Y \ \text{ gibt es genau ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *surjektiv* wenn

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y,$$

d.h.

$$\forall y \in Y \ \text{ gibt es mindestens ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv* wenn

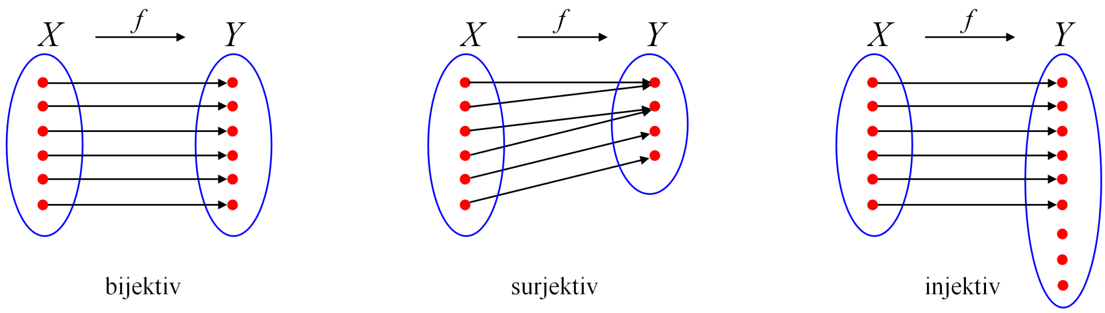
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

was äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

d.h.

$$\forall y \in Y \text{ gibt es höchstens ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$



Es folgt, dass eine Abbildung f bijektiv genau dann ist, wenn f surjektiv und injektiv ist. In der Tat, die Existenz von x in (1.13) folgt aus der Surjektivität, und die Eindeutigkeit von x – aus der Injektivität.

Satz 1.7 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ hat eine inverse Abbildung genau dann, wenn f bijektiv ist.*

Beweis. Hat f eine inverse Abbildung g, so gelten $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, d.h.

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y \tag{1.14}$$

und

$$g(f(x)) = x \ \ \forall x \in X. \tag{1.15}$$

Es folgt aus (1.14), dass $f(x) = y$ für $x = g(y)$ erfüllt ist. Somit ist f surjektiv. Zeigen wir jetzt, dass f injektiv ist. Gilt $f(x_1) = f(x_2)$, so erhalten wir aus (1.15)

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Somit ist f injektiv und auch bijektiv.

Umgekehrt, ist f bijektiv, so definieren wir die Abbildung $g : Y \to X$ wie folgt: für jedes $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, so setzen wir $g(y) = x$. Dann gelten

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$$

und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x,$$

woraus $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ folgen. Damit hat f die inverse Abbildung. ∎

Existiert die inverse Abbildung von f, so bezeichnet man sie mit f^{-1}, d.h.

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y \text{ und } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X .$$

Warnung. *Man soll die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ mit der Urbildabbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ nicht verwechseln, obwohl sie identisch bezeichnet werden.*

Bemerkung. Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann für jedes $y \in Y$ besteht das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ aus einem einzigen Element $x \in X$, d.h. $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Nach Definition der inversen Abbildung f^{-1}, we haben in diesem Fall auch $f^{-1}(y) = x$.

Satz 1.8 *Gegeben seien zwei bijektive Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$. Dann ist $f \circ g$ auch bijektiv und die folgende Identität gilt für die inversen Abbildungen*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}. \tag{1.16}$$

Beweis. Wir haben $Z \xrightarrow{f^{-1}} Y \xrightarrow{g^{-1}} X$ und

$$f \circ g : X \to Z \text{ und } g^{-1} \circ f^{-1} : Z \to X.$$

Mit Hilfe von dem Satz 1.5 (Assoziativgesetz für Komposition) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) \circ (f \circ g) &= \left(\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) \circ f\right) \circ g \\
&= \left(g^{-1} \circ \left(f^{-1} \circ f\right)\right) \circ g \\
&= \left(g^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y\right) \circ g \\
&= g^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_X
\end{aligned}$$

und analog

$$(f \circ g) \circ \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) = \mathrm{Id}_Z .$$

Somit ist $g^{-1} \circ f^{-1}$ die inverse Abbildung von $f \circ g$. Folglich ist $f \circ g$ bijektiv nach dem Satz 1.7. ∎

1.3 Axiomensystem von reellen Zahlen

Sei M eine beliebige Menge. Eine (zweistellige) *Operation* $\star$ auf M ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}
M \times M &\to M \\
(x, y) &\mapsto x \star y
\end{aligned}$$

so dass $x \star y$ ein Element von M für alle $x, y \in M$ ist. Eine *Relation* $\lhd$ auf M ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}
M \times M &\to \{w, f\} \\
(x, y) &\mapsto x \lhd y
\end{aligned}$$

so dass $x \lhd y$ zwei Werte annimmt: wahr oder falsch.

Zum Beispiel, sei $M = \mathcal{P}(X)$ für eine Grundmenge X. Dann sind der Durchschnitt $\cap$, die Vereinigung $\cup$ und die Mengendifferenz $\setminus$ die Operationen auf M, und die Inklusion $\subset$ ist eine Relation auf M.

Hier definieren wir axiomatisch die *Menge von reellen Zahlen*. In dieser Menge sind zwei Operationen definiert: Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$, sowie eine Relation Ungleichung $<$.

Definition. Eine Menge $\mathbb{R}$ heißt die Menge von reellen Zahlen und ihre Elemente heißen reelle Zahlen wenn in $\mathbb{R}$ zwei Operationen Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ und eine Relation $<$ definiert sind, die die folgenden vier Gruppen von Axiomen (insgesamt vierzehn Axiome) erfüllen.

I. Axiome der Addition.

1. (Das Nullelement) Es existiert eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$
$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2. (Das Negative) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Zahl $-x \in \mathbb{R}$ (das Negative von x), so dass
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. (Assoziativgesetz für $+$) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

4. (Kommutativgesetz für $+$) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x + y = y + x.$$

Die Zahl $x + y$ heißt die *Summe* von x, y.

Eine Menge K mit Operation $+$ die die Axiome I.1-3 erfüllt, heißt eine (additive) *Gruppe*. Wenn auch das Axiom 4 erfüllt ist, so heißt die Gruppe K kommutativ.

II. Axiome der Multiplikation.

1. (Das Einheitselement) Es existiert eine Zahl $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. (Das Inverse) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert eine Zahl $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (das Inverse von x), so dass
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. (Assoziativgesetz für $\cdot$) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

4. (Kommutativgesetz für $\cdot$) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x \cdot y = y \cdot x.$$

5. (Distributivgesetz) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Die Zahl $x \cdot y$ heißt das *Produkt* von x, y. Man schreibt auch xy anstatt $x \cdot y$.

23.10.2024 Vorlesung 5

Eine Menge K mit Operationen $+$ und $\cdot$ die alle Axiome der Gruppen I und II erfüllen, heißt *Körper*. Die Gruppen I und II von Axiomen heißen auch *Körperaxiome*. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ ein Körper. Es gibt auch andere Beispiele von Körper, die wir später besprechen.

III. Anordnungsaxiome. Die folgenden Eigenschaften gelten für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. (Vergleichbarkeit) Es gilt genau eine der folgenden Relationen: $x < y$ oder $y < x$ oder $x = y$.

2. (Transitivität)
$$x < y \ \wedge \ y < z \ \Rightarrow x < z$$

3. (Beziehung zur Addition)
$$x < y \ \Rightarrow x + z < y + z$$

4. (Beziehung zur Multiplikation)
$$0 < x \ \wedge \ 0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y.$$

Die Relation $x < y$ wird äquivalent als $y > x$ geschrieben. Eine Zahl x heißt positiv falls $x > 0$. Nach dem Axiom III.4, das Produkt zweier positiven Zahlen ist positiv.

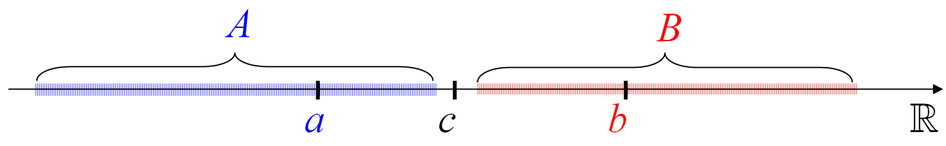
Eine Relation $<$ auf einer Menge K heißt (totale) *Ordnung* wenn sie die Anordnungsaxiome 1-2 erfüllt. In diesem Fall heißt die Menge K (total) geordnet. Die Axiome 3 und 4 etablieren die Beziehung zwischen der Ordnung und den Körperoperationen. Ein Körper K der auch die Anordnungsaxiome erfüllt, heißt *angeordneter Körper*. Somit ist $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper.

Wir definieren auch die *unechte* Ungleichung: $x \leq y$ (oder $y \geq x$) gilt genau dann, when entweder $x < y$ oder $x = y$ gilt, d.h.
$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \ \vee \ x = y.$$

IV. Vollständigkeitsaxiom. Seien A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \text{ gilt } a \leq b.$$
Dann existiert eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so dass
$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$

Man sagt, dass die Zahl c die Mengen A und B trennt (oder c zwischen A und B liegt).

Man stellt die reellen Zahlen grafisch dar als die Punkte auf einer waagerechten Gerade – Zahlenachse. Die Punkte am links sind immer kleiner als die Punkte am rechts. Das Vollständigkeitsaxiom bedeutet folgendes: liegt eine Menge A links von B, so existiert ein Punkt c zwischen A und B. Man kann es auch so vorstellen, dass die Zahlenachse *keine Lücke* enthält.



Wir werden sehen dass alle wesentlichen Ergebnisse der Analysis auf dem Vollständigkeitsaxiom.

Natürlich stellt sich die Frage, warum es eine Menge $\mathbb{R}$ gibt, die alle diese Axiome erfüllt. Mit Hilfe von Mengenlehre kann man eine Menge $\mathbb{R}$ konstruieren, die alle Axiome von reellen Zahlen erfüllt, was die Existenz von $\mathbb{R}$ beweist. Wir werden diese Konstruktion später kurz besprechen.

1.4 Folgerungen aus den Körperaxiomen

Folgerungen aus den Axiomen der Addition. Jetzt zeigen wir, wie man aus den Axiomen die üblichen algebraischen Regeln bzw die weiteren Eigenschaften von reellen Zahlen gewinnt.

[1] *Das Nullelement ist eindeutig bestimmt.*

Seien 0 und $0'$ zwei Nullelemente. Nach Definition erfüllen 0 und $0'$ die folgenden Identitäten, für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$x + 0 = 0 + x = x$$

und

$$x + 0' = 0' + x = x.$$

Einsetzen in der ersten Identität $x = 0'$ ergibt

$$0' + 0 = 0' + 0 = 0'$$

und in der zweiten Identität $x = 0$ ergibt

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0,$$

woraus $0' = 0$ offensichtlich folgt.

[2] *Das Negative von $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.*

Seien y und z zwei Negative von x. Nach Definition erfüllen y und z die folgenden Identitäten:

$$x + y = y + x = 0$$

und

$$x + z = z + x = 0.$$

Es folgt nach Axiom I.1
$$y + (x + z) = y + 0 = y$$
und nach Axiomen I.3 und I.1
$$y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z,$$
woraus $y = z$ folgt.

[3] *Es gelten*
$$-0 = 0$$
und
$$-(-x) = x,$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Da nach Axiom I.1 gilt $0 + 0 = 0$, so sehen wir, dass 0 die Definition von -0 erfüllt. Nach [2] beschließen wir, dass $-0 = 0$. Bezeichnen wir mit y das Negative von $-x$, d.h. y erfüllt
$$(-x) + y = y + (-x) = 0. \tag{1.17}$$
Da nach Definition von $-x$ gilt
$$x + (-x) = (-x) + x = 0,$$
so folgt es, dass die Identitäten (1.17) für $y = x$ erfüllt sind. Nach der Eindeutigkeit des Negatives erhalten wir, dass das Negative von $(-x)$ gleich x ist.

[4] *Für jede* $a, b \in \mathbb{R}$ *hat die Gleichung* $x + a = b$ *eine eindeutige Lösung* $x = b + (-a)$.

Die Zahl $x = b + (-a)$ erfüllt die Gleichung, weil
$$x + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b.$$
Andererseits folgt es aus der Gleichung $x + a = b$, dass
$$\begin{aligned}(x + a) + (-a) &= b + (-a)\,,\\ x + (a + (-a)) &= b + (-a)\,,\\ x &= b + (-a)\,,\end{aligned}$$
so dass $x = b + (-a)$ eine eindeutige Lösung ist.

Definition. Die Summe $b + (-a)$ wird auch mit $b - a$ bezeichnet und heißt die *Differenz* von b und a. Die Operation $(a, b) \mapsto b - a$ heißt *Subtraktion.*

Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation. Die Beweise der folgenden Eigenschaften [5] – [8] sind analog zu [1] – [4] und werden hier nicht angegeben.

[5] *Das Einheitselement* 1 *ist eindeutig bestimmt.*

[6] *Das Inverse von* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ist eindeutig bestimmt.*

[7] *Es gelten* $1^{-1} = 1$ *und* $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, *für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[8] *Für jede* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $b \in \mathbb{R}$ *hat die Gleichung* $ax = b$ *eine eindeutige Lösung* $x = a^{-1}b$ (Aufgabe 16 (c)).

Definition. Das Produkt $a^{-1}b$ heißt der *Quotient* von b und a und wird mit b/a oder $\frac{b}{a}$ bezeichnet. Die Operation $(a, b) \mapsto b/a$ heißt *Division.* Insbesondere gilt $a^{-1} = 1/a$.

Folgerungen aus dem Distributivgesetz.

[9] $x0 = 0x = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

Setzen wir $a = x0$. Da $0 + 0 = 0$, so erhalten wir aus dem Axiom II.5

$$a = x0 = x\,(0 + 0) = x0 + x0 = x0 + a.$$

Es folgt aus [4], dass

$$x0 = a + (-a) = 0.$$

[10] $xy = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; y = 0.$

Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so gilt $xy = 0$ nach [9]. Beweisen wir, dass $xy = 0$ ergibt $x = 0$ oder $y = 0$. Nehmen wir an, dass $x \neq 0$. Lösen der Gleichung $xy = 0$ bezüglich y mit Hilfe von [8] ergibt $y = x^{-1}0 = 0$, wobei wir [9] benutzt haben.

[11] $(-1)\,x = -x$

Mit Hilfe von Axiomen II.1, II.5, I.2 erhalten wir

$$x + (-1)\,x = 1x + (-1)\,x = (1 + (-1))\,x = 0x = 0,$$

wobei die letzte Identität nach [9] gilt. Somit erfüllt $(-1)\,x$ die Definition des Negatives von x, und nach [2] beschließen wir, dass $(-1)\,x = -x$.

[12] $(-1)\,(-x) = x.$

Wir haben nach [11] und [3], dass

$$(-1)\,(-x) = -\,(-x) = x.$$

[13] $-\,(x + y) = -x - y$ (Aufgabe $16\,(a)$).

[14] $x\,(-y) = -(xy)$

Nach [11] und Axiomen II.3, II.4 erhalten wir

$$x\,(-y) = x\,((-1)\,y) = (-1)\,(xy) = -\,(xy)\,.$$

[15] $(-x)\,(-y) = xy$. *Insbesondere* $(-1)\,(-1) = 1.$

Einsetzen in [14] $(-x)$ statt x ergibt

$$(-x)\,(-y) = -\,((-x)\,y) = -\,(-\,(xy)) = xy.$$

Für $x = y = 1$ erhalten wir

$$(-1)\,(-1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

[16] *Bezeichnen wir* $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ *und*

$$x^2 = xx, \quad x^3 = x^2 x = xxx.$$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

und

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

(Aufgabe 18).

Bemerkung. Obwohl wir die Zahl 2 definiert haben, es ist noch nicht klar ob 2 von 0 und 1 abweicht (bemerken wir, dass $1 \neq 0$ nach Axiom II.1 gilt). Die Körperaxiome allein implizieren die Existenz von Zahlen außer 0 und 1 nicht. Zum Beispiel, betrachten wir die Menge $K = \{0, 1\}$, die aus zwei Elementen 0 und 1 besteht, und definieren Addition und Multiplikation in K mit

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0$$

und

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Dann werden alle Axiome von Addition und Multiplikation erfüllt, so dass K ein Körper ist (Aufgabe 20). Dieser Körper with mit $\mathbb{F}_2$ bezeichnet. In $\mathbb{F}_2$ gilt offensichtlich $2 = 0$.

Dass in $\mathbb{R}$ gilt $2 \neq 0$ ist eine Folgerung von Anordnungsaxiomen unterhalb.

1.5 Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen

[17] $x < y \ \wedge \ y \leq z \ \Rightarrow \ x < z$ *und* $x \leq y \ \wedge \ y < z \ \Rightarrow \ x < z$

Ist $y < z$, so folgt die erste Aussage aus dem Axiom III.2. Ist $y = z$ so ist die Implikation trivial. Die zweite Aussage wird analog bewiesen.

25.10.2024 Vorlesung 6

[18] $x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \Rightarrow \ x \leq z$

Der Fall $x = y = z$ ist trivial. Im Fall $x < y$ oder $y < z$ folgt $x < z$ aus [17].

[19] $x \leq y \ \wedge y \leq x \ \Rightarrow \ x = y$

Nach Axiom III.1 gilt immer genau eine von drei Möglichkeiten $x < y$, $x > y$, $x = y$. Da $x < y$ im Widerspruch zu $y \leq x$ steht und $x > y$ – im Widerspruch zu $x \leq y$, so bleibt es nur die Möglichkeit $x = y$.

[20] $x \leq y \ \Rightarrow \ x + z \leq y + z$

Im Fall $x < y$ folgt aus dem Axiom III.3, dass $x + z < y + z$, im Fall $x = y$ erhalten wir $x + z = y + z$.

[21] $x \leq y \ \wedge \ a < b \ \Rightarrow \ x + a < y + b$

Mit Hilfe von [20] und Axiom III.3 erhalten wir

$$x + a \leq y + a = a + y < b + y = y + b,$$

woraus $x + a < y + b$ nach [17] folgt.

[22] $x \leq y \ \wedge \ a \leq b \ \Rightarrow x + a \leq y + b$

Im Fall $x < y$ oder $a < b$ erhalten wir aus [21], dass $x + a < y + b$, im Fall $x = y$ und $a = b$ gilt $x + a = y + b$.

Definition. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *positiv* wenn $x > 0$ und *negativ* wenn $x < 0$.

Nach dem Axiom III.1, jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist entweder positiv, oder negativ, oder Null.

[23] *Die Summe von positiven Zahlen ist positiv, die Summe von negativen Zahlen – negativ.*

Falls $x > 0$ und $y > 0$, so erhalten wir nach [21], dass $x + y > 0 + 0 = 0$. Der Fall von negativen x, y ist analog.

[24] *Die folgenden Äquivalenzen gelten:*

$$x < y \;\Leftrightarrow\; y - x > 0 \;\Leftrightarrow\; -x > -y \tag{1.18}$$

und

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; y - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -x \geq -y\ . \tag{1.19}$$

Addieren $(-x)$ zu den beiden Seiten von $x < y$ ergibt nach Axiom III.3

$$x < y \Leftrightarrow x + (-x) < y + (-x) \;\Leftrightarrow\; 0 < y - x.$$

Analog erhalten wir

$$-x > -y \Leftrightarrow (-x) + y > (-y) + y \;\Leftrightarrow\; y - x > 0$$

Der Beweis von (1.19) ist analog und erfolgt mit Hilfe von [20] .

[25] *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten*

$$x \text{ negativ} \;\Leftrightarrow -x \text{ positiv}, \tag{1.20}$$

$$x \text{ positiv} \;\Leftrightarrow -x \text{ negativ}. \tag{1.21}$$

Wir benutzen [24]. Setzen wir in (1.18) $y = 0$ und erhalten

$$x < 0 \Leftrightarrow -x > 0,$$

was äquivalent zu (1.20) ist. Setzen wir in (1.18) $x = 0$ und erhalten

$$0 < y \Leftrightarrow 0 > -y,$$

was äquivalent zu (1.21) ist.

[26] *Sind die Zahlen x und y gleichzeitig positiv oder negativ, so ist xy positiv. Ist eine Zahl von x, y positiv und andere negativ, so ist xy negativ.*

Im Fall $x, y > 0$ ergibt das Axiom III.4, dass $xy > 0$. Im Fall $x, y < 0$ erhalten wir nach [25] dass $-x$ und $-y$ positiv sind, und nach [15] und Axiom III.4

$$xy = (-x)(-y) > 0.$$

Im Fall $x > 0$ und $y < 0$, erhalten wir nach [25] dass $-y > 0$ und nach [14] und Axiom III.4 dass

$$-(xy) = x(-y) > 0,$$

woraus nach [25] folgt $xy < 0$. Der Fall $x < 0$ und $y > 0$ ist analog.

[27] *Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x^2 > 0$.*

Da $x \neq 0$, so ist x entweder positiv oder negativ (Axiom III.1), und in den beiden Fällen gilt nach [26] dass $x^2 = xx > 0$.

[28] $1 > 0$ *und* $-1 < 0$.

Nach Axiom II.1 haben wir $1 \neq 0$ und $1 = 1 \cdot 1$. Da $1 \cdot 1 > 0$ nach [27], so folgt es, dass $1 > 0$. Es folgt aus [25], dass $-1 < 0$.

Definieren wir die weiteren Zahlen $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ usw. Es folgt aus $1 > 0$ mit Hilfe von Axiom III.3, dass $2 > 1$, $3 > 2$, $4 > 3$, d.h.

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < ... \, . \tag{1.22}$$

[29] *Ist $x > 0$, so ist $x^{-1} > 0$. Ist $x < 0$ so ist $x^{-1} < 0$.*

Da $xx^{-1} = 1 > 0$, so gilt $x^{-1} \neq 0$ nach [9]. Nach [26] sind die beiden Zahlen x und x^{-1} gleichzeitig positiv oder negativ, was zu beweisen war.

[30] *Sei $x < y$. Für alle $a > 0$ gilt $ax < ay$, und für alle $a < 0$ gilt $ax > ay$.*

Die Bedingung $x < y$ ergibt nach [24] dass $y - x > 0$. Falls $a > 0$, so erhalten wir nach Axiomen II.5 und III.4

$$ay - ax = a\,(y - x) > 0,$$

woraus $ax < ay$ folgt. Im Fall $a < 0$ erhalten wir $(-a) > 0$ und somit

$$-\,(ax) = (-a)\,x < (-a)\,y = -\,(ay)\,,$$

woraus folgt $-\,(ax) < -\,(ay)$ und nach [24] auch $ax > ay$.

[31] *Falls $0 < x < y$ und $0 < a < b$, so gilt $ax < by$.*

Mit Hilfe von [30] erhalten wir

$$ax < ay = ya < yb = by,$$

woraus $ax < by$ folgt.

[32] *Falls $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq a \leq b$ so gilt $ax \leq by$ (*Aufgabe 18*).*

[33] *Für alle $x > y > 0$ gilt $0 < x^{-1} < y^{-1}$.*

Da x^{-1} positiv nach [29] ist, ergibt die Multiplikation der Ungleichung $y < x$ mit x^{-1} nach [30] dass

$$x^{-1}y < x^{-1}x = 1.$$

Als nächstes multiplizieren wir mit diese Ungleichung mit y^{-1} und erhalten

$$\left(x^{-1}y\right)y^{-1} < 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}. \tag{1.23}$$

Es bleibt zu bemerken dass

$$\left(x^{-1}y\right)y^{-1} = x^{-1}\left(yy^{-1}\right) = x^{-1}1 = x^{-1}$$

was $x^{-1} < y^{-1}$ ergibt.

Insbesondere erhalten wir aus (1.22) und [33], dass

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > ... > 0.$$

Definition. Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den *Betrag* von x wie folgt:

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

Nach Definition gilt es $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Betrag erfüllt die folgenden Eigenschaften (Aufgabe 19):

- $|xy| = |x|\,|y|$ (Multiplikativität). Insbesondere gilt $x^2 = |x|^2$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (die Dreiecksungleichung).

1.6 Teilmengen von $\mathbb{R}$

Intervalle

Für je zwei reelle Zahlen a, b mit $a \leq b$ definieren wir die folgenden *Intervalle*:

$$\begin{array}{ll} (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{– offenes Intervall,} \\ [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{– abgeschlossenes Intervall,} \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{– halboffenes (linksoffenes) Intervall,} \\ [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \text{– halboffenes (rechtsoffenes) Intervall.} \end{array} \tag{1.24}$$

Die Zahlen a, b heißen die *Grenzen* des Intervalls.

Satz 1.9 *Jedes Intervall mit den Grenzen $a < b$ ist nichtleer.*

Beweis. Es reicht zu beweisen, dass (a, b) nichtleer ist. Das Intervall $(0, 1)$ ist nicht leer, da $0 < \frac{1}{2} < 1$ und somit $\frac{1}{2} \in (0, 1)$. Für beliebige $a < b$ zeigen wir, dass die Zahl

$$c := \frac{1}{2}(a + b)$$

in (a, b) liegt, was insbesondere ergibt, dass (a, b) nichtleer ist (die Zahl c heißt *Mittelpunkt* von (a, b)). Es folgt aus $a < b$, dass

$$a + b < b + b = 1b + 1b = (1 + 1)\, b = 2b,$$

woraus folgt

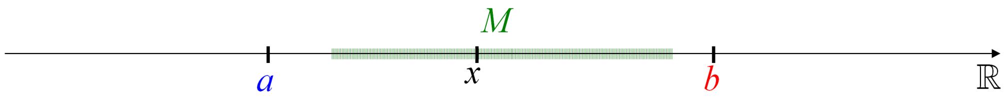
$$c = \frac{1}{2}(a + b) < \frac{1}{2}(2b) = b,$$

d.h. $c < b$. Analog beweist man dass $c > a$ und somit $c \in (a, b)$, was zu beweisen war. ■

Infimum und Supremum

Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *untere Schranke* von M wenn gilt $x \geq a$ für alle $x \in M$. Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke* von M wenn gilt $x \leq b$ für alle $x \in M$.



a ist eine untere Schranke von M und b ist eine obere Schranke von M

Beispiel. Für jedes Intervall I mit den Grenzen $a < b$ ist a immer eine untere Schranke und b – eine obere Schranke. Jede Zahl $a' < a$ ist auch eine untere Schranke von I, und jede Zahl $b' > b$ – eine obere Schranke von I.

Definition. Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt das *Minimum* von M (oder das *minimale Element* von M) und wird mit $\min M$ bezeichnet, wenn a das kleinste Element von M ist, d.h. $a \in M$ und $x \geq a$ für alle $x \in M$. Mit anderen Worten, $\min M$ ist eine untere Schranke von M die in M liegt.

Wenn das Minimum von M existiert, so ist es eindeutig bestimmt: sind a und a' zwei Minima von M, so gelten die beiden Ungleichung $a \leq a'$ und $a' \leq a$ woraus $a = a'$ folgt.

Definition. Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt das *Maximum* von M (oder das *maximale Element* von M) und wird mit $\max M$ bezeichnet, wenn b das größte Element von M ist, d.h. $b \in M$ und $x \leq b$ für alle $x \in M$. Mit anderen Worten, $\max M$ ist eine obere Schranke von M die in M liegt.

Wenn das Maximum von M existiert, so ist es eindeutig bestimmt

Beispiel. Sei $a < b$. Das abgeschlossene Intervall $I = [a, b]$ hat offensichtlich $\min I = a$ und $\max I = b$.

Zeigen wir, dass das offene Intervall $I = (a, b)$ weder ein Maximum noch ein Minimum hat. Existiert $\max I =: c$, so gilt $c \in (a, b)$, insbesondere $c < b$. Das Intervall (c, b) nichtleer ist, sei $x \in (c, b)$. Dann gilt $x \in I$ und $x > c$ so dass c kein Maximum von I ist.

Analog beweist man, dass (a, b) kein Minimum hat.

Das rechtsoffene Intervall $I = [a, b)$ hat $\min I = a$ und kein Maximum, und das linksoffene Intervall $I = (a, b]$ hat $\max I = b$ und kein Minimum.

30.10.2024 Vorlesung 7

Beispiel. Für die Menge $M = \{a, b\}$ aus zwei reelle Zahlen a, b gilt

$$\max\{a,b\} = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

und

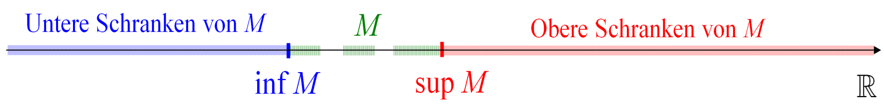
$$\min\{a,b\} = \begin{cases} b, & \text{falls } a \geq b \\ a, & \text{falls } a < b \end{cases}.$$

Man kann zeigen, dass

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{und} \quad \max\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Weitere interessante Eigenschaften von $\max\{a, b\}$ und $\min\{a, b\}$ werden in Aufgabe 25 angegeben.

Definition. Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt das *Infimum* von M (oder *untere Grenze*) und wird mit $\inf M$ bezeichnet wenn a die größte untere Schranke von M ist. Eine Zahl b heißt das *Supremum* von M (oder *obere Grenze*) und wird mit $\sup M$ bezeichnet wenn b die kleinste obere Schranke von M ist.



Es ist klar aus den obigen Definitionen, dass

$$\forall x \in M \qquad \inf M \leq x \leq \sup M,$$

vorausgesetzt, dass $\sup M$ und $\inf M$ existieren.

Beispiel. Nehmen wir an dass die Menge M das Minimum $a = \min M$ besitzt. Dann gilt auch $\inf M = a$ da a eine untere Schranke ist und für beliebige andere untere Schranke x von M die Ungleichung $x \leq a$ gilt (da $a \in M$); d.h. a ist die größte untere Schranke. Analog gilt $\sup M = \max M$ wenn $\max M$ existiert.

Andererseits, Supremum und Infimum können existiert auch wenn es kein Maximum oder Minimum gibt. Die Begriffe von Supremum und Infimum ersetzen gewissermaßen die Begriffe von Maximum und Minimum when letztere nicht existieren.

Satz 1.10 *Sei I ein Intervall mit den Grenzen $a < b$. Dann gilt*

$$\inf I = a \quad \textit{und} \quad \sup I = b.$$

Beweis. Beweisen wir, dass $\inf I = a$. Nach definition von I ist a eine untere Schranke von I. Zeigen wir, dass a die größte untere Schranke ist, d.h. für jede andere untere Schranke a' von I gilt $a' \leq a$. Nehmen wir im Gegenteil an dass es eine untere Schranke a' von I mit $a' > a$ gibt.

Sei zuerst $a' \leq b$. Nach dem Satz 1.9 gibt es ein $c \in (a, a')$, woraus folgt dass auch $a < c < b$, insbesondere $c \in I$. Zusammen mit $c < a'$ führt dies zum Widerspruch, da nach Voraussetzung a' eine untere Schranke von I ist und somit gilt $a' \leq c$.

Sei jetzt $a' > b$. Dann wählen wir ein $c \in (a, b)$ .Es gilt $c \in I$ und $c < a'$ was wieder den Widerspruch ergibt. Somit beschließen wir dass a die größte untere Schranke von I ist, was zu beweisen war.

Die Identität $\sup I = b$ wird analog bewiesen. ■

1.7 Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom

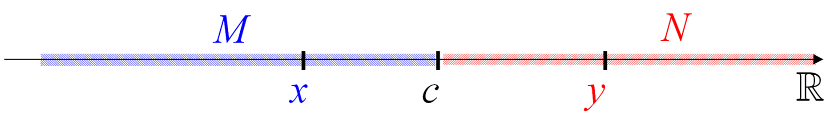
Existenz von inf und sup

Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt* wenn M eine untere Schranke hat. Die Menge M heißt *nach oben beschränkt* wenn M eine obere Schranke hat. Die Menge M heißt *beschränkt* wenn M nach unten *und* nach oben beschränkt ist.

Satz 1.11 *Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist M nach unten beschränkt, so hat M das Infimum. Ist M nach oben beschränkt, so hat M das Supremum. Ist M beschränkt, so hat M das Infimum und das Supremum.*

Beweis. Sie M nach oben beschränkt. Bezeichnen wir mit N die Menge von oberen Schranken von M die somit nichtleer ist. Für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt nach Definition $x \leq y$. Das Vollständigkeitsaxiom ergibt: es existiert eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, die M und N trennt, d.h.

$$\forall x \in M \quad \forall y \in N \quad \text{gilt} \quad x \leq c \leq y.$$



Da $x \leq c$ für alle $x \in M$, so ist c eine obere Schranke von M und deshalb $c \in N$. Da $c \leq y$ für alle $y \in N$, so ist c das *kleinste* Element von N. Nach Definition erhalten wir $\sup M = c$ so dass $\sup M$ existiert.

Die Existenz des Infimums von den nach unten beschränkten Teilmengen wird analog bewiesen. ■

Quadratwurzel

Satz 1.12 *Für jede nichtnegative Zahl* $a \geq 0$ *existiert genau eine nichtnegative Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x^2 = a$.

Definition. Die eindeutige nichtnegative Zahl x mit $x^2 = a$ heißt die *Quadratwurzel* aus a und wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

Beweis. Für $a = 0$ ist die Behauptung trivial: für $x = 0$ gilt $x^2 = 0$ und für $x > 0$ haben wir $x^2 > 0$ und somit $x^2 \neq 0$. Somit $\sqrt{0} = 0$.

Sei $a > 0$. Jede nichtnegative Lösung x von $x^2 = a$ muss positiv sein (sonst $x^2 = 0$). Die Eindeutigkeit der Lösung x folgt aus der Implikation

$$x^2 = y^2 \Rightarrow x = y, \tag{1.25}$$

für positive $x, y \in \mathbb{R}$ da $x < y$ impliziert $x^2 < y^2$ und $x > y$ impliziert $x^2 > y^2$. Der alternative Beweis von (1.25): es folgt aus $x^2 = y^2$ dass

$$0 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

was $x - y = 0$ ergibt da $x + y > 0$.

Beweisen wir jetzt die Existenz der Lösung von $x^2 = a$. Dafür betrachten wir zwei Mengen

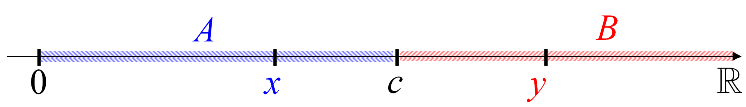
$$A = \left\{x \geq 0 : x^2 < a\right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{y \geq 0 : y^2 > a\right\}.$$

Die Menge A ist nichtleer da $0 \in A$. Die Menge B ist nichtleer da $a + 1 \in B$:

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 > a.$$

Für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt $x^2 < y^2$ woraus folgt $x < y$, da im Fall $x \geq y$ gilt $x^2 \geq y^2$. Somit erfüllen die Mengen A und B die Voraussetzungen des Vollständigkeitsaxioms. Wir beschließen, dass es eine Zahl c zwischen A und B gibt, d.h.

$$x \leq c \leq y \quad \text{für alle } x \in A \text{ und } y \in B.$$



Insbesondere ist c eine obere Schranke von A und eine untere Schranke von B. Wir beweisen, dass $c^2 = a$ d.h. c die Quadratwurzel aus a ist. Dafür zeigen wir dass $c \notin A$ und $c \notin B$, woraus folgt dass $c^2 \geq a$ und $c^2 \leq a$ so dass $c^2 = a$ und somit $c = \sqrt{a}$.

Warum $c \notin A$? Nehmen wir an, dass $c \in A$, d.h. $c^2 < a$. Zeigen wir, dass es eine Zahl $c' > c$ gibt mit

$$(c')^2 < a.$$

Daraus wird folgen dass $c' \in A$ was im Widerspruch zur Bedingung steht, dass c eine obere Schranke von A ist.

Wir finden c' in der Form $c' = c + \varepsilon$, wobei ε die folgenden zwei Bedingungen erfüllen muss:

$$0 < \varepsilon < 1 \tag{1.26}$$

und

$$(c+\varepsilon)^2 < a. \tag{1.27}$$

Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ haben wir

$$(c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + 2c\varepsilon + 1\varepsilon = c^2 + (2c+1)\,\varepsilon.$$

Es reicht ε so zu wählen dass

$$c^2 + (2c+1)\,\varepsilon < a$$

was äquivalent zu

$$\varepsilon < \frac{a-c^2}{2c+1} =: d. \tag{1.28}$$

Da $d > 0$, so gibt es nach dem Satz 1.9 eine positive Zahl $\varepsilon < \min(1,d)$ die somit (1.26) und (1.28) erfüllt, woraus (1.27) folgt.

Warum $c \notin B$? Nehmen wir an, dass $c \in B$ d.h. $c^2 > a$. Zeigen wir, dass es eine positive Zahl $c' < c$ gibt mit $(c')^2 > a$. Dann liegt c' auch in B, was im Widerspruch zur Bedingung steht, dass c eine untere Schranke von B ist.

Wir finden c' in der Form $c' = c - \varepsilon$, wobei ε die folgenden zwei Bedingungen erfüllen muss:

$$0 < \varepsilon < c \tag{1.29}$$

und

$$(c-\varepsilon)^2 > a. \tag{1.30}$$

Für jedes $\varepsilon \in (0,c)$ haben wir

$$(c-\varepsilon)^2 = c^2 - 2c\varepsilon + \varepsilon^2 > c^2 - 2c\varepsilon.$$

Es reicht ε so zu wählen, dass

$$c^2 - 2c\varepsilon > a,$$

was äquivalent zu

$$\varepsilon < \frac{c^2-a}{2c} =: d. \tag{1.31}$$

Da $d > 0$, so gibt es nach dem Satz 1.9 eine positive Zahl $\varepsilon < \min(c,d)$ die somit (1.29) und (1.31) erfüllt, woraus (1.30) folgt.

Somit ist die Existenz von der Quadratwurzel bewiesen. ∎

Erwähnen wir die folgenden Eigenschaften von Quadratwurzel (siehe Aufgabe 27).

1. Für alle $0 \le a \le b$ gilt $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$.
2. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. Für alle $a, b \ge 0$ gilt $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ und für $b > 0$ gilt $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
4. Für jedes $a > 0$ hat die Gleichung $x^2 = a$ genau zwei reellen Lösungen: $x = \sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$.

1.8 Die Zeichen $+\infty$ und $-\infty$

Nach Satz 1.11 existiert $\sup M$ bzw $\inf M$ für jede nach oben bzw nach unten beschränkte nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$. Es gibt jedoch Mengen die keine reellen oberen bzw unteren Schranken haben. Zum Beispiel, für $M = \mathbb{R}$ gibt es keine obere Schranke, da für jede Zahl $b \in \mathbb{R}$ immer eine größere Zahl $b + 1 \in \mathbb{R}$ existiert. Ebenso hat $M = \mathbb{R}$ keine untere Schranke. Deshalb $\sup \mathbb{R}$ und $\inf \mathbb{R}$ existieren nicht (als reelle Zahlen).

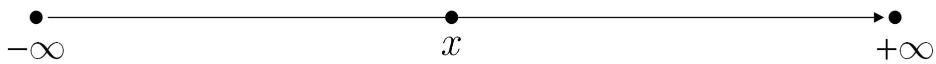
Um die Existenz von $\sup M$ und $\inf M$ für alle Teilmengen $M \in \mathbb{R}$ zu sichern, erweitern wir die Menge $\mathbb{R}$ indem wir zu $\mathbb{R}$ zwei *unendliche Elemente* hinzufügen.

Definition. Die *erweiterte Menge* $\overline{\mathbb{R}}$ von reellen Zahlen ist die geordnete Menge

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

wobei $+\infty$ und $-\infty$ neue Elemente sind, und die Ungleichung $<$ wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt erweitert: für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt immer

$$-\infty < x < +\infty.$$



Die Elemente $+\infty$ und $-\infty$ heißen Unendlichkeiten oder unendliche Elemente.

06.11.2024 Vorlesung 8

Die Definition (1.24) von Intervallen gilt auch wenn die Grenzen a, b des Intervalls die Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ sind da diese Definition nur den Begriff von Ungleichung braucht. Zum Beispiel, für $a \in \mathbb{R}$, haben wir

$$\begin{aligned}
[a, +\infty) &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \le x < +\infty\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\} \\
(a, +\infty) &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < +\infty\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
[a, +\infty] &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \le x \le +\infty\right\} = [a, +\infty) \cup \{+\infty\} \\
(-\infty, a] &= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty < x \le a\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}.
\end{aligned}$$

Auch gelten $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ und $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

Die Begriffe von oberen bzw unteren Schranken und somit sup und inf definiert man für nichtleere Teilmengen M von $\overline{\mathbb{R}}$ genau so, wie für Teilmengen von $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $+\infty$ immer eine obere Schranke von M und $-\infty$ ist eine untere Schranke von M. Satz 1.10 gilt auch in diesem Fall: für das Intervall I mit den Grenzen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, gilt

$$\inf I = a \quad \text{und} \quad \sup I = b.$$

Für die leere Menge $M = \emptyset$ nehmen wir folgendes nach Definition an[1]:

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Satz 1.11 lässt sich wie folgt verallgemeinern.

[1] Die Motivation dafür ist wir folgt. Für die leere Menge sind alle Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ die obere und untere Schranken. Deshalb ist $-\infty$ die kleinste obere Schranke und $+\infty$ die größte untere Schranke.

Satz 1.13 *Für jede Teilmenge M von $\overline{\mathbb{R}}$ existieren* $\sup M$ *und* $\inf M$ (*als Elemente von* $\overline{\mathbb{R}}$).

Beweis. Sei M nichtleer. Ist $+\infty \in M$, so gilt $\sup M = +\infty$. Besteht M aus einem Element $-\infty$, so gilt $\sup M = -\infty$. Sonst ist die Menge $M' = M \setminus \{-\infty\}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist M' nach oben beschränkt, so existiert $\sup M'$ nach dem Satz 1.11, und dann gilt $\sup M = \sup M'$. Ist M' nach oben unbeschränkt, so ist $+\infty$ die einzige obere Schranke von M', woraus folgt $\sup M = \sup M' = +\infty$. Analog beweist man die Existenz von $\inf M$. $\blacksquare$

Chapter 2

Ganze Zahlen und vollständige Induktion

2.1 Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

In diesem Abschnitt definieren wir die Menge $\mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen. Man erwartet, dass $\mathbb{N}$ aus den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$ usw. besteht. Wir werden unterhalb die genaue Bedeutung von "usw" etablieren.

Definition. Eine Menge $S \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv* wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt

- $1 \in S$
- $x \in S$ ergibt $x + 1 \in S$ (die Zahl $x + 1$ heißt *Nachfolger* von x).

Zum Beispiel:

- $\mathbb{R}$ ist induktiv;
- $[1, \infty)$ ist induktiv;
- $[0, 2]$ ist nicht induktiv.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$ das *Mengensystem* (die Menge) von allen induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$. Das Mengensystem $\mathcal{F}$ ist nicht leer da $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$.

Definition. Die Menge $\mathbb{N}$ ist der Durchschnitt von allen induktiven Mengen, d.h.

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in S \quad \forall S \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Schreibweise für den Durchschnitt:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S. \tag{2.2}$$

Die Elemente von $\mathbb{N}$ heißen *natürliche Zahlen.*

Satz 2.1 *Die Menge* $\mathbb{N}$ *ist induktiv, d.h.* $1 \in \mathbb{N}$ *und* $x \in \mathbb{N}$ *ergibt* $x+1 \in \mathbb{N}$. *Darüber hinaus ist die Menge* $\mathbb{N}$ *die kleinste (im Sinn von Inklusion) induktive Menge.*

Beweis. Da $1 \in S$ für jedes $S \in \mathcal{F}$, so gilt nach (2.1) dass $1 \in \mathbb{N}$. Jetzt beweisen wir, dass $x \in \mathbb{N}$ ergibt $x+1 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{N} &\Rightarrow x \in S \qquad && \forall S \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow x+1 \in S && \forall S \in \mathcal{F} \\ &\Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Somit erfüllt $\mathbb{N}$ die Definition von induktiven Mengen, und somit $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$.

Die Menge $\mathbb{N}$ ist die *kleinste* induktive Menge da die Inklusion $\mathbb{N} \subset S$ nach (2.2) für jedes $S \in \mathcal{F}$ gilt. ∎

Beispiel. Das Intervall $[1, +\infty)$ ist offensichtlich induktiv. Es folgt aus (2.2), dass $\mathbb{N} \subset [1, +\infty)$. Insbesondere ist 1 die kleinste natürliche Zahl, d.h. $1 = \min \mathbb{N}$. Da $1 \in \mathbb{N}$, daraus folgt auch $2 = 1 + 1 \in \mathbb{N}$, $3 = 2 + 1 \in \mathbb{N}$, usw.

Um die Eigenschaften von natürlichen Zahlen beweisen zu können, brauchen wir das folgende *Induktionsprinzip*.

Satz 2.2 (Induktionsprinzip) *Sei* $A(n)$ *eine von* $n \in \mathbb{N}$ *abhängige Aussage, d.h.*

$$A : \mathbb{N} \to \{wahr, falsch\}.$$

Nehmen wir an dass A *die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:*

(*i*) $A(1)$ *ist wahr;*

(*ii*) *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann ist $A(n)$ *wahr für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Bezeichnen wir mit S die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die $A(n)$ wahr ist. Nach dem Induktionsanfang gilt $1 \in S$, und nach dem Induktionsschritt gilt

$$n \in S \Rightarrow n+1 \in S.$$

Somit S ist induktiv, und wir erhalten $\mathbb{N} \subset S$. Folglich ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Die Beweismethode, die das Induktionsprinzip benutzt, heißt die *vollständige Induktion*. Nach dem Satz 2.2, um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, muss man die folgenden zwei Behauptungen beweisen:

(*i*) Induktionsanfang (IA): die Aussage $A(n)$ gilt für $n = 1$;

(*ii*) Induktionsschritt (IS): $\underbrace{\text{die Gültigkeit von } A(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}}$ impliziert $\underbrace{\text{die Gültigkeit von } A(n+1)}_{\text{Induktionsbehauptung}}$.

Im Induktionsschritt nennt man $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $A(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*.

Intuitiv bedeutet diese Beweismethode folgendes: aus der Gültigkeit der Aussage für $n=1$ folgt die Gültigkeit für $n=2$, daraus folgt die Gültigkeit für $n=3$ usw. Die genaue Bedeutung von "usw" ist der Induktionsschritt.

Der folgenden Eigenschaften von natürliche Zahlen werden mit Hilfe von der vollständigen Induktion bewiesen.

Satz 2.3 *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) $n+m \in \mathbb{N}$

(b) $nm \in \mathbb{N}$.

Beweis. (a) Fixieren wir ein $m \in \mathbb{N}$ und beweisen per Induktion nach n, dass $n+m \in \mathbb{N}$. Dafür bezeichnen wir mit $A(n)$ die Aussage, dass $n+m \in \mathbb{N}$.

(i) Induktionsanfang $A(1)$.

Aussage $A(1)$ bedeutet, dass $1+m \in \mathbb{N}$, und das ist wahr, weil die Menge $\mathbb{N}$ nach dem Satz 2.1 induktiv ist.

(ii) Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Die Induktionsvoraussetzung $A(n)$ ist: $n+m \in \mathbb{N}$.

Die Induktionsbehauptung $A(n+1)$ ist: $(n+1)+m \in \mathbb{N}$.

Angenommen, dass $A(n)$ wahr ist, d.h. $n+m \in \mathbb{N}$, so erhalten wir $(n+m)+1 \in \mathbb{N}$, woraus folgt

$$(n+1)+m = (n+m)+1 \in \mathbb{N}.$$

Somit ist die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ bewiesen. Nach dem Induktionsprinzip beschließen wir, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. $n+m \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was zu beweisen war.

(b) Fixieren wir ein $m \in \mathbb{N}$ und beweisen per Induktion nach n, dass $nm \in \mathbb{N}$.

(i) Induktionsanfang. Für $n=1$ gilt $nm = 1 \cdot m = m \in \mathbb{N}$.

(ii) Induktionsschritt von n nach $n+1$.

Angenommen dass $nm \in \mathbb{N}$, so erhalten wir nach (a)

$$(n+1)m = nm + m \in \mathbb{N},$$

da $m \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung und $nm \in \mathbb{N}$ nach der Induktionsvoraussetzung gilt. ■

Satz 2.4 *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir benutzen hier Doppelinduktion: nach m und nach n.

Beweisen wir per Induktion nach m die Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > m \text{ gilt } n - m \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Induktionsanfang für $m = 1$ bedeutet dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 1 \text{ gilt } n - 1 \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Um den Fall $n = 1$ auch einzuschließen, beweisen wir eine allgemeinere Aussage: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n - 1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \tag{2.5}$$

woraus (2.4) folgen wird da im Fall $n > 1$ gilt $n - 1 \neq 0$ und somit $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Die Aussage (2.5) wird per Induktion nach n bewiesen.

(i) Induktionsanfang. Für $n = 1$ gilt $n - 1 = 0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(ii) Induktionsschritt von n nach $n + 1$. Es gilt

$$(n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}$$

und somit auch $(n + 1) - 1 \in N \cup \{0\}$.

Nach dem Induktionsprinzip gilt (2.5) für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit haben wir auch den Induktionsanfang für $m = 1$ abgeschlossen.

08.11.2024 Vorlesung 9

Führen wir jetzt den Induktionsschritt von m nach $m + 1$ durch. Angenommen, dass (2.3) für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, wir müssen beweisen, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > m + 1 \text{ gilt } n - (m + 1) \in \mathbb{N}.$$

Bemerken wir, dass

$$n - (m + 1) = n + (-1)\,(m + 1) = n + (-m) + (-1) = (n - m) - 1.$$

Da $n > m$, so erhalten with nach der Induktionsvoraussetzung, dass $n - m \in \mathbb{N}$. Da $n > m + 1$, so gilt $n - m > 1$ und somit nach (2.4) dass $(n - m) - 1 \in \mathbb{N}$, woraus folgt $n - (m + 1) \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

2.2 Summe und Produkt endlicher Folgen

In diesem Abschnitt benutzen wir das Induktionsprinzip um rigorose Definitionen von Begriffen von Summe und Produkt von mehreren reellen Zahlen anzugeben.

Für jede natürliche Zahl n betrachten wir die Menge

$$\mathcal{E}_n = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\} = [1, n] \cap \mathbb{N}$$

von natürlichen Zahlen zwischen 1 und n. Die Menge $\mathcal{E}_n$ wird häufig auch mit $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Man sagt dass $\mathcal{E}_n$ eine *endliche Menge von n Elementen* ist.

Definition. Eine *endliche Folge* von n Elementen ist eine Abbildung $a : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}$. Man bezeichnet den Wert $a(k)$ auch mit a_k.

Andere Schreibweisen für die Folge a: $\{a_k\}_{k=1}^n$ oder $\{a_k\}$ oder $\{a_1, ..., a_n\}$. Alle Zahlen a_k heißen die *Glieder* oder die *Elemente* der Folge a.

Definition. Definieren wir die Summe $\sum_{k=1}^n a_k$ einer Folge $\{a_k\}$ per Induction nach n wie folgt:

(i) Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \ ;$$

(ii) Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \ . \tag{2.6}$$

Nach dem Induktionsprinzip ist die Summe $\sum_{k=1}^n a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Das Zeichen $\sum$ ist ein griechischer Grossbuchstabe namens “sigma” (was sich auf den Buchstaben “S” von “Summe” bezieht). Das Zeichen k heißt der *Index der Summierung*.

Man schreibt auch

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Zum Beispiel,

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2, \qquad \sum_{k=1}^{3} a_k = (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \text{usw.}$$

Noch ein Beispiel: sind alle a_k gleich a, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na,$$

was man leicht per Induktion nach n beweist.

Beispiel. Beweisen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.7}$$

Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Angenommen, dass (2.7) für ein n gilt, beweisen wir die Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nach (2.6) gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

was zu beweisen war.

Weitere ähnliche Identitäten befinden sich in Aufgabe 35.

Die folgenden allgemeinen Eigenschaften der Summe $\sum$ lassen sich per Induktion beweisen:

$$c\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(ca_k)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{m} b_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}(a_kb_l)\right) = \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_l)\right)$$

(siehe Aufgabe 37).

Definition. Definieren wir das Produkt $\prod_{k=1}^{n} a_k$ einer Folge $\{a_k\}$ per Induktion nach n wie folgt:

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1 \tag{2.8}$$

und

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) a_{n+1} \ . \tag{2.9}$$

Das Zeichen $\prod$ ist ein griechischer Grossbuchstabe namens "pi" (was sich auf den Buchstaben "P" von "Produkt" bezieht). Man schreibt auch

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1a_2...a_n.$$

Zum Beispiel, definieren wir $n!$ (n mit dem Ausrufezeichen, Sprachweise: n *Fakultät* oder n *Faktorielle*) wie folgt: für $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n,$$

und $0! = 1$. Insbesondere gilt $1! = 1$ und $(n+1)! = n!\,(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Betrachten wir die Folge $\{a_k\}_{k=1}^n$ mit $a_k = a \in \mathbb{R}$ für alle k und definieren die *Potenzen* von a mit

$$a^n = \prod_{k=1}^n a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt aus (2.8) und (2.9) dass

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^{n+1} = a^n a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Im Ausdruck a^n heißt die Zahl a die *Basis* und n –der *Exponent*. Man beweist per Induktion die folgenden Identitäten:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \tag{2.11}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 33).

Beispiel. Beweisen wir die letzte Identität in (2.11) per Induktion nach n. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$(ab)^1 = ab = a^1 b^1.$$

Induktionsschritt von n nach $n + 1$:

$$\begin{aligned}(ab)^{n+1} &= (ab)^n (ab) = (a^n b^n)(ab) \\ &= (a^n a)(b^n b) = a^{n+1} b^{n+1}.\end{aligned}$$

Beispiel. Beweisen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2, \tag{2.12}$$

d.h.

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2.$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die linke Seite von (2.12) gleich

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 = 2,$$

und die rechte Seite gleich

$$2^{1+1} - 2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2,$$

so dass (2.12) gilt.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$. Angenommen, dass (2.12) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^n 2^k + 2^{n+1} &= \left(2^{n+1} - 2\right) + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{(n+1)+1} - 2,\end{aligned}$$

d.h. (2.12) auch für $n + 1$ anstatt n gilt. Nach dem Induktionsprinzip beschließen wir, dass (2.12) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2.3 Ganze Zahlen

Definition. Die Menge $\mathbb{Z}$ von *ganzen Zahlen* wird wie folgt definiert:

$$\mathbb{Z} := \{0\} \cup \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}),$$

wobei $-\mathbb{N} := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge von den Negativen von natürlichen Zahlen ist. Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen *ganze Zahlen.*

Es folgt, dass

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{Z} \text{ und } x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}.$$

Viele Eigenschaften von den natürlichen Zahlen lassen sich auf ganze Zahlen verallgemeinern.

Operationen in $\mathbb{Z}$

Satz 2.5 *Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ sind $x + y$, $x - y$, xy auch in $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Da $x - y = x + (-y)$ und $(-y) \in \mathbb{Z}$, es reicht zu beweisen, dass xy und $x + y$ ganze Zahlen sind. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist die Aussage trivial. Sonst gibt es natürliche Zahlen n, m mit $x = \pm n$ und $y = \pm m$.

Betrachten wir, zum Beispiel, den Fall $x = n$ und $y = -m$. Dann $nm \in \mathbb{N}$ und $xy = n(-m) = -nm \in \mathbb{Z}$. Beweisen wir jetzt, dass $x + y = n - m$ ist eine ganze Zahl. Ist $n = m$ dann $n - m = 0 \in \mathbb{Z}$. Ist $n > m$ dann $n - m \in \mathbb{N}$ nach Satz 2.4. Ist $n < m$, dann $m - n \in \mathbb{N}$ und $n - m = -(m - n) \in \mathbb{Z}$.

Die anderen Fälle von Vorzeichen von x und y werden analog betrachtet. ■

Korollar 2.6 *Für $x, y \in \mathbb{Z}$ ist die Bedingung $x > y$ äquivalent zu $x \geq y + 1$. Folglich, für jedes $n \in \mathbb{Z}$ enthält das Intervall $(n, n+1)$ keine ganze Zahl.*

Beweis. Sei $x > y$. Dann $x - y > 0$ und nach dem Satz 2.5 gilt $x - y \in \mathbb{Z}$, woraus folgt $x - y \in \mathbb{N}$. Da 1 die kleinste natürliche Zahl ist, so erhalten wir $x - y \geq 1$ und somit $x \geq y + 1$. Die Implikation in der Rückrichtung ist trivial: $x \geq y + 1$ und $y + 1 > y$ ergeben $x > y$.

Ist x eine ganze Zahl in $(n, n+1)$, so gilt $x > n$ und somit $x \geq n + 1$, was im Widerspruch zu $x < n + 1$ steht. ■

Teilmengen von $\mathbb{Z}$

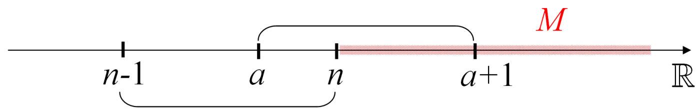
Satz 2.7 *Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Ist M nach oben beschränkt, so existiert* $\max M$. *Ist M nach unten beschränkt, so existiert* $\min M$. *Insbesondere existiert* $\min M$ *für jede nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{N}$.

Beweis. Sei M nach unten beschränkt. Nach dem Satz 1.11 existiert $a = \inf M \in \mathbb{R}$. Beweisen wir, dass $a \in M$, woraus die Identität $a = \min M$ folgen wird. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $a \notin M$. Da $a + 1$ keine untere Schranke von M ist, so existiert ein

$n \in M$ mit $n < a + 1$. Da a eine untere Schranke von M ist, so gilt $n \geq a$. Da $a \notin M$ und $n \in M$, so gilt $a \neq n$ und somit $n > a$, d.h. $a < n < a + 1$, woraus folgt

$$n - 1 < a < n.$$

Nach dem Korollar 2.6 enthält $(n - 1, n)$ keine ganze Zahl. Somit gibt es kein Element von M im $[a, n)$, d.h. für jedes $x \in M$ gilt $x \geq n$.



Somit ist n eine untere Schranke von M, was ein Widerspruch ist, da $n > a$ und a die größte untere Schranke von M ist. Wir beschließen, dass $a \in M$. Der Fall von $\max M$ wird analog behandelt.

Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ ist immer nach unten von 1 beschränkt, woraus die Existenz von $\min M$ folgt. ∎

Insbesondere ist die Menge $\mathbb{N}$ nach oben nicht beschränkt da sonst $m = \max \mathbb{N}$ existiert was nicht möglich ist da $m + 1 > m$ und $m + 1 \in \mathbb{N}$. Wir betonen dass diese Eigenschaft von $\mathbb{N}$ eine Folgerung des Vollständigkeitsaxioms ist.

13.11.2024 Vorlesung 10

Induktionsprinzip mit verschobenem Anfang

Um die Aussagen mit ganzen Zahlen zu beweisen, man benutzt häufig die folgende Verallgemeinerung des Induktionsprinzipes.

Satz 2.8 (Induktionsprinzip mit verschobenem Anfang) *Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{Z}$ abhängige Aussage, d.h.*

$$A : \mathbb{Z} \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}.$$

Nehmen wir an dass A die folgenden zwei Bedingungen für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ erfüllt:

(i) *$A(n_0)$ ist wahr* (Induktionsanfang für $n = n_0$)

(ii) *Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$* (Induktionsschritt von n nach $n+1$).

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

Beweis. Setzen wir $m = n - n_0 + 1$ und bemerken, dass

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad n \geq n_0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{N}.$$

Definieren wir für alle $m \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$B(m) := A(n) = A(m + n_0 - 1).$$

Es reicht zu beweisen, dass $B(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, was wir per Induktion nach m beweisen.

Induktionsanfang für $m = 1$: die Aussage $B(1) = A(n_0)$ gilt nach (i).

Induktionsschritt von m nach $m + 1$: die Implikation $B(m) \Rightarrow B(m+1)$ gilt da

$$B(m) = A(m + n_0 - 1) \implies A(m + n_0) = B(m+1),$$

wobei wir (ii) mit $n = m + n_0 - 1$ verwendet haben. ■

Negative Potenzen

Definieren wir jetzt die Potenzen a^m einer Zahl $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Für $m > 0$ wurde a^m schon oberhalb definiert.

Definition. Setzen wir

$$a^0 := 1 \quad \text{und} \quad a^{-n} := \left(a^{-1}\right)^n \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei a^{-1} das Inverse von a ist.

Behauptung. *Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$a^{-n} = (a^n)^{-1}.$$

Beweis. Da nach Definition $a^{-n} = (a^{-1})^n$, so reicht es zu beweisen, dass

$$\left(a^{-1}\right)^n = (a^n)^{-1},$$

was äquivalent zu

$$\left(a^{-1}\right)^n a^n = 1$$

ist. Diese Identität gilt da nach (2.11)

$$\left(a^{-1}\right)^n a^n = \left(a^{-1}a\right)^n = 1^n = 1$$

(da $1^n = 1$ beweist man per Induktion nach n). ■

Die Identitäten (2.11) gelten für alle $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n,$$

vorausgesetzt $a, b \neq 0$ (siehe Aufgabe 34).

2.4 Archimedisches Prinzip und Gaußklammer

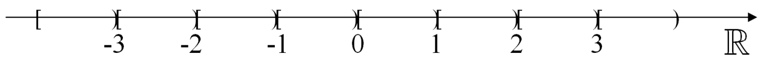
Satz 2.9 (Archimedisches Prinzip) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit*

$$n \leq x < n + 1, \tag{2.13}$$

d.h. $x \in [n, n+1)$.

Bemerkung. Folglich ist $\mathbb{R}$ eine *disjunkte Vereinigung* von allen Intervallen $[n, n+1)$ mit $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1).$$



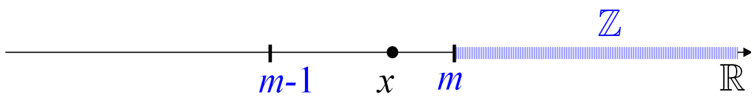
Bemerkung. Die Zahl n mit (2.13) ist somit die größte ganze Zahl mit $n \leq x$. Die Zahl n heißt der *Ganzzahlanteil* von x und wird auch mit $[x]$ (x in den rechteckigen Klammern) bezeichnet. Die Notation $[x]$ heißt die *Gaußklammer* von x. Zum Beispiel, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ und $\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$. Für $x \in \mathbb{Z}$ gilt $[x] = x$. Es folgt aus (2.13) dass

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Beweis. Fixieren wir ein $x \in \mathbb{R}$ betrachten die Menge

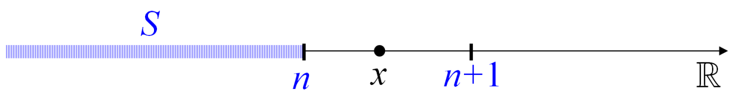
$$S = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Zeigen wir zunächst, dass diese Menge nicht leer ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass S leer ist. Dann gilt $k > x$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, d.h. x eine untere Schranke von $\mathbb{Z}$ ist. Somit ist $\mathbb{Z}$ nach unten beschränkt und nach dem Satz 2.7 hat $\mathbb{Z}$ das Minimum. Sei $m = \min \mathbb{Z}$.



Dann ist $m - 1$ auch in $\mathbb{Z}$, was nicht möglich ist da $m - 1 < \min \mathbb{Z}$.

Da S nichtleer ist und nach oben von x beschränkt, so hat S dem Satz 2.7 das Maximum. Setzen wir $n = \max S$. Da $n \in S$, so gilt nach Definition von S, dass $n \leq x$. Da $n + 1 > \max S$ und deshalb $n + 1 \notin S$, so erhalten wir, dass $n + 1 > x$.



Somit erfüllt n die beiden Bedingungen (2.13).

Um die Eindeutigkeit von n zu beweisen, nehmen wir an, dass es noch ein $n' \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$n' \leq x < n' + 1.$$

Daraus folgt, dass $n' + 1 > n$ und somit nach Korollar 2.6 $n' + 1 \geq n + 1$ und $n' \geq n$. Analog sieht man, dass $n \geq n'$, woraus $n = n'$ folgt. ∎

Bemerkung. Für den Ganzzahlanteil von x benutzt man auch die Notation $\lfloor x \rfloor$. Mit $\lceil x \rceil$ bezeichnet man die einzige ganze Zahl m mit $m - 1 < x \leq m$. Die Existenz von m beweist man analog oder durch $m = -\lfloor -x \rfloor$.

Bemerkung. Es gibt die angeordeten Körper die Archimedisches Prinzip nicht erfüllen. Sie heißen *nichtarchimedische Körper*. Solche Körper erfüllen das Vollständigkeitsaxiom nicht.

2.5 Rationale Zahlen

Definition. Eine *rationale* Zahl ist ein Quotient von ganzen Zahlen, d.h. eine reelle Zahl der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Die Menge von allen rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet, so dass

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Satz 2.10 *Die Menge $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.*

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass $\mathbb{Q}$ bezüglich der Operationen Addition und Multiplikation abgeschlossen ist, und auch das Negative und Inverse von rationalen Zahlen auch in $\mathbb{Q}$ liegen (es ist klar dass 0 und 1 in $\mathbb{Q}$ liegen). Alle Axiome der Addition, Multiplikation und Ordnung gelten dann automatisch, da $\mathbb{Q}$ Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Wir benutzen die folgenden Identitäten:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

und

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},$$

wobei die Nenner b, d nicht gleich Null sind, und in der letzten Identität auch $a \neq 0$ (siehe Aufgabe 17). Es folgt, dass die Summe und das Produkt zweier rationalen Zahlen wieder rational sind, und das Negative und Inverse einer rationalen Zahl wieder rational sind. ■

Offensichtlich gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Da $0 < \frac{1}{2} < 1$, so erhalten wir nach Korollar 2.6, dass $\frac{1}{2}$ keine ganze Zahl ist. Da $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, so ist die Differenz $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ nichtleer, d.h. die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ist echt. Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von *irrationalen* Zahlen ist auch nichtleer, da z.B. $\sqrt{2}$ irrational ist (siehe Aufgabe 38). Daraus folgt, dass der Körper $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist, da das Vollständigkeitsaxiom die Existenz der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ für jedes $a \geq 0$ impliziert.

Man kann beweisen mit Hilfe von dem Archimedischen Prinzip, dass für alle reelle a, b mit $a < b$ das Intervall (a, b) eine rationale Zahl enthält (Aufgabe 39). Man sagt, dass die Menge $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ *dicht liegt*.

2.6 Endliche Folgen

Der Begriff von Folge $\{a_k\}_{k=1}^n$ lässt sich auch verallgemeinern. Für je zwei ganze Zahlen m, n mit $m \leq n$, betrachten wie die Menge von den ganzen Zahlen zwischen m und n :

$$\{m, ..., n\} := \{k \in \mathbb{Z} : m \leq k \leq n\} = [m, n] \cap \mathbb{Z}.$$

Definition. Eine *endliche Folge* $\{a_k\}_{k=m}^n$ ist eine Abbildung $a : \{m, ..., n\} \to \mathbb{R}$. Schreibweise: $a_k = a(k)$.

Die Summe $\sum_{k=m}^n a_k$ der Folge $\{a_k\}$ wird für alle $n \geq m$ per Induction nach n wie folgt definiert:

(*i*) Induktionsanfang für $n = m$:

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m.$$

(*ii*) Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

Man schreibt auch

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + ... + a_n.$$

Man kann beweisen, dass für alle ganzen Zahlen l mit $m \leq l < n$ gilt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$$

(siehe Aufgabe 37).

2.7 Binomischer Lehrsatz

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die Identitäten

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Hier beweisen wir eine ähnliche Identität für $(a+b)^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Da die Summe $a+b$ auch *Binom* heißt, so heißt solche Identität *binomische Formel* oder *binomischer Lehrsatz.*

In der binomischen Formel wird $(a+b)^n$ als eine Summe von Monomen $a^{n-k}b^k$ mit bestimmten Koeffizienten dargestellt. Zuerst besprechen wir diese Koeffizienten.

Definition. Für ganze Zahlen $n \geq k \geq 0$ definieren wir den *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (“n über k”) durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \tag{2.14}$$

wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! = 1$.

Es gilt auch

$$\binom{n}{k} = \frac{(n-k+1)\,...n}{k!} = \frac{\prod_{j=n-k+1}^{n} j}{k!}$$

(Aufgabe 36). Es folgt aus (2.14), dass

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Z.B. wir haben

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1,$$
$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n,$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Eine wichtige Eigenschaft von Binomialkoeffizienten ist die folgende Identität: für alle $n \geq k \geq 1$ gilt

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}}. \tag{2.15}$$

(siehe Aufgabe 36).

Die Binomialkoeffizienten lassen sich bequem in einer Tabelle anordnen, die *Pascalsches Dreieck* heißt. In der Zeile n dieser Tabelle stehen von links nach rechts die Zahlen $\binom{n}{k}$ für $k = 0, ..., n$.

$n=0$								1							
$n=1$							1		1						
$n=2$						1		2		1					
$n=3$					1		3		3		1				
$n=4$				1		4		6		4		1			
$n=5$			1		5		10		10		5		1		
$n=6$		1		6		15		20		15		6		1	
$n=7$	1		7		21		35		35		21		7		1

Die Identität (2.15) bedeutet die folgende Regel: jede Zahl im Pascalschen Dreieck ist die Summe der zwei darüberstehenden Zahlen.

Satz 2.11 (Binomischer Lehrsatz) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{2.16}$$

Zum Beispiel, für $n = 4$ und $n = 5$ erhalten wir aus dem Pascalschen Dreieck, dass

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

15.11.2024 Vorlesung 11

Beweis. Wir beweisen (2.16) per Induction nach n. Induktionsanfang: für $n = 1$ ist (2.16) äquivalent zu $(a+b)^1 = a + b$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n = a\,(a+b)^n + b\,(a+b)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= a\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}a^{n-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\tbinom{n}{j}a^{n-j+1}b^j + \sum_{j=1}^{n+1}\tbinom{n}{j-1}a^{n-(j-1)}b^j \qquad \text{(Wechsel } j = k+1\text{)}\\
&= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\tbinom{n}{j}a^{n-j+1}b^j + \sum_{j=1}^{n}\tbinom{n}{j-1}a^{n-j+1}b^j + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\tbinom{n}{j} + \tbinom{n}{j-1}\right)a^{n+1-j}b^j + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\tbinom{n+1}{j}a^{(n+1)-j}b^j + b^{n+1} \qquad \text{(nach (2.15))}\\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\tbinom{n+1}{j}a^{(n+1)-j}b^j,
\end{aligned}
$$

was zu beweisen war. ■

2.8 Kardinalität von Mengen

Definition. Seien X, Y zwei nicht-leere Mengen. Die Menge X heißt *gleichmächtig* (oder *äquivalent*) zu Y wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. In diesem Fall schreibt man $X \sim Y$. Die leere Menge $\emptyset$ ist nach Definition gleichmächtig zu sich selbst, d.h. $\emptyset \sim \emptyset$.

Satz 2.12 *Die Gleichmächtigkeit von Mengen hat die folgenden Eigenschaften:*

- $X \sim X$ *(Reflexivität)*
- $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ *(Symmetrie)*
- $X \sim Y \;\wedge\; Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ *(Transitivität).*

Beweis. Der Fall mit leeren Mengen ist trivial, so nehmen wir an, dass alle Mengen X, Y, Z nicht leer sind. Da die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}_X : X \to X$ bijektiv ist, haben wir $X \sim X$.

Gilt $X \sim Y$, so existiert eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$. Nach dem Satz 1.7 die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ existiert und ist bijektiv, woraus $Y \sim X$ folgt.

Gelten $X \sim Y$ und $Y \sim Z$ dann existieren die bijektiven Abbildungen $g : X \to Y$ und $f : Y \to Z$. Die Verkettung $f \circ g : X \to Z$ ist bijektiv nach dem Satz 1.8, woraus $X \sim Z$ folgt. ■

Bemerkung. Eine Relation $\sim$ auf eine Grundmenge heißt Äquivalenzrelation wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Somit ist die Gleichmächtigkeit von Mengen eine Äquivalenzrelation.

Endliche Mengen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$\mathcal{E}_n := \{1, ..., n\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le n\}.$$

Setzen wir auch $\mathcal{E}_0 = \emptyset$. Es ist klar, dass $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_m$ für $n \le m$.

Definition. Eine Menge S heißt *endlich* wenn $S \sim \mathcal{E}_n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Gibt es solches n nicht, so heißt S *unendlich*.

Für $n = 0$ bedeutet $S \sim \mathcal{E}_0$ dass S eine leere Menge ist. Für $n \in \mathbb{N}$ bedeutet $S \sim \mathcal{E}_n$ die Existenz einer Bijektion $f : \mathcal{E}_n \to S$, d.h. die Menge S lässt sich mit den Zahlen $1, ..., n$ aufzählen.

Definition. Gilt $S \sim \mathcal{E}_n$, so sagen wir: die Anzahl von Elementen von S ist n, oder die *Kardinalzahl* von S ist n, oder die *Kardinalität* von S ist n. Man bezeichnet die Kardinalität von S mit $\operatorname{card} S$ oder mit $|S|$ (Betrag von S).

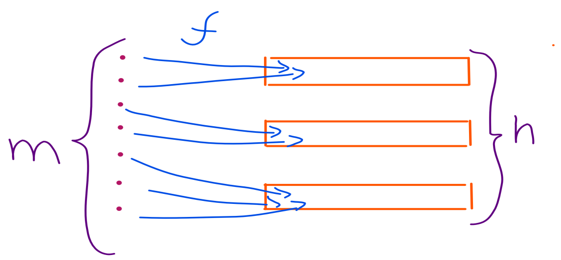
Beispiel. Für die Menge $S = \{a, b, c\}$ gilt $\operatorname{card} S = 3$, da diese Menge zu $\mathcal{E}_3 = \{1, 2, 3\}$ gleichmächtig ist.

Wir geben hier einige Eigenschaften von endlichen Mengen und ihren Kardinalitäten ohne Beweis an. Die Beweise befinden sich in weiteren Abschnitten.

Zunächst muss man sichern dass die Kardinalität wohldefiniert ist, d.h. $S \sim \mathcal{E}_n$ und $S \sim \mathcal{E}_m$ mit verschiedenen Zahlen n, m unmöglich ist.

Satz 2.13 *Sind m, n natürliche Zahlen mit $m > n$, so gibt es keine injektive Abbildung $f : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$. Insbesondere sind $\mathcal{E}_m$ und $\mathcal{E}_n$ gleichmächtig genau dann, wenn $m = n$.*

Die Aussage von Satz 2.13 heißt das *Schubfachprinzip*: sind m Objekten zwischen n Schubfächern verteilt, wobei $m > n$, so gibt es ein Schubfach mit mindestens zwei Objekten.



Somit ist die Kardinalität $\operatorname{card} A$ wohldefiniert für jede endliche Menge A. Es folgt auch aus dem Satz 2.13 dass für beliebige endliche Mengen A und B mit $\operatorname{card} A > \operatorname{card} B$ es keine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

Korollar 2.14 *Die Menge* $\mathbb{N}$ *ist unendlich.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\mathbb{N}$ endlich ist. Dann existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{E}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist f injektiv. Betrachten wir die Einschränkung von f auf $\mathcal{E}_{n+1}$:

$$f|_{\mathcal{E}_{n+1}} : \mathcal{E}_{n+1} \to \mathcal{E}_n.$$

Diese Abbildung ist dann eine injektive Abbildung von $\mathcal{E}_{n+1}$ nach $\mathcal{E}_n$, was nach dem Schubfachprinzip nicht existiert. ■

Wir geben hier noch zwei Sätze über Kardinalität ohne Beweis an. Die Beweise befinden sind in einem Abschnitt unterhalb.

Satz 2.15 *Jede Teilmenge* S *einer endlichen Menge* M *ist endlich und*

$$\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} M.$$

Es folgt aus dem Satz 2.15, dass für jede zwei endliche Mengen A, B auch die Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ endlich sind.

Definition. Seien A, B zwei Mengen. Die disjunkte Vereinigung $A \sqcup B$ wird als die Vereinigung $A \cup B$ definiert, vorausgesetzt $A \cap B = \emptyset$. Im Fall $A \cap B \neq \emptyset$ wird $A \sqcup B$ nicht definiert.

Satz 2.16 *Für beliebige endliche Mengen* A, B *ist die Vereinigung* $A \cup B$ *auch endlich. Es gilt auch*

$$\operatorname{card}(A \sqcup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B, \tag{2.17}$$

vorausgesetzt dass A *und* B *disjunkt sind.*

Bemerkung. Für beliebige endliche Mengen A und B gelten auch die Identitäten:

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B), \tag{2.18}$$

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \operatorname{card} B, \tag{2.19}$$

$$\operatorname{card} \mathcal{P}(A) = 2^{\operatorname{card} A} \tag{2.20}$$

(siehe Aufgaben 41, 42). Die Identität (2.20) erklärt warum die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ auch mit 2^A bezeichnet wird.

Abzählbare Mengen

Definition. Eine Menge X heißt *abzählbar* wenn $X \sim \mathbb{N}$.

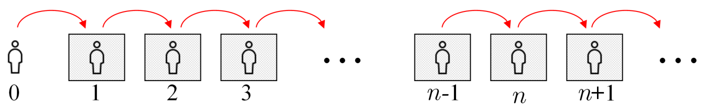
In diesem Fall schreibt man

$$\operatorname{card} X = \aleph_0,$$

und sagt, dass die Kardinalzahl von X *Aleph-null* ist (wobei $\aleph$ der erste Buchstabe *Aleph* des hebräischen Alphabetes ist).

Ist X abzählbar, so existiert ein Bijektion $f : \mathbb{N} \to X$, d.h. die Menge X lässt sich mit natürlichen Zahlen aufzählen.

Beispiel. (*Hilberts Hotel*) Stellen wir ein Hotel mit einer abzählbaren Menge von Zimmern vor, die mit allen natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Seien alle Zimmer schon belegt (ein Gast in jedem Zimmer), aber es kommt noch ein Gast an. Man kann doch ein Platz für den neuen Gast befreien, indem man den Gast aus jedem Zimmer n nach Zimmer $n+1$ versetzt. Damit wird das Zimmer 1 frei für den neuen Gast.



Bezeichnen wir den neuen Ganz mit 0 und bekommen die Gleichmächtigkeit

$$\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Außerdem kann man Platz für abzählbare Menge von neuen Gästen frei machen. Seien die neuen Gäste auch mit natürlichen Zahlen durchnummeriert. Der Gast aus jedem Zimmer n wird nach Zimmer $2n$ versetzt, und somit werden alle ungeraden Zimmer frei. Der neue Gast mit Nummer m wird dann ins Zimmer $2m-1$ untergebracht.

Bezeichnen wir die Menge von neuen Gästen mit $\mathbb{N}'$ (die äquivalent zu $\mathbb{N}$ ist) und bekommen, dass

$$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}' \sim \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Es ist noch interessanter, dass man Platz für die neuen Gäste aus abzählbar vielen Gruppen je mit abzählbar vielen Gästen befreien kann, wie wir unterhalb sehen.

Der nächste Satz enthält wichtige Eigenschaften von abzählbaren Mengen, die auch (2.21) und (2.22) enthalten.

Satz 2.17 *Die abzählbare Mengen gelten die folgenden Aussagen.*

(a) *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist entweder endlich oder abzählbar.*

(b) *Kartesisches Produkt zweier abzählbaren Mengen ist auch abzählbar.*

(c) *Für jede endliche Folge* $\{X_n\}_{n=1}^m$ *von abzählbaren Mengen* X_n *ist die Vereinigung* $\bigcup_{n=1}^m X_n$ *abzählbar. Auch für jede unendliche Folge* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *von abzählbaren Mengen ist die Vereinigung* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *abzählbar.*

Bemerkung. Die Aussage (a) impliziert, dass $\mathbb{N}$ die kleinste unendliche Menge ist: für jede unendliche Teilmenge $X \subset \mathbb{N}$ gilt $X \sim \mathbb{N}$.

Die Aussage (b) ist äquivalent zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Zum Vergleich erinnern wir uns daran, dass nach (2.19) gilt

$$\operatorname{card}(\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n) = n^2 > n = \operatorname{card}\mathcal{E}_n$$

für alle $n > 1$, und somit $\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \not\sim \mathcal{E}_n$.

Die Vereinigung einer unendlichen Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen wird wie folgt definiert:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n := \{x : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in X_n\}.$$

Die Aussage (c) ergibt, dass man im Hilberts Hotel auch alle Gäste aus endlich oder abzählbar vielen Gruppen je mit abzählbar vielen Gästen unterbringen kann.

Korollar 2.18 *Die Mengen* $\mathbb{Z}$ *und* $\mathbb{Q}$ *sind abzählbar, d.h.* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Beweis. Da $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$, so erhalten wir $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. Da

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\} \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z} \right\}, \end{aligned}$$

so ist $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen. Somit gilt $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. ■

20.11.2024 Vorlesung 12

Überabzählbare Mengen

Definition. Für Mengen X, Y schreiben wir

$$X \preceq Y$$

(gebogenes Symbol von Ungleichung) wenn X zu einer Teilmenge von Y gleichmächtig ist d.h. $X \sim Y'$ für eine Teilmenge $Y' \subset Y$.

Insbesondere gilt $X \preceq Y$ wenn $X \subset Y$. Zum Beispiel, wir haben $\mathcal{E}_n \preceq \mathcal{E}_m$ für alle $n \leq m$ und $\mathcal{E}_n \preceq \mathbb{N}$. Man kann beweisen, dass $\mathbb{N} \preceq X$ für jede unendliche Menge X, d.h. $\mathbb{N}$ ist die kleinste unendliche Menge.

Definition. Wir schreiben $X \prec Y$ wenn $X \preceq Y$ aber $X \not\sim Y$.

Zum Beispiel, wir haben $\mathcal{E}_n \prec \mathcal{E}_m$ für alle $n < m$ (Satz 2.13) und $\mathcal{E}_n \prec \mathbb{N}$ (Korollar 2.14).

Definition. Eine Menge X heißt *überabzählbar* wenn $\mathbb{N} \prec X$.

Da $\mathbb{N} \preceq X$ für jede unendliche Menge X, so ist eine unendliche Menge X genau dann überabzählbar wenn X nicht abzählbar ist.

Satz 2.19 *Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, d.h. $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.*

Gilt $X \sim \mathbb{R}$ so schreibt man

$$\operatorname{card} X = \mathfrak{c}$$

und sagt, dass die Kardinalzahl von X gleich *Kontinuum* ist (wobei "$\mathfrak{c}$" in der Schriftart "Fraktur" gedruckt ist).

Da $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \prec \mathbb{R}$, es folgt, dass die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von *irrationalen* Zahlen nichtleer ist. Ein anderer Beweis davon: $\sqrt{2}$ ist irrational (Aufgabe 38).

Bemerkung. Die nächsten *-Abschnitte erhalten zusätzliches Material wie folgt:

1. Beweise von den Eigenschaften von Kardinalzahlen, endlich und unendlich.

2. Skizze einer alternativen Konstruktion von reellen Zahlen, die mit den Axiomen von natürlichen Zahlen anfängt.

3. Begründung von *Zahlensystem zur Basis* q (wobei $q > 1$ eine fixierte natürliche Zahl ist): für jedes $x \in \mathbb{N}$ gibt es eine Darstellung

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k \quad (= a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + ... + a_n q^n)$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und alle a_k die q-*adische Ziffern* sind, d.h. $a_k \in \{0, ..., q-1\}$. Unter der Bedingung $a_n \neq 0$ ist diese Darstellung auch eindeutig. Die Folge von Ziffern $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$ ist dann die Darstellung von x im q-adischen Zahlensystem. Für $q = 2$ erhalten wir Dualsystem, für $q = zehn := 9 + 1$ erhalten wir das übliche Dezimalsystem.

2.9 * Beweis von Eigenschaften endlicher Mengen

Wir beweisen hier die Sätze 2.13, 2.15 und 2.16.

Behauptung *Angenommen $A \sim A'$ und $B \sim B'$ so gilt*

$$A \sqcup B \sim A' \sqcup B', \tag{2.23}$$

vorausgesetzt dass $A \cap B = \emptyset$ und $A' \cap B' = \emptyset$.

Beweis. Seien $f : A \to A'$ und $g : B \to B'$ bijektive Abbildungen. Definieren wir die Abbildung

$$F : A \sqcup B \to A' \sqcup B'$$

wie folgt:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{wenn } x \in A, \\ g(x), & \text{wenn } x \in B. \end{cases}$$

Dann ist F bijektiv, woraus (2.23) folgt. ■

Lemma 2.20 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $a \in \mathcal{E}_{n+1}$ gilt*

$$\mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\} \sim \mathcal{E}_n. \tag{2.24}$$

Beweis. Induktion nach n. Für $n = 1$ ist (2.24) offensichtlich, da für $a = 2$

$$\mathcal{E}_2 \setminus \{a\} = \{1, 2\} \setminus \{2\} = \{1\} = \mathcal{E}_1$$

und für $a = 1$

$$\mathcal{E}_2 \setminus \{a\} = \{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} \sim \{1\} = \mathcal{E}_1.$$

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Angenommen sei (2.24), beweisen wir, dass für jedes $a \in \mathcal{E}_{n+2}$

$$\mathcal{E}_{n+2} \setminus \{a\} \sim \mathcal{E}_{n+1}. \tag{2.25}$$

Ist $a = n + 2$, so gilt

$$\mathcal{E}_{n+2} \setminus \{n+2\} = \mathcal{E}_{n+1} \sim \mathcal{E}_{n+1}.$$

Ist $a < n+2$, so liegt a in $\mathcal{E}_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt (2.24). Mit Hilfe von

$$\mathcal{E}_{n+2} = \mathcal{E}_{n+1} \sqcup \{n+2\}$$

und (2.23) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n+2} \setminus \{a\} &= (\mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\}) \sqcup \{n+2\} \\ &\sim \mathcal{E}_n \sqcup \{n+1\} = \mathcal{E}_{n+1}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Eine *Einschränkung* (Restriktion) von f auf einer Teilmenge $U \subset X$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} g &: U \to Y \\ g(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Schreibweise: $g = f|_U$. Mit anderen Worten $f|_U$ hat die gleiche Zuordnung und den gleichen Wertebereich wie f aber einen kleineren Definitionsbereich.

Bemerkung. Liegt das Bild $f(X)$ in einer Teilmenge $V \subset Y$, so kann man die folgende Abbildung betrachten:

$$\begin{aligned} h &: X \to V \\ h(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Für diese Abbildung gibt es keine spezielle Notation, man bezeichnet sie auch mit f mit Erklärung dass der Wertebereich gleich V anstatt Y ist.

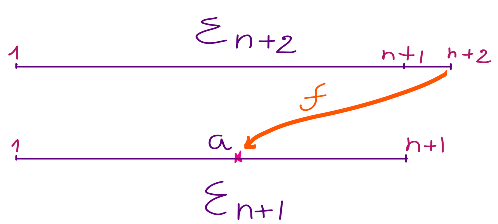
Beweis von dem Satz 2.13. Die Bedingung $m > n$ ergibt nach dem Korollar 2.6, dass $m \geq n+1$ und somit $\mathcal{E}_{n+1} \subset \mathcal{E}_m$. Soll eine injektive Abbildung $f : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ mit $m > n$ existieren, so ist die Einschränkung $f|_{\mathcal{E}_{n+1}}$ eine injektive Abbildung von $\mathcal{E}_{n+1}$ nach $\mathcal{E}_n$. Deshalb reicht es zu beweisen, dass es keine injektive Abbildung $\mathcal{E}_{n+1} \to \mathcal{E}_n$ gibt. Diese Aussage beweisen wir per Induktion nach n.

Induktionsanfang für $n = 1$. Es gibt nur eine Abbildung $f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ und zwar mit $f(1) = f(2) = 1$. Somit ist f nicht injektiv.

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Sei

$$f : \mathcal{E}_{n+2} \to \mathcal{E}_{n+1}$$

eine injektive Abbildung. Setzen with $a = f(n+2)$.



Da f injektiv ist, so gilt

$$f(k) \neq a \quad \forall k \in \mathcal{E}_{n+1}.$$

Somit ergibt die Einschränkung von f auf $\mathcal{E}_{n+1}$ eine injektive Abbildung

$$h : \mathcal{E}_{n+1} \to \mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\}. \tag{2.26}$$

Nach Lemma 2.20 gilt (2.24), d.h. es gibt eine bijektive Abbildung

$$g : \mathcal{E}_{n+1} \setminus \{a\} \to \mathcal{E}_n. \tag{2.27}$$

Die Komposition zweier injektiven Abbildungen (2.26) und (2.27) ergibt eine injektive Abbildung

$$g \circ h : \mathcal{E}_{n+1} \to \mathcal{E}_n,$$

was im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung steht. Somit ist das Schubfachprinzip bewiesen.

Beweisen wir jetzt, dass

$$\mathcal{E}_m \sim \mathcal{E}_n \Leftrightarrow m = n.$$

Im Fall $n = m$ gilt $\mathcal{E}_n \sim \mathcal{E}_m$. Ist $m > n$ so gibt es keine injektive Abbildung $\mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ und somit $\mathcal{E}_m \not\sim \mathcal{E}_n$. Im Fall $n > m$ gibt es keine injektive Abbildung $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ und wieder $\mathcal{E}_m \not\sim \mathcal{E}_n$. $\blacksquare$

Korollar 2.21 *Gilt* $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B$ *so ist jede injektive Abbildung* $f : A \to B$ *auch bijektiv.*

Beweis. Es reicht zu beweisen, dass f surjektiv ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass f nicht surjektiv ist, d.h. es gibt ein $b \in B$ mit leerem Urbild $f^{-1}(b)$. Betrachten wir die Menge $B' = B \setminus \{b\}$. Dann liegt das Bild von f in B' so dass der Wertebereich B von f sich nach B' verkleinen lässt. Somit erhalten wir eine injektive Abbildung $f' : A \to B'$, was im Widerspruch zum Schubfachprinzip steht, da $\operatorname{card} B' = \operatorname{card} B - 1 < \operatorname{card} A$.. $\blacksquare$

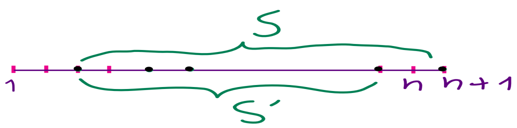
Beweis von dem Satz 2.15. Sei $n = \operatorname{card} M$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $M = \mathcal{E}_n$, und beweisen per Induktion nach n, dass jede Teilmenge S von $\mathcal{E}_n$ endlich ist und $\operatorname{card} S \leq n$.

Induktionsanfang. Ist $n = 0$, so ist jede Teilmenge S von $\mathcal{E}_0$ leer und somit endlich mit $\operatorname{card} S = 0$.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$. Angenommen sei: jede Teilmenge T von $\mathcal{E}_n$ ist endlich und $\operatorname{card} T \leq n$. Wir beweisen, dass jede Teilmenge $S \subset \mathcal{E}_{n+1}$ endlich ist und $\operatorname{card} S \leq n + 1$. Betrachten wir zwei Fälle.

Gilt $S \subset \mathcal{E}_n$, so ist S endlich nach Induktionsvoraussetzung, und $\operatorname{card} S \leq n < n + 1$.

Gilt $S \not\subset \mathcal{E}_n$, so enthält S die Zahl $n + 1$. Die Menge $S' = S \setminus \{n + 1\}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{E}_n$ und somit nach Induktionsvoraussetzung ist S' endlich und $\operatorname{card} S' \leq n$. Mit anderen Worten $S' \sim \mathcal{E}_m$ für ein $m \leq n$.



Dann erhalten wir mit Hilfe von (2.23)

$$S = S' \sqcup \{n+1\} \sim \mathcal{E}_m \sqcup \{m+1\} = \mathcal{E}_{m+1},$$

woraus die Endlichkeit von S folgt, und auch $\operatorname{card} S = m + 1 \leq n + 1$. ■

Beweis von dem Satz 2.16. Die Vereinigung $A \cup B$ lässt sich als eine disjunkte Vereinigung darstellen:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B^c) \sqcup (A \cap B) \cap (A^c \cap B) \\ &= (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A) \end{aligned} \tag{2.28}$$

(dies folgt aus der Aufgabe 2 mit $X = A \cup B$). Deshalb reicht es zu beweisen, dass eine disjunkte Vereinigung zweier Mengen endlich ist.

Seien jetzt A, B zwei disjunkte endliche Mengen mit $\operatorname{card} A = n$ und $\operatorname{card} B = m$, d.h.

$$A \sim \mathcal{E}_n \quad \text{und} \quad B \sim \mathcal{E}_m. \tag{2.29}$$

Wir beweisen, dass $A \sqcup B$ endlich ist und dass (2.17) gilt, d.h.

$$\operatorname{card}(A \sqcup B) = n + m.$$

Dafür betrachten wir die Menge

$$\mathcal{E}'_m = \{n+1, ..., n+m\} = \mathcal{E}_{n+m} \setminus \mathcal{E}_n.$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{E}_m \sim \mathcal{E}'_m$ (mit Bijektion $k \mapsto n + k$) und somit $B \sim \mathcal{E}'_m$. Die Mengen $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{E}'_m$ sind disjunkt, woraus folgt, dass

$$A \sqcup B \sim \mathcal{E}_n \sqcup \mathcal{E}'_m = \{1, ..., n\} \cup \{n+1, ..., n+m\} = \mathcal{E}_{n+m},$$

und somit

$$A \sqcup B \sim \mathcal{E}_{n+m}. \tag{2.30}$$

Insbesondere ist $A \sqcup B$ endlich. Die Identität (2.17) folgt aus (2.30). ■

2.10 * Beweis von Eigenschaften unendlicher Mengen

Vergleichen von Kardinalitäten

Behauptung. *Die Relation $X \preceq Y$ gilt genau dann, wenn es eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.*

Beweis. Ist X zu einer Teilmenge $Y' \subset Y$ gleichmächtig, so existiert eine bijektive Abbildung $g : X \to Y'$. Definieren wir $f : X \to Y$ mit $f(x) = g(x)$ und erhalten somit eine injektive Abbildung. Umgekehrt, existiert eine injektive Abbildung $f : X \to Y$, so bezeichnen wir $Y' = f(X)$ und erhalten damit eine bijektive Abbildung $f : X \to Y'$ wobei Y' eine Teilmenge von Y ist. ■

Behauptung. *Ist $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung, so gibt $Y \preceq X$.*

Beweis. Definieren wir eine injektive Abbildung $g : Y \to X$ wie folgt: für jedes $y \in Y$ wählen wir ein Element $x \in X$ mit $f(x) = y$ und setzen $g(y) = x$. Dann ist g injektiv da $g(y_1) = g(y_2) = x$ impliziert $f(x) = y_1$ und $f(x) = y_2$ und somit $y_1 = y_2$. ■

Die Ungleichheit zwischen Mengen erfüllt die folgenden Eigenschaften:

1. $\mathcal{E}_n \preceq \mathcal{E}_m \Leftrightarrow n \leq m$ (folgt aus dem Schubfachprinzip)

2. $X \preceq X$ (trivial)

3. $X \preceq Y \ \wedge Y \preceq Z \ \Rightarrow X \preceq Z$ (da Komposition von injektiven Abbildungen wieder injektiv ist)

4. $X \preceq Y \ \wedge \ Y \preceq X \Rightarrow X \sim Y$

5. für je zwei Mengen X, Y gilt $X \preceq Y \ \vee \ Y \preceq X$.

Die Eigenschaften 4 und 5 haben die komplizierten Beweise, die wir nicht angeben (und nicht brauchen).

Behauptung. *Für jede unendliche Menge X gilt $\mathbb{N} \preceq X$ (so dass $\mathbb{N}$ die kleinste unendliche Menge ist).*

Beweis. Zuerst definieren wir per Induktion nach $n \geq 0$ eine endliche Teilmenge X_n von X wie folgt. Für $n = 0$ setzen wir $X_0 = \emptyset$. Ist X_n schon definiert und endlich, so ist die Menge $X \setminus X_n$ nicht leer, da X unendlich ist. Wir wählen beliebig ein Element $x_{n+1} \in X \setminus X_n$ und setzen

$$X_{n+1} = X_n \sqcup \{x_{n+1}\},$$

so dass X_{n+1} auch eine endliche Teilmenge von X ist.

Jetzt definieren wir eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$ wie folgt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $f(n) = x_n$, wobei x_n das einzige Element von $X_n \setminus X_{n-1}$ ist.

Die Abbildung f ist injektiv da für $m < n$ gilt $m \leq n - 1$, somit $X_m \subset X_{n-1}$ und

$$f(m) \in X_m \subset X_{n-1} \text{ und } \ f(n) \notin X_{n-1}$$

so dass $f(m) \neq f(n)$. Folglich erhalten wir $\mathbb{N} \preceq X$. ■

Abzählbare Mengen

Beweis von dem Satz 2.17. (a) Es reicht zu zeigen, dass jede Teilmenge X von $\mathbb{N}$ entweder endlich oder abzählbar ist. Sei X unendlich. Dann erstellen wir eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to X$ woraus die Abzählbarkeit von X folgen wird. Wir definieren $f(n)$ per Induktion nach n.

Induktionsanfang. Nach Satz 2.7 existiert das Minimum von X. Setzen wir

$$f(1) = \min X.$$

Induktionsschritt. Seien $f(k)$ für alle $k \le n$ schon definiert. Die Menge

$$X_n = \{f(k) : k \le n\} = \{f(k) : k \in \mathcal{E}_n\}$$

ist eine endliche Teilmenge von X. Deshalb ist die Differenz $X \setminus X_n$ nicht leer, und wir können setzen

$$f(n+1) = \min(X \setminus X_n). \tag{2.31}$$

Nach dem Induktionsprinzip erhalten wir eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to X$.

Die Abbildung f ist injektiv, da $f(n+1) \notin X_n$ und somit $f(n+1) \neq f(k)$ für alle $k \le n$, woraus folgt, dass $f(m) \neq f(k)$ für alle $m \neq k$.

Beweisen wir, dass f surjektiv ist, d.h. $f(\mathbb{N}) = X$. Die Menge $f(\mathbb{N})$ ist eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und deshalb hat keine obere Schranke. Daraus folgt, dass für jedes $x \in X$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n+1) > x$. Es folgt aus (2.31), dass x nicht in $X \setminus X_n$ liegt, und somit $x \in X_n$. Nach Definition von X_n existiert ein $k \le n$ mit $f(k) = x$, d.h. $x \in f(\mathbb{N})$.

(b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $X = Y = \mathbb{N}$. Dann beweisen wir, dass die Menge

$$\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

abzählbar ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$D_k = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{N},\ n+m = k\}.$$

Jede Menge D_k ist endlich, da sie genau $k-1$ Elemente enthält, also

$$\operatorname{card} D_k = k - 1.$$

Insbesondere gilt $D_1 = \emptyset$. Auch ist $\mathbb{N}^2$ die disjunkte Vereinigung von allen Mengen D_k, $k \in \mathbb{N}$. Auf dem Diagramm unterhalb sind die Elemente von $\mathbb{N}^2$ in einer Tabelle angeordnet, und die Mengen D_k mit $k \ge 2$ sind die Diagonalen in dieser Tabelle. Man zählt die Menge $\mathbb{N}^2$ auf indem man die Mengen D_k nacheinander aufzählt. Dieses Argument heißt die *Diagonal-Abzählung*.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1,1)_1 & & (1,2)_3 & & (1,3)_6 & & (1,4)_{10} & & (1,5)_{15} & & \ldots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
(2,1)_2 & & (2,2)_5 & & (2,3)_9 & & (2,4)_{14} & & \ldots & & \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
(3,1)_4 & & (3,2)_8 & & (3,3)_{13} & & \ldots & & & & \\
& \nearrow & & \nearrow & & & & & & & \\
(4,1)_7 & & (4,2)_{12} & & \ldots & & & & & & \\
& \nearrow & & & & & & & & & \\
(5,1)_{11} & & \ldots & & & & & & & & \\
\ldots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Die formale Definition der Bijektion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist wie folgt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a_k = \operatorname{card} \bigcup_{i=1}^{k} D_i = \operatorname{card} \bigcup_{i \in \mathcal{E}_k} D_i.$$

Da die Mengen D_i endlich ist, so ist ihre endliche Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{k} D_i$ auch endlich, so dass a_k wohldefiniert ist. Da

$$\bigcup_{i=1}^{k} D_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} D_i \right) \sqcup D_k,$$

so erhalten wir, dass

$$a_k = a_{k-1} + \operatorname{card} D_k = a_{k-1} + (k-1) \, . \tag{2.32}$$

Für jedes $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ gibt es genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $(n, m) \in D_k$, nämlich $k = n + m$. Dann setzen wir

$$f(n, m) := a_{k-1} + m = a_{n+m-1} + m.$$

Offensichtlich ist $f|_{D_k}$ injektiv, da für zwei Verschiedene Paaren (n_1, m_1) und (n_2, m_2) in D_k gilt $m_1 \neq m_2$ und somit

$$f(n_1, m_1) = a_{k-1} + m_1 \neq a_{k-1} + m_2 = f(n_2, m_2) \, .$$

Für $(n, m) \in D_k$ nimmt m die Werte $\{1, ..., k-1\}$ an, woraus folgt

$$f(D_k) = \{a_{k-1} + 1, ..., a_{k-1} + (k-1)\} = \{a_{k-1} + 1, ..., a_k\} \, ,$$

wobei wir (2.32) benutzt haben. Wir haben dann

$$f(D_k) = \{x \in \mathbb{N} : a_{k-1} < x \leq a_k\} = (a_{k-1}, a_k] \cap \mathbb{N}.$$

Da alle Intervalle $(a_{k-1}, a_k]$ disjunkt sind, so erhalten wir, dass $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ injektiv ist.

Jetzt beweisen wir, dass f surjektiv ist, d.h. $f(\mathbb{N}^2) = \mathbb{N}$. Da $a_1 = 0$ und somit

$$\bigcup_{k \geq 2} (a_{k-1}, a_k] = (0, +\infty)$$

(siehe Aufgabe 44), so erhalten wir, dass

$$f\left(\mathbb{N}^2\right) = \bigcup_{k \geq 2} f(D_k) = \mathbb{N}.$$

Folglich ist $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ surjektiv und somit auch bijektiv, was zu beweisen war.

(c) Jede Menge X_n ist abzählbar und somit gibt es eine bijektive Abbildung $f_n : \mathbb{N} \to X_n$. Definieren wir eine Abbildung $f : \mathbb{N}^2 \to X$ durch

$$f(n, m) = f_n(m) \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Die Abbildung $f : \mathbb{N}^2 \to X$ ist offensichtlich surjektiv, was impliziert $X \preceq \mathbb{N}^2$. Nach (b) haben wir $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ und somit $X \preceq \mathbb{N}$. Da X unendlich ist, so erhalten wir nach (a), dass X abzählbar ist. ■

Eine Menge X heißt *höchstens abzählbar falls* $X \preceq \mathbb{N}$. Es folgt nach dem Satz 2.17(a) dass X höchstens abzählbar genau dann ist wenn X entweder endlich oder abzählbar ist. Es gibt die folgende Erweiterung des Satzes Satz 2.17(c) : eine abzählbare Vereinigung $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist abzählbar auch wenn alle Mengen X_n höchstens abzählbar sind und mindestens eine Menge von X_n abzählbar ist. In der Tat, ist X_n endlich, so X_n lässt sich in eine abzählbare Menge X'_n erweitern, und für abzählbare X_n setzen wir $X'_n = X_n$. Dann ist $X' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X'_n$ abzählbar nach dem Satz 2.17(c) . Da $X \subset X'$ so ist X nach dem Satz 2.17(a) abzählbar oder endlich. Da eine Menge von X_n unendlich ist, so ist auch X unendlich, woraus $X \sim \mathbb{N}$ folgt.

Auch eine endliche Vereinigung $X = \bigcup_{n=1}^{N} X_n$ ist abzählbar, vorausgesetzt, dass alle Mengen X_n höchstens abzählbar sind und mindestens eine Menge von X_n abzählbar ist, da jede endliche Folge $\{X_n\}_{n=1}^{N}$ sich immer in eine unendliche Folge $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ fortsetzen lässt, indem man setzt $X_n = X_N$ für alle $n > N$.

Überabzählbare Mengen

Beweis von dem Satz 2.19. Wir müssen beweisen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist, so dass $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Konstruieren wir eine Folge $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen beschränkten Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ so dass

1. $a_n < b_n$
2. $I_{n+1} \subset I_n$ (so dass $\{I_n\}$ eine *Intervallschachtelung* ist)
3. $x_n \notin I_n$.

Sei I_1 ein beliebiges Intervall, das x_1 nicht enthält, zum Beispiel $I_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2]$. Ist $I_n = [a_n, b_n]$ schon definiert, so wählen wir I_{n+1} als ein Teilintervall von I_n, das x_{n+1} nicht enthält, zum Beispiel wie folgt: im Fall $x_{n+1} \notin I_n$ setzen wir $I_{n+1} = I_n$, und im Fall $x_{n+1} \in I_n$ wählen wir $I_{n+1} = [a_n, \frac{x_{n+1}+a_n}{2}]$ oder $I_{n+1} = \left[\frac{b_n+x_{n+1}}{2}, b_n\right]$.

Dann betrachten wir die Mengen

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad B = \{b_m : m \in \mathbb{N}\}\,.$$

Die Inklusion $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ ergibt, dass

$$[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n] \quad \text{für alle} \quad n \le m.$$

Daraus folgt

$$a_n \le a_m < b_m \le b_n.$$

und somit

$$a_n \le b_m \quad \text{für } n \le m$$

und

$$a_m \le b_n \quad \text{für } n \le m.$$

Umtauschen von m und n ergibt

$$a_n \le b_m \quad \text{für } n \ge m,$$

so dass

$$a_n \leq b_m \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom erhalten wir, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, die A und B trennt, d.h. $a_n \leq c \leq b_m$ gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $c \in I_n$ für alle n und somit $c \neq x_n$ für alle n, was im Widerspruch zur Annahme $\mathbb{R} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist. ∎

Man kann beweisen, dass jedes Intervall (a, b) mit $a < b$ auch die Kardinalität Kontinuum hat.

2.11 ∗ Zusätzliche Eigenschaften von Kardinalität

Operationen mit abzählbaren Mengen

Satz 2.22 *Seien X, Y zwei Mengen mit $Y \preceq \mathbb{N}$.*
(a) Ist X unendlich, so gilt $X \cup Y \sim X$.
(b) Ist X überabzählbar, so gilt $X \setminus Y \sim X$.

Insbesondere gelten

$$\mathbb{R} \cup Y \sim \mathbb{R} \text{ und } \mathbb{R} \setminus Y \sim \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$, d.h. $\operatorname{card}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$.

Beweis. (a) Zunächst bemerken wir, dass

$$X \cup Y = X \sqcup (Y \setminus X)$$

und $Y \setminus X \preceq Y \preceq \mathbb{N}$. Umbenennen wir $Y \setminus X$ in Y. Dann sind X, Y disjunkt, gilt $Y \preceq \mathbb{N}$ und wir müssen beweisen, dass

$$X \sqcup Y \sim X.$$

Jede unendliche Menge erhält eine abzählbare Teilmenge. Sei X_0 eine abzählbare Teilmenge von X und sei $X_1 = X \setminus X_0$. Dann gilt

$$X = X_0 \sqcup X_1$$

und somit

$$X \sqcup Y = (X_0 \sqcup X_1) \sqcup Y = (X_0 \sqcup Y) \sqcup X_1. \tag{2.33}$$

Da $X_0 = \mathbb{N}$ und $Y \preceq \mathbb{N}$, so erhalten wir nach Satz 2.17, dass

$$X_0 \sqcup Y \sim \mathbb{N} \sim X_0,$$

was zusammen mit (2.33) ergibt

$$X \sqcup Y \sim X_0 \sqcup X_1 = X,$$

was zu beweisen war.

(b) Da $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$ und $X \cap Y \preceq Y \preceq \mathbb{N}$, so können wir $X \cap Y$ in Y umbenennen und somit voraussetzen, dass $Y \subset X$. Dann haben wir

$$X = (X \setminus Y) \cup Y. \tag{2.34}$$

Die Menge $X \setminus Y$ ist unendlich, da sonst X abzählbar wäre (als die Vereinigung von $Y \preceq \mathbb{N}$ und endlicher Menge $X \setminus Y$). Nach (a) erhalten wir

$$(X \setminus Y) \cup Y \sim X \setminus Y,$$

woraus $X \sim X \setminus Y$ folgt. ∎

Algebraische und transzendente Zahlen

Die folgenden Teilmengen von reellen Zahlen sind uns schon bekannt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

und wir wissen, dass

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \prec \mathbb{R}.$$

Betrachten wir noch eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn x eine Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0 \tag{2.35}$$

erfüllt, wobei $n \in \mathbb{N}$ und alle Koeffizienten a_k rationale Zahlen sind, d.h. x eine Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

Zum Beispiel, jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist algebraisch, da es die Gleichung $x + a_1 = 0$ erfüllt mit $a_1 = -x \in \mathbb{Q}$ (und $n = 1$). Auch die Zahl $x = \sqrt{2}$ ist algebraisch da sie die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ erfüllt (mit $n = 2$).

Bezeichnen wir mit $\mathbb{A}$ die Mengen von allen algebraischen Zahlen. Offensichtlich gelten die Inklusionen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q} \neq \mathbb{A}$. Es möglich zu beweisen, dass die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier algebraischen Zahlen wieder algebraisch sind, und somit ist $\mathbb{A}$ ein Körper.

Satz 2.23 *Die Menge $\mathbb{A}$ ist abzählbar.*

Beweis. Die Menge von allen Polynomen (2.35) mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar nach den Satz 2.17(b). Da jedes Polynom (2.35) höchstens n Nullstellen hat, so folgt es aus dem Satz 2.17(c), dass $\mathbb{A}$ abzählbar ist. ∎

Nicht-algebraische reelle Zahlen heißen *transzendent*. Es folgt aus den Sätzen 2.19, 2.22, 2.23 dass die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ von transzendenten Zahlen die Kardinalität Kontinuum hat, insbesondere diese Menge nichtleer ist. Beispiele von transzendenten Zahlen sind die Zahlen π und e, die später definiert werden.

Mächtigkeit von Potenzmenge

Satz 2.24 *Für jede Menge X gilt $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Beweis. Die Ungleichung $X \preceq Y$ gilt genau dann, wenn es eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt, und die Äquivalenz $X = Y$ gilt, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. Um die echte Ungleichung $X \prec Y$ zu beweisen, müssen wir folgendes zeigen:

1. es existiert eine injektive Abbildung $f : X \to Y$,
2. es existiert keine bijektive Abbildung $f : X \to Y$.

Eine injective Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ kann man wie folgt definieren: $f(x) = \{x\}$, wobei $\{x\}$ eine Teilmenge von X ist, die aus einem Element x besteht.

Sei $f : X \to \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Abbildung. Beweisen wir, dass f nicht surjektiv ist (und somit auch nicht bijektiv). Betrachten wir die Menge

$$S = \{x \in X : x \notin f(x)\}. \tag{2.36}$$

Beachten wir, dass $f(x)$ eine Teilmenge von X ist, und die Frage, ob x ein Element von $f(x)$ ist, ist völlig sinnvoll. Die Menge S ist eine Teilmenge von X und deshalb ein Element von $\mathcal{P}(X)$. Zeigen wir, dass die Menge S kein Urbild hat. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $f(y) = S$ für ein $y \in X$, und betrachten zwei Fälle.

1. Ist $y \in S$ so gilt nach (2.36) $y \notin f(y) = S$, was ist unmöglich.

2. Ist $y \notin S$ so gilt nach (2.36) $y \in f(y) = S$ – auch unmöglich.

Deshalb führt die Bedingung $f(y) = S$ zum Widerspruch, woraus folgt, dass f keine surjektive Abbildung ist. ■

2.12 * Zahlensystem: q-adische Darstellung natürlicher Zahlen

Ein Zahlensystem ist eine Methode von bequemer Darstellung von Zahlen. Im Alltag benutzt man die dezimale Darstellung. In Rechnern wird ein anderes Zahlensystem angewandt – das Dualsystem. In diesem Abschnitt besprechen wir Darstellung natürlicher Zahlen in einem q-adischen *Zahlensystem*, wobei $q > 1$ eine fixierte natürliche Zahl ist, die die Basis des System heißt.

Bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}_+$ die Menge von nichtnegativen ganzen Zahlen, d.h. $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Satz 2.25 *Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in \mathbb{N}$ existieren genau ein $n \in \mathbb{Z}_+$ und genau eine Folge $\{a_k\}_{k=0}^n$ von ganzen Zahlen $a_k \in \{0, ..., q-1\}$ mit $a_n \neq 0$ derart, dass*

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k \qquad (= a_0 + a_1 q + ... + a_n q^n). \tag{2.37}$$

Definition. Die Identität (2.37) heißt die Darstellung von x im q-adischen Zahlensystem (= *das Zahlensystem zur Basis* q). Die Identität (2.37) wird in Kurzform wie folgt geschrieben:

$$x = a_n a_{n-1} ... a_0 \quad \text{oder} \quad x = (a_n a_{n-1} ... a_0)_q .$$

(mit dem Produkt nicht zu verwechseln).

Die Zahlen $\{0, ..., q-1\}$ heißen *q-adische Ziffern.* Die Zahl a_k heißt der *Ziffernwert* an der Stelle k, und q^k heißt der *Stellenwert* an der Stelle k. Die Ziffer a_n an der höchstwertigen Stelle n muß immer positiv sein.

Die gängigsten Basen sind $q = 2$ (Dualsystem), $q = \text{zehn} := 9 + 1$ (Dezimalsystem) und $q = \text{sechzehn} := \text{zehn} + 6$ (Hexadezimalsystem).

Im Dualsystem gibt es nur zwei Ziffern 0 und 1. Die Zahlen $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ werden im Dualsystem wie folgt dargestellt:

$$1_2,\ 10_2,\ 11_2,\ 100_2,\ 101_2,\ 110_2,\ 111_2,\ 1000_2,\ 1001_2,$$

z.B.

$$110_2 = 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 = 2 + 4 = 6.$$

Die Ziffern im Dezimalsystem sind $0, 1, 2, ..., 9$. Im Hexadezimalsystem sind die Ziffern $0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F$, wobei die Buchstaben die Ziffern zwischen zehn und fünfzehn bezeichnen. Zum Beispiel, es gilt

$$C3F_{\text{hex}} = \left(F + 3q + Cq^2\right)_{\text{hex}} = \left(15 + 3 \cdot 16 + 12 \cdot 16^2\right)_{\text{dez}} = 3135_{\text{dez}}.$$

Der Satz 2.25 bedeutet, dass jede natürliche Zahl sich im q-adischen System eindeutig darstellen lässt. Für den Beweis brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.26 (Ganzzahlige Division) *Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ existiert genau ein $y \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \{0, ..., q-1\}$ mit*

$$x = qy + r. \tag{2.38}$$

Diese Darstellung heißt die *ganzzahlige Division* von x durch q. Die Zahl y heißt der *Quotient* und r heißt der *Rest* der ganzzahligen Division.

Beweis. Für die Existenz setzen wir $y = \left[\frac{x}{q}\right]$ (=die Gaußklammer von $\frac{x}{q}$, siehe Satz 2.9), so dass

$$y \leq \frac{x}{q} < y + 1.$$

Es folgt, dass

$$qy \leq x < qy + q,$$

und somit

$$0 \leq x - qy < q.$$

Setzen wir

$$r := x - qy,$$

so dass (2.38) erfüllt ist. Die Zahl r ist ganz und erfüllt $0 \leq r < q$, woraus folgt

$$r \in \{0, ..., q-1\}.$$

Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, dass es noch eine solche Darstellung

$$x = qy' + r'$$

gibt. Daraus folgt, dass

$$r - r' = q(y - y').$$

Ist $y \neq y'$, z.B. $y > y'$, so gilt $y - y' \geq 1$ und $q(y - y') \geq q$ während $r - r' \leq q - 1$. Somit ist $y = y'$ und dann auch $r = r'$. ■

Im nächsten Beweis benutzen wir die folgende Variante des Induktionsprinzips.

Satz 2.27 (Induktionsprinzip "von $< n$ nach n") *Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, die die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:*

(*i*) *$A(1)$ ist wahr;*

(*ii*) *für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt: ist $A(k)$ wahr für alle $k < n$, so ist $A(n)$ auch wahr.*

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Bezeichnen with mit $B(n)$ die Aussage, dass $A(k)$ für alle natürlichen Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist. Beweisen wir per Induktion nach n, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, woraus gleiches auch für $A(n)$ folgen wird.

Induktionsanfang: $B(1)$ ist äquivalent zu $A(1)$ und somit ist wahr nach (i).

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Beweisen wir, dass $B(n) \Rightarrow B(n+1)$. Ist $B(n)$ wahr, so ist $A(k)$ wahr für alle $k \leq n$, d.h. für alle $k < n+1$ (siehe Korollar 2.6). Nach (ii) ist dann $A(n+1)$ auch wahr. Somit ist $A(k)$ wahr für alle $k \leq n+1$, was bedeutet, dass $B(n+1)$ wahr ist. Nach dem Induktionsprinzip des Satzes 2.2 beschließen wir, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. ■

Beweis von dem Satz 2.25. Zunächst beweisen wir per Induktion nach $x \in \mathbb{N}$ die Existenz der q-adischen Darstellung (2.37). Bezeichnen wir mit $A(x)$ die Aussage, dass eine q-adische Darstellung von x existiert. Induktionsanfang für $x = 1$: (2.37) ist erfüllt mit $n = 0$ und $a_0 = 1$.

Induktionsschritt von $< x$ nach x bedeutet folgendes: angenommen, dass $A(y)$ für alle $y < x$ gilt, zu beweisen, dass $A(x)$ gilt. So, nehmen wir an, dass es für jedes $y \in \mathbb{N}$ mit $y < x$ eine q-adische Darstellung gibt, und beweisen wir die Existenz der q-adischen Darstellung für x.

Wir benutzen die ganzzahlige Division von x durch q, d.h. die Identität (2.38). Ist $y = 0$ so ist $x = a_0$ mit $a_0 = r$ die q-adische Darstellung von x. Sonst gilt $1 \leq y < x$ und nach Induktionsvoraussetzung hat y eine q-adische Darstellung

$$y = \sum_{k=0}^{m} b_k q^k.$$

Einsetzen in (2.38) ergibt eine q-adische Darstellung von x wie folgt:

$$\begin{aligned} x = r + qy &= r + q \sum_{k=0}^{m} b_k q^k \\ &= r + \sum_{k=0}^{m} b_k q^{k+1} \\ &= r + \sum_{l=1}^{m+1} b_{l-1} q^l \\ &= a_0 + \sum_{l=1}^{m+1} a_l q^l = \sum_{l=0}^{n} a_l q^l, \end{aligned}$$

wobei $a_0 = r$, $a_l = b_{l-1}$ für $l \geq 1$, und $n = m + 1$.

Beweisen wir jetzt die Eindeutigkeit der q-adischen Darstellung (2.37), auch per Induktion nach x. Für $x < q$ gibt es nur eine Darstellung $x = a_0$ mit $n = 0$ (ist $n \geq 1$ so gilt $x \geq a_n q^n \geq q$). Sei $x \geq q$. Dann $n \geq 1$ und wir haben

$$x = a_n q^n + ... + a_1 q_1 + a_0 = q\left(a_n q^{n-1} + ... + a_1\right) + a_0 = qy + a_0,$$

wobei

$$y = a_n q^{n-1} + ... + a_1. \tag{2.39}$$

Da $x = qy + a_0$ die ganzzahlige Division ist, so sind y und a_0 eindeutig bestimmt. Da $y < x$, so ist die q-adische Darstellung (2.39) von y eindeutig bestimmt nach der Induktionsvoraussetzung, woraus folgt, dass der Wert von n und alle Ziffern $a_1, ..., a_n$ auch eindeutig bestimmt sind. ■

Die q-adische Darstellung von reellen Zahlen (Kommazahlen) wird später besprochen.

2.13 * Schriftliche Addition und Multiplikation

Wir besprechen kurz schriftliche Addition und Multiplikation mit Hilfe von q-adischer Darstellung. Betrachten wir zwei natürliche Zahlen im q-adischen System

$$x = (a_n...a_0)_q = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k$$

und

$$y = (b_m...b_0)_q = \sum_{k=0}^{m} b_k q^k.$$

Ist $n > m$ so erweitern wir die Folge $\{b_k\}_{k=0}^m$ zu $\{b_k\}_{k=0}^n$ indem wir $b_k = 0$ für alle $k > m$ setzen. Im Fall $n < m$ erweitern wir analog $\{a_k\}_{k=0}^n$. So, ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $n = m$. Die schriftliche Addition basiert auf der offensichtlichen Identität

$$x + y = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k + \sum_{k=0}^{n} b_k q^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) q^k,$$

d.h.

$$x + y = \sum_{k=0}^{n} c_k q^k, \tag{2.40}$$

wobei $c_k = a_k + b_k$. Gilt $c_k \leq q - 1$ für alle k, so erhalten wir schon die q-adische Darstellung von $x + y$:

$$x + y = (c_n...c_0)_q.$$

Gibt es ein k mit $c_k \geq q$, so setzen wir

$$l = \min\{k : c_k \geq q\}.$$

Ganzzahlige Division von c_l durch q ergibt

$$c_l = dq + r,$$

wobei $r \in \{0, ..., q-1\}$ and $d \in \mathbb{N}$ (übrigens ist $d = 1$ da $c_l = a_l + b_l < 2q$). Somit gilt

$$c_l q^l = rd^l + dq^{l+1},$$

und man ersetzt zwei Glieder in der Summe (2.40) wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} c_l q^l & \text{durch} & rq^l \\ c_{l+1} q^{l+1} & \text{durch} & (c_{l+1} + d)\, q^{l+1} \end{array}$$

so dass der Wert der Summe bleibt unverändert und der Koeffizient vor q^l schon $\leq q-1$ ist. Dieses Verfahren heißt *Übertrag* von d von der Stelle l nach der Stelle $l+1$. Dann holt man Überträge in den höheren Stellen wieder bis alle Koeffizienten $\leq q-1$ sind.

Für dieses Verfahren braucht man die *Additionstabelle* im Voraus zu erstellen, d.h. alle Summen $a + b$ mit den Ziffern $a, b \in \{0, ..., q-1\}$ im Voraus zu wissen.

Die schriftliche Multiplikation basiert auf der Identität

$$\begin{aligned} xy &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k q^k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l q^l\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} a_k b_l q^{k+l} \end{aligned} \tag{2.41}$$

(siehe Aufgabe 37). Um $a_k b_l$ berechnen zu können braucht man zunächst die *Multiplikationstabelle* für alle Produkte ab mit den Ziffern $a, b \in \{0, ..., q-1\}$. Diese Tabelle wird mit Hilfe der Identität

$$ab = \sum_{k=1}^{a} b = \underbrace{b + ... + b}_{a \text{ mal}}$$

erstellt. Die Doppelsumme (2.41) lässt sich wie folgt umformen:

$$xy = \sum_{j=0}^{N} c_j q^j,$$

wobei $c_j \in \mathbb{Z}_+$. Dann benutzt man Überträge wie oberhalb um alle Koeffizienten $\leq q-1$ zu machen.

2.14 * Alternative Konstruktionen von $\mathbb{R}$

Wir haben die Theorie mit den Axiomen von reellen Zahlen angefangen. Hier besprechen wir kurz andere Konstruktionen von reellen Zahlen, wenn man mit den natürlichen und ganzen Zahlen anfängt und nur danach die reellen Zahlen definiert. Es gibt zwei Ansätze für Einführung von natürlichen Zahlen.

Peano-Axiome für natürliche Zahlen

In diesem Ansatz wird die Menge $\mathbb{N}$ axiomatisch mit Hilfe von *Peano-Axiomen* definiert.

Eine Menge $\mathbb{N}$ heißt die Menge von natürlichen Zahlen und die Elemente von $\mathbb{N}$ heißen natürliche Zahlen, wenn es eine Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, die die folgenden Axiome erfüllt:

1. F ist injektiv (d.h. $F(n) = F(m) \Rightarrow n = m$).

2. Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{N}$ das nicht zum Bild von F gehört (d.h. $F(n) \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$).

3. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) $1 \in M$;

   (b) $n \in M \Rightarrow F(n) \in M$.

   Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Die Zahl $F(n)$ heißt der Nachfolger von n und entspricht zu $n+1$. Das dritte Axiom ist genau das Induktionsprinzip.

Man definiert die Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen per Induktion wie folgt:

1. $n + 1 := F(n)$

2. $n + F(m) := F(n + m)$

3. $n \cdot 1 := n$

4. $nF(m) := (nm) + m$.

Die Ungleichheit ist wie folgt definiert: $n < m$ gilt genau dann, wenn $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiter werden die üblichen Eigenschaften von Addition, Multiplikation und Ungleichheit bewiesen.

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen

In diesem Ansatz definiert man die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen von endlichen Mengen. Man sagt, dass eine Menge M endlich ist, wenn M zu keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist. Die natürlichen Zahlen (inklusive Null) lassen sich als die Kardinalzahlen von endlichen Mengen definieren, d.h. als Äquivalenzklassen von gleichmächtigen Mengen. Mit anderen Worten, alle gleichmächtigen endlichen Mengen stellen eine natürliche Zahl dar.

Man definiert die Zahl 0 als die Kardinalzahl der leeren Menge $\emptyset$. Betrachten wir die Menge $A = \{\emptyset\}$ und definieren die Zahl 1 als die Kardinalzahl von A. Sei eine natürliche Zahl n schon definiert als die Kardinalzahl einer Menge N. Dann definieren wir den Nachfolger $n + 1$ als die Kardinalzahl der Menge $M = N \cup \{N\}$, wobei $\{N\}$ die Menge aus einem Element N ist (Nach einem von Axiomen von Mengenlehre, gilt $N \notin N\}$. Zum Beispiel, 2 ist die Kardinalzahl der Menge $B = A \cup \{A\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, die Zahl 3 ist die Kardinalzahl der Menge $C = B \cup \{B\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, usw.

Alternativ kann man Potenzmengen benutzen um höhere natürliche Zahlen zu erhalten. Definieren wir die Menge A als die Potenzmenge der Menge $\emptyset$, d.h. $A = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ und die Zahl 1 als die Kardinalzahl von A. Sei B die Potenzmenge von A, d.h. $B = \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$. Dann definieren wir 2 als die Kardinalzahl von B. Sei D die Potenzmenge von B, d.h. $D = \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{A\}, B\}$. Dann definieren wir 4 als die Kardinalzahl von D, usw. Mit Hilfe von weiteren Potenzmengen können wir beliebig große endliche Mengen konstruieren und somit die Existenz von beliebig großen natürlichen Zahlen zeigen.

Um die Operationen $+$ und $\cdot$ auf den natürlichen Zahlen definieren benutzt man die Identitäten (2.17) und (2.19). Die Ungleichung $<$ wird wie folgt definiert: ist N eine echte Teilmenge einer endlichen Menge M, so ist die Kardinalzahl von N kleiner als die Kardinalzahl von M. Dann beweist man alle notwendigen Eigenschaften von Addition, Multiplikation und Anordnung.

Ganze und rationale Zahlen

Nach der Einführung von $\mathbb{N}$ definiert man die negativen Zahlen, die Null und die Menge $\mathbb{Z}$ als die Vereinigung $\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) \cup \{0\}$, und auch die Operationen in $\mathbb{Z}$.

Weiter definiert man die *Brüche* $\frac{p}{q}$ als Paaren (p, q) von ganzen Zahlen mit $q \neq 0$. Die zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ heißen äquivalent, wenn $pq' = qp'$. Die Menge von Äquivalenzklassen von Brüchen bezeichnet man mit $\mathbb{Q}$, und die Elemente von $\mathbb{Q}$ heißen die rationalen Zahlen. Jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ lässt sich als Element von $\mathbb{Q}$ betrachten mit Hilfe der Zuordnung $n \mapsto \frac{n}{1}$.

Man definiert die Summe und das Produkt von Brüchen mit

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$
2. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Auch definiert man die Ungleichheit $<$ auf $\mathbb{Q}$: die Ungleichung $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ mit positiven b und d gilt genau dann wenn $ad < bc$. Für negativen Werten von den Nennern gibt es eine offensichtliche Modifikation.

Man zeigt, dass die Operationen $+, \cdot$ und die Relation $<$ auch für Äquivalenzklassen wohldefiniert sind und mit den Operationen $+, \cdot$ bzw mit der Relation $<$ auf $\mathbb{Z}$ kompatibel sind. Die so definierte Menge $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper. Allerdings erfüllt $\mathbb{Q}$ das Vollständigkeitsaxiom nicht.

Reelle Zahlen als Dedekindsche Schnitte

Eine Teilmenge S von $\mathbb{Q}$ heißt *Dedekindscher Schnitt* wenn

1. S ist nicht leer und ist nach oben beschränkt;
2. ist $x \in S$, so gilt auch $y \in S$ für alle $y < x$;
3. S hat kein maximales Element.

Zu jedem $a \in \mathbb{Q}$ entspricht ein Dedekindscher Schnitt

$$S_a = \{x \in \mathbb{Q} : x < a\}.$$

Aber es gibt die Schnitte, die keiner rationalen Zahl entsprechen, zum Beispiel

$$S = \left\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \quad \vee \quad x^2 < 2\right\}$$

(hätten wir $\sqrt{2}$ schon definiert, so könnten wir diesen Schnitt als

$$S = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2} \right\}$$

darstellen).

Die Dedekindschen Schnitten von $\mathbb{Q}$ heißen die reellen Zahlen und die Menge von den reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Die Zuordnung $a \mapsto S_a$ erlaubt uns die rationalen Zahlen als Elemente von $\mathbb{R}$ zu identifizieren.

Man definiert die Operationen $+, \cdot$ und die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$. Zum Beispiel, für Schnitte S und T ist ihre Summe der folgende Schnitt:

$$S + T = \{x + y : x \in S, \, y \in T\} .$$

Die Ungleichung $S \leq T$ gilt genau dann, wenn

$$\forall x \in S \;\; \exists y \in T \;\; x \leq y.$$

Man beweist, dass alle Axiome von $\mathbb{R}$ erfüllt sind, insbesondere das Vollständigkeitsaxiom.

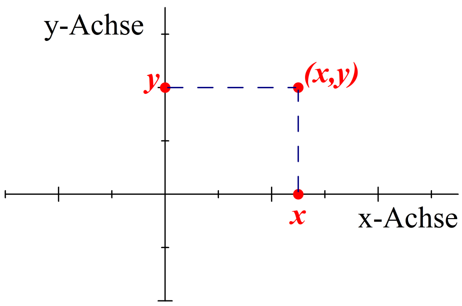
Chapter 3

Komplexe Zahlen

3.1 Die Menge von komplexen Zahlen

Die Produktmenge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ heißt die Ebene. Die Elemente von der Ebene sind die Paaren (x, y) von reellen Zahlen, und sie werden auch *Punkte* genannt. Die Zahlen x und y heißen die (kartesischen) *Koordinaten* oder *Komponenten* von dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Man stellt die Ebene als Produkt von zwei Geraden (=zwei Kopien von $\mathbb{R}$) dar: eine ist waagerecht und heißt die x-Achse, und andere ist senkrecht und heißt die y-Achse.



In der Ebene $\mathbb{R}^2$ werden Addition und Multiplikation definiert wie folgt.

Definition. Die Menge $\mathbb{C}$ von *komplexen Zahlen* ist die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den folgenden Operationen $+$ und $\cdot$:

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen komplexe Zahlen.

Zum Beispiel,

$$(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$$

so dass $(0, 0)$ das Nullelement für Addition ist, und

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$$

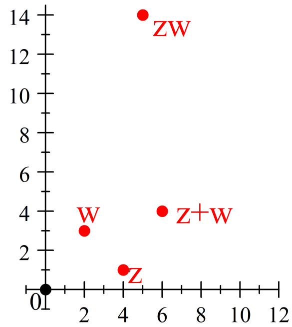
so dass $(1, 0)$ das Einheitselement für Multiplikation ist.

Beispiel. Für die komplexen Zahlen $z = (4, 1)$ und $w = (2, 3)$ berechnen wir:

$$z + w = (4, 1) + (2, 3) = (6, 4)$$

und

$$z \cdot w = (4, 1) \cdot (2, 3) = (4 \cdot 2 - 1 \cdot 3,\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = (5, 14) .$$



Satz 3.1 *Die Addition von komplexen Zahlen erfüllt alle Axiome von Addition: Kommutativ- und Assoziativgesetze, Existenz von Nullelement und Negative.*

Somit ist $\mathbb{C}$ eine kommutative Gruppe bezüglich Addition.

Beweis. Das Nullelement ist $(0, 0)$ und das Negative von $z = (x, y)$ ist

$$-z := (-x, -y) ,$$

da $z + (-z) = 0$. Die Kommutativ- und Assoziativgesetze für komplexe Zahlen, d.h. die Identitäten

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{und} \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

folgen aus den Axiomen der Addition in $\mathbb{R}$, da Addition komplexer Zahlen komponentenweise definiert ist ■

Für die komplexen Zahlen der Form $(x, 0)$ gelten die Regeln

$$\begin{aligned} (x, 0) + (x', 0) &= (x + x', 0) \\ (x, 0) \cdot (x', 0) &= (xx', 0) . \end{aligned}$$

Wir identifizieren[1] jede reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$ und somit betrachten weiter die Menge $\mathbb{R}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wichtig ist, dass die Operationen Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ übereinstimmen.

Somit wird die komplexe Zahl $(x, 0)$ einfach mit x bezeichnen. Insbesondere wird das Nullelement $(0, 0)$ mit 0 bezeichnet, und das Einheitselement $(1, 0)$ – einfach mit 1.

Die komplexe Zahl $(0, 1)$ ist besonders wichtig und wird mit i bezeichnet.

[1] Logisch bedeutet das, dass wir die Menge $\mathbb{R}$ durch die Menge $\mathbb{R}' = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ersetzen und $\mathbb{R}'$ in $\mathbb{R}$ umbenennen.

Definition. Die Zahl $i = (0, 1)$ heißt die *imaginäre Einheit*.

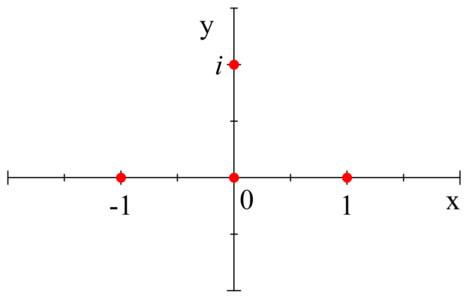
Nach Definition der Multiplikation haben wir

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

so that

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

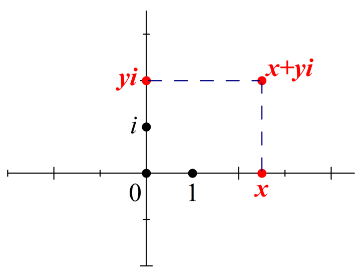
Diese Identität ist eine von Motivationen die Menge von reellen Zahlen zu erweitern, da es in $\mathbb{R}$ keine Zahl x mit $x^2 = -1$ gibt.



Bemerken wir, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{C}$

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \cdot (0, 1) = x + yi.$$

Somit lässt sich jede komplexe Zahl (x, y) in der Form $x + yi$ (oder $x + iy$) darstellen. Diese Darstellung heißt die *algebraische* (oder kartesische) Form der komplexen Zahl. Die komplexen Zahlen der Form yi heißen *imaginär*. Jede komplexe Zahl ist somit die Summe der reellen Zahl und imaginären Zahlen.



Für jede komplexe Zahl $z = x+yi$ heißt die Komponente x *Realteil* und y – *Imaginärteil* von z. Man schreibt:

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{und} \quad y = \operatorname{Im} z,$$

so dass

$$z = \operatorname{Re} z + (\operatorname{Im} z)\, i.$$

Offensichtlich ist z reell genau dann, wenn $\operatorname{Im} z = 0$ und imaginär – wenn $\operatorname{Re} z = 0$.

In der algebraischen Form sehen die Rechenregeln von komplexen Zahlen wie folgt aus:

$$\boxed{(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')\,i}$$

und

$$\boxed{(x+yi)\,(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+x'y)\,i}.$$

Man addiert und multipliziert die Ausdrücke $x+yi$ und $x'+y'i$ genau so, als ob i reell wäre, aber mit der zusätzlichen Regel $i^2=-1$.

Beispiel. Für $z=4+i$ und $w=2+3i$ gilt

$$z+w=(4+i)+(2+3i)=6+4i$$

und

$$zw=(4+i)\,(2+3i)=(4\cdot 2-1\cdot 3)+\ (4\cdot 3+1\cdot 2)\,i=5+14i.$$

3.2 Eigenschaften von Multiplikation

Hier beweisen wir weitere Eigenschaften der Multiplikation.

Satz 3.2 *Multiplikation von komplexen Zahlen erfüllt die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, d.h. für alle $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ gelten die folgenden Identitäten:*

(a) $z_1z_2=z_2z_1$ *(Kommutativgesetz)*

(b) $(z_1z_2)\,z_3=z_1\,(z_2z_3)$ *(Assoziativgesetz)*

(c) $(z_1+z_2)\,z_3=z_1z_3+z_2z_3$ *(Distributivgesetz)*

Somit gelten in $\mathbb{C}$ alle Axiome von Addition und Multiplikation außer Existenz von Inverse, was später bewiesen wird.

Beweis. Setzen wir $z_k=x_k+iy_k$ wobei $x_k,\ y_k\in\mathbb{R}$.

(a) Wir haben nach Definition

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)\,(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)\,i$$

und

$$z_2z_1=(x_2+y_2i)\,(x_1+y_1i)=(x_2x_1-y_2y_1)+(x_2y_1+y_2x_1)\,i,$$

so dass $z_1z_2=z_2z_1$ nach dem Kommutativgesetz in $\mathbb{R}$.

(c) Wir haben

$$z_1z_3=(x_1x_3-y_1y_3)+(x_1y_3+y_1x_3)\,i$$

und

$$z_2z_3=(x_2x_3-y_2y_3)+(x_2y_3+y_2x_3)\,i,$$

woraus folgt

$$z_1z_3+z_2z_3=x_1x_3-y_1y_3+x_2x_3-y_2y_3$$

$$
\begin{aligned}
&+ (x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_3 + y_2x_3)\, i \\
&= (x_1 + x_2)\, x_3 - (y_1 + y_2)\, y_3 \\
&+ ((x_1 + x_2)\, y_3 + (y_1 + y_2)\, x_3)\, i \\
&= (z_1 + z_2)\, z_3,
\end{aligned}
$$

wobei wir das Distributivgesetz in $\mathbb{R}$ benutzt haben,

(b) Jetzt beweisen das Assoziativgesetz

$$(z_1z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2z_3)\,. \tag{3.1}$$

Fixieren wir zuerst z_2 und z_3 und bemerken folgendes: gilt (3.1) für $z_1 = a$ und für $z_1 = b$ so gilt (3.8) auch für $z = a + b$, da nach dem Distributivgesetz

$$((a + b)\, z_2)\, z_3 = (az_2 + bz_2)\, z_3 = (az_2)\, z_3 + (bz_2)\, z_3 = a\, (z_2z_3) + b\, (z_2z_3) = (a + b)\, (z_2z_3)\,.$$

Da z_1 sich in der From $x_1 + iy_1$ darstellen lässt, wobei $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, so reicht es (3.1) für $z_1 = x_1$ und $z_1 = iy_1$ zu beweisen. Analog reicht es (3.1) für $z_2 = x_2$ und $z_2 = iy_2$, und für $z_3 = x_3$ und $x_3 = iy_3$ zu beweisen, wobei $x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}$. Es gibt insgesamt 8 Kombinationen dieser Werte von z_1, z_2, z_3:

Fall	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_1 =$	x_1	iy_1	x_1	iy_1	x_1	iy_1	x_1	iy_1
$z_2 =$	x_2	x_2	iy_2	iy_2	x_2	x_2	iy_2	iy_2
$z_3 =$	x_3	x_3	x_3	x_3	iy_3	iy_3	iy_3	iy_3

,

und es reicht (3.1) für diese 8 Kombinationen zu beweisen. Zum Beispiel, im Fall 4 erhalten wir

$$(z_1z_2)\, z_3 = (iy_1 \cdot iy_2) \cdot x_3 = -(y_1y_2)\, x_3$$

und

$$z_1\, (z_2z_3) = iy_1 \cdot (iy_2 \cdot x_3) = iy_1 \cdot iy_2x_3 = -y_1\, (y_2x_3)$$

so dass (3.1) aus dem Assoziativgesetz für reelle Zahlen folgt. Genau so betrachtet man alle anderen Fälle.

Zweiter Beweis. Wir haben

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\, i$$

und somit

$$
\begin{aligned}
(z_1z_2)\, z_3 &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\, i)\, (x_3 + iy_3) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2)\, x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)\, y_3 \\
&+ ((x_1x_2 - y_1y_2)\, y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)\, x_3)\, i \\
&= x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 \\
&+ (x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)\, i.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Andererseits gilt

$$z_1\, (z_2z_3) = (z_2z_3)\, z_1,$$

und den ähnlichen Ausdruck von $(z_2 z_3)\, z_1$ erhält man aus (3.2) bei dem folgenden Wechsel (Permutation) von den Indizen:

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1.$$

Der Realteil von $(z_1 z_2)\, z_3$ ändert sich bei diesem Wechsel wie folgt:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\operatorname{Re}((z_1 z_2)\, z_3) = & x_1 x_2 x_3 & - & \underline{y_1 y_2 x_3} & - & \underline{\underline{x_1 y_2 y_3}} & - & \underline{\underline{\underline{y_1 x_2 y_3}}} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Re}((z_2 z_3)\, z_1) = & x_2 x_3 x_1 & - & \underline{\underline{y_2 y_3 x_1}} & - & \underline{\underline{\underline{x_2 y_3 y_1}}} & - & \underline{y_2 x_3 y_1}
\end{array}$$

und man sieht in den beiden Zeilen die gleichen Glieder, so dass

$$\operatorname{Re}((z_1 z_2)\, z_3) = \operatorname{Re}((z_2 z_3)\, z_1) = \operatorname{Re}(z_1 (z_2 z_3)).$$

Das Gleiche gilt für den Imaginärteil, woraus (3.1) folgt. ■

22.11.2024 Vorlesung 13

3.3 Konjugation

Für komplexe Zahlen gibt es eine neue Operation – die *Konjugation*.

Definition. Für jede komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir die *Konjugierte* $\overline{z}$ durch

$$\boxed{\overline{z} = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z}.$$

Z.B. es gilt $\overline{z} = z$ für alle reelle z, $\overline{z} = -z$ für imaginäre z, und $\overline{\overline{z}} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 3.3 *Für Konjugation gelten die folgenden Identitäten, für alle* $z, w \in \mathbb{C}$*:*

(a) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$

(b) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

(c) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (Additivität)

(d) $\overline{zw} = \overline{z}\, \overline{w}$ (Multiplikativität)

Beweis. $(a) + (b)$ Setzen wir $z = x + iy$. Dann gilt $\overline{z} = x - iy$ und

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z$$

und

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = \left(x^2 + y^2\right) + i (xy - xy) = x^2 + y^2.$$

Ein alternativer Beweis:

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2.$$

$(c)+(d)$ Sei $w=u+iv$. Für die Summe haben wir

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{(x+u)+i\,(y+v)} = (x+u)-i\,(y+v)\\ &= (x-iy)+(u-iv) = \overline{z}+\overline{w}.\end{aligned}$$

Für das Produkt gilt

$$zw = (x+iy)\,(u+iv) = (xu-yv)+i\,(xv+yu)\,,$$

und

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x-iy)\,(u-iv) = (xu-yv)-i\,(xv+yu) = \overline{zw}$$

was zu beweisen war. ■

3.4 Betrag

Der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x erfüllt die folgende Identität:

$$|x| = \sqrt{x^2}, \tag{3.3}$$

weil für $x\geq 0$ gilt $\sqrt{x^2}=x=|x|$, und für $x<0$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|\,.$$

Die Identität (3.3) lässt sich als eine äquivalente Definition des Betrages betrachten.
Definition. Für jede komplexe Zahl $z=x+iy$ definieren wir den Betrag $|z|$ mit

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}}}.$$

Nach dem Satz 3.4 ist $z\overline{z}$ eine nicht negative reelle Zahl, so dass $\sqrt{z\overline{z}}$ wohldefiniert ist.

Für $z\in\mathbb{R}$ stimmt diese Definition des Betrages mit dem Definition des Betrages für reellen Zahlen überein, da in diesem Fall $\overline{z}=z$.

Nach dem Satz 3.3 gilt für $x=x+iy$ die Identität

$$\boxed{|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}}, \tag{3.4}$$

Insbesondere gilt immer $|z|\geq 0$, und $|z|=0$ genau dann, wenn $z=0$.

Es folgt aus (3.4), dass

$$\boxed{|z|^2 = z\overline{z}}.$$

Da $\overline{\overline{z}}=z$, so erhalten wir daraus, dass

$$|\overline{z}| = |z|\,.$$

Es ist klar aus (3.4), dass

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|\,,$$

Satz 3.4 *Der Betrag hat die folgenden Eigenschaften, für alle $z, w \in \mathbb{C}$:*

(a) $|zw| = |z|\,|w|$ (Multiplikativität)

(b) $|z + w| \le |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. (a) Nach Multiplikativität der Konjugation erhalten wir

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\overline{z}\,\overline{w} = (z\overline{z})\,(w\overline{w}) = |z|^2\,|w|^2 = (|z|\,|w|)^2\,,$$

woraus $|zw| = |z|\,|w|$ folgt.

(b) Bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\,\overline{(z+w)} \\ &= (z+w)\,(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2\,,\end{aligned} \tag{3.5}$$

wo wir benutzt haben, dass

$$\overline{z\overline{w}} = \overline{z}\,\overline{\overline{w}} = w\overline{z}.$$

Da $\mathrm{Re}\,z \le |z|$, so erhalten wir weiter

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + 2\,|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\,,$$

woraus die Dreiecksungleichung folgt. ■

Mit Hilfe von Betrag definiert man auf der Ebene den Begriff von Abstand.

Definition. Für alle $a, b \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definieren wir den *Abstand* $d\,(a,b)$ zwischen a und b wie folgt:

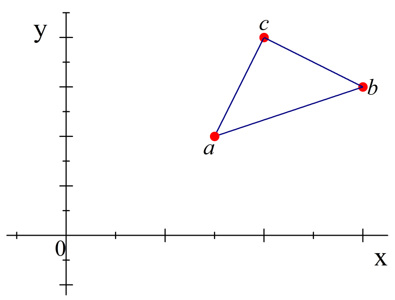
$$d\,(a,b) = |a - b|\,. \tag{3.6}$$

Satz 3.5 *Der Abstand d hat die folgenden Eigenschaften für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$:*

(i) $d\,(a,a) = 0$ *und* $d\,(a,b) > 0$ *für* $a \ne b$ (Positivität)*;*

(ii) $d\,(a,b) = d\,(b,a)$ (Symmetrie)*;*

(ii) $d\,(a,b) \le d\,(a,c) + d\,(c,b)$ *für alle* $a, b, c \in \mathbb{C}$ (Dreiecksungleichung).



Beweis. Die Eigenschaften (i) und (ii) sind offensichtlich. Die Eigenschaft (iii) folgt aus dem Satz 3.4(b):

$$d\left(a,b\right)=\left|a-b\right|=\left|\left(a-c\right)+\left(c-b\right)\right|\leq\left|a-c\right|+\left|c-b\right|=d\left(a,c\right)+d\left(c,b\right).$$

■

Dieses Argument erklärt warum man die Ungleichung $|z+w|\leq|z|+|w|$ auch die Dreiecksungleichung nennt.

Bemerkung. Sei $a=a_1+a_2i$, $b=b_1+b_2i$ und $c=c_1+c_2i$. Dann lässt sich die Dreiecksungleichung wie folgt umformulieren:

$$\sqrt{\left(a_1-b_1\right)^2+\left(a_2-b_2\right)^2}\leq\sqrt{\left(a_1-c_1\right)^2+\left(a_2-c_2\right)^2}+\sqrt{\left(b_1-c_1\right)^2+\left(b_2-c_2\right)^2}.$$

Die Ungleichung gilt für alle reellen a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 und ihr direkter Beweis (ohne komplexe Zahlen) ist hoch nichttrivial.

Bemerkung. Sei X eine beliebige Menge. Jede Funktion $d:X\times X\to\mathbb{R}$ die (i), (ii) und (iii) für alle $a,b,c\in X$ erfüllt, heißt eine *Abstandsfunktion* oder eine *Metrik* auf der Menge X. Das Paar (X,d) heißt in diesem Fall ein *metrischer Raum*. Insbesondere ist $(\mathbb{C},d)$ mit der Metrik (3.6) ein metrischer Raum.

3.5 Inverse und Division

Das Inverse von $z\in\mathbb{C}$ ist eine komplexe Zahl z^{-1} mit

$$zz^{-1}=z^{-1}z=1.$$

Im nächsten Satz beweisen wir die Existenz von Inverse und somit die Existenz von Division komplexer Zahlen.

Satz 3.6 (a) *Jedes $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ hat das Inverse wie folgt:*

$$\boxed{z^{-1}=\left|z\right|^{-2}\overline{z}}. \tag{3.7}$$

Es gilt auch

$$\left|z^{-1}\right|=\frac{1}{|z|}.$$

(b) *Für alle $a,b\in\mathbb{C}$ mit $a\neq0$ hat die Gleichung $aw=b$ eine eindeutige Lösung $w=a^{-1}b$, was mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet wird. Es gelten die Identitäten:*

$$\boxed{\frac{b}{a}=\left|a\right|^{-2}\bar{a}b\quad und\quad\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}}. \tag{3.8}$$

Beweis. (a) Wir haben

$$\left(|z|^{-2}\,\overline{z}\right) z = |z|^{-2}\left(\overline{z}z\right) = |z|^{-2}\,|z|^2 = 1,$$

so dass $|z|^{-2}\,\overline{z}$ das Inverse von z ist. Es folgt aus (3.7), dass

$$\left|z^{-1}\right| = |z|^{-2}\,|\overline{z}| = |z|^{-2}\,|z| = |z|^{-1},$$

was zu beweisen war.

(b) Die Gleichung $aw = b$ ist äquivalent zu

$$a^{-1}(aw) = a^{-1}b,$$

woraus $w = a^{-1}b$ folgt. Da $a^{-1} = |a|^{-2}\,\bar{a}$, so erhalten wir

$$w = |a|^{-2}\,\bar{a}b.$$

Auch gilt

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \left|a^{-1}b\right| = \left|a^{-1}\right|\,|b| = \frac{|b|}{|a|}.$$

■

Eine praktische Regel für Berechnung von $\frac{b}{a}$ ist wie folgt:

$$\frac{b}{a} = \frac{b\overline{a}}{a\overline{a}} = \frac{b\overline{a}}{|a|^2}, \tag{3.9}$$

d.h. den Nenner und Zähler mit der Konjugierte des Nenners zu multiplizieren. Division durch die reelle Zahl $|a|^2$ ist danach einfach.

Beispiel. Berechnen wir

$$\frac{4-3i}{1+2i}.$$

Nach (3.9) (was äquivalent zu (3.8) ist) erhalten wir

$$\frac{4-3i}{1+2i} = \frac{(4-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-2-11i}{1^2+2^2} = -\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i.$$

Wir sehen auch dass $|1+2i|^2 = 5$ uns somit $|1+2i| = \sqrt{5}$.

Korollar 3.7 $\mathbb{C}$ *ist ein Körper.*

Beweis. Nach dem Satz 3.1 erfüllt $\mathbb{C}$ die Axiome von Addition, und nach den Sätzen 3.2 und 3.6 erfüllt $\mathbb{C}$ die Axiome von Multiplikation. Somit ist C ein Körper. ■

Alle Eigenschaften von reellen Zahlen, die nur aus den Axiomen von Addition und Multiplikation hergeleitet wurden, gelten auch für komplexe Zahlen: z.B. die Definition und Identitäten von Potenzen z^n mit $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$, der binomische Lehrsatz, usw.

3.6 * Funktionen und ihre Graphen

Eine Funktion ist eine Abbildung $f : X \to Y$ wobei X und Y Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind. In diesem Abschnitt betrachten wir reellwertige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist oder eine Vereinigung von Intervallen.

Der *Graph* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist die folgende Menge:

$$G_f = \{(x, f(x)) \in I \times \mathbb{R}\} = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I,\ y = f(x)\right\}.$$

Mit anderen Worten, G_f ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die von der Gleichung $y = f(x)$ bestimmt wird.

Gerade und lineare Funktion

Gerade

Definition. *Gerade* ist eine Teilmenge L von $\mathbb{R}^2$ der Form

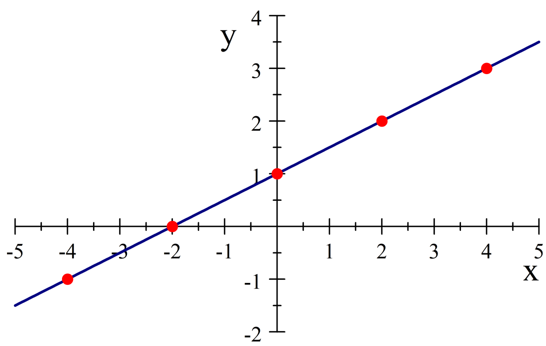
$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\right\}$$

wobei a, b, c gegebene reelle Zahlen mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sind. Man sagt, dass die Gerade L von der Gleichung

$$ax + by = c$$

bestimmt wird.

Z.B. die Gleichung $y = 0$ bestimmt die x-Achse, und die Gleichung $x = 0$ bestimmt die y-Achse, so dass die beiden Achsen Geraden sind. Die Gleichung $x - 2y = -2$ bestimmt die Gerade auf dem Bild unterhalb. Diese Gerade enthält, z.B., die Punkte $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 3)$ usw.



Lineare Funktion

Definition. *Lineare Funktion* ist eine Funktion der Form

$$f(x) = ax + b$$

mit reellen $a, b \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R}$.

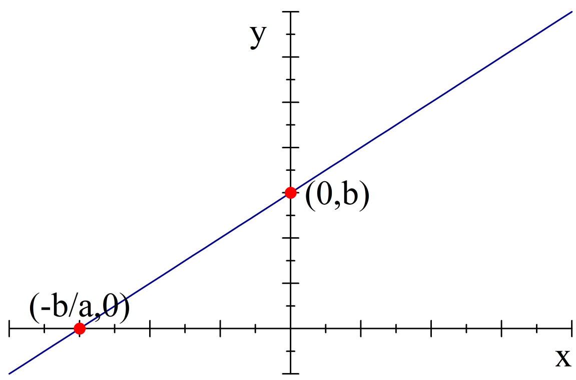
Der Graph G_f hat die Gleichung

$$y = ax + b, \tag{3.10}$$

was offensichtlich eine Gerade ist. Im Fall $a = 0$ ist diese Gerade waagerecht.

Sei $a \neq 0$. Offensichtlich liegen die folgenden zwei Punkten auf der Gerade G_f:

$$(0, b) \quad \text{und} \quad (-\frac{b}{a}, 0).$$



Potenzfunktion

Definition. *Potenzfunktion* is eine Funktion der Form

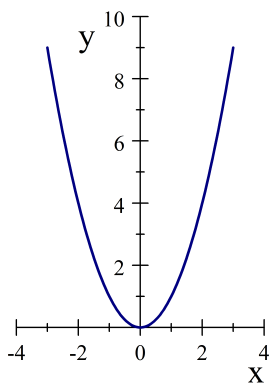
$$f(x) = x^n,$$

wobei n eine nicht Null ganze Zahl ist. Für $n > 0$ hat diese Funktion den Definitionsbereich $\mathbb{R}$, und für $n < 0$ ist der Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

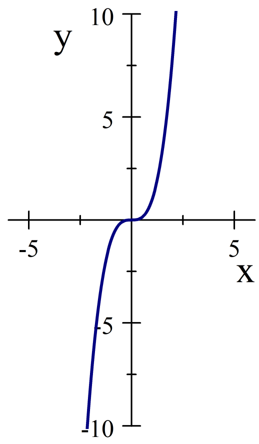
Im Fall $n = 1$ bekommen wir eine lineare Funktion.

Definition. Der Graph der Potenzfunktion mit $n \geq 2$ heißt *Parabel* n-ter Ordnung. Der Graph der Potenzfunktion mit $n < 0$ heißt *Hyperbel* $|n|$-ter Ordnung.

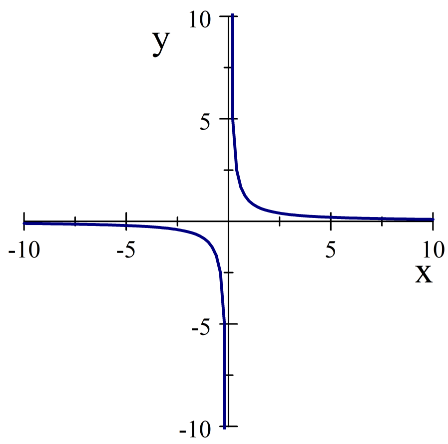
Hier ist die Parabel 2-ter Ordnung, d.h. der Graph der Funktion $y = x^2$:



Hier ist die Parabel 3-ter Ordnung, d.h. der Graph der Funktion $y = x^3$:



Hier ist die Hyperbel 1-ter Ordnung, d.h. der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$:



Kreis

Definition. Der *Einheitskreis* ist die folgende Menge:

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Z.B., die Punkte $1, -1, i, -i$ sind Elemente von $\mathbb{S}$. Auch der Punkt $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ liegt in $\mathbb{S}$.

Man sagt: die Gleichung von $\mathbb{S}$ ist $x^2 + y^2 = 1$. Die Menge $\mathbb{S}$ ist kein Graph einer Funktion, aber $\mathbb{S}$ lässt sich als Vereinigung zweier Graphen darstellen. Definieren wir zwei Funktionen:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

und

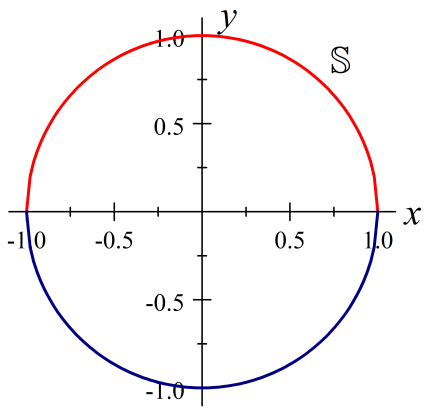
$$g(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1].$$

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist äquivalent zu

$$y = \sqrt{1-x^2} \ \text{ oder } \ y = -\sqrt{1-x^2}$$

und $x \in [-1,1]$, woraus folgt dass

$$\mathbb{S} = G_f \cup G_g.$$



Ein allgemeiner Kreis wird wie folgt definiert.

Definition. Der Kreis von Radius $r > 0$ und mit dem Mittelpunkt $c \in \mathbb{C}$ ist die Menge

$$K_{c,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| = r\}.$$

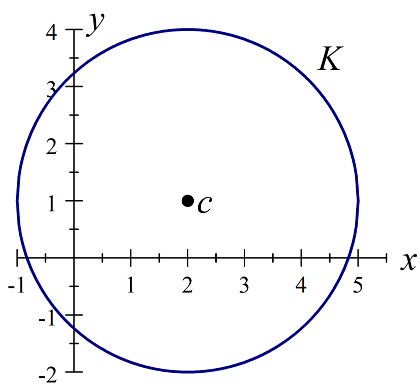
Im Fall $c = 0$ und $r = 1$ erhalten wir den Einheitskreis

$$\mathbb{S} = K_{0,1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Seien $c = a + bi$ und $z = x + yi$. Dann ist die Gleichung $|z - c| = r$ äquivalent zu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Hier ist der Kreis $K = K_{c,r}$ mit $c = 2 + i$ und $r = 3$:

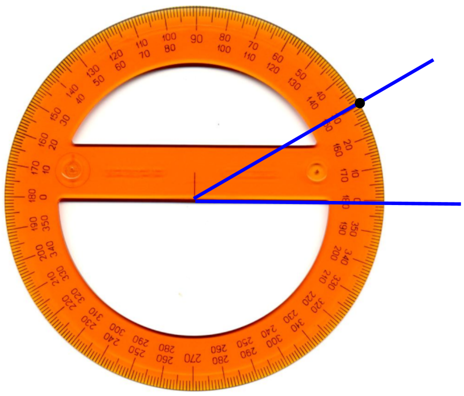


3.7 * Begriff von Winkel und Geometrie der Ebene

Winkel und Winkelfunktionen

Definition. Die Punkte von dem Einheitskreis $\mathbb{S}$ heißen *Polarwinkel* oder einfach *Winkel*.

Motivation für diese Definition von Winkel ist wie folgt. Normalerweise versteht man unter Winkel eine Figur aus zwei Halbgeraden mit gleichem Anfangspunkt. Die Winkel lassen sich messen, z.B. mit einem Winkelmesser.



Man richtet eine Gerade nach der Nullmarke des Gerätes, und dann zeigt die zweite Gerade den Punkt auf dem Kreis, neben denen das Gradmaß geschrieben ist. Deshalb identifizieren wir den Winkel mit einem Punkt auf dem Kreis. Eine Zuordnung zwischen den Punkten des Kreises und reellen Zahlen (Gradmaß) wird später bestimmt werden.

Obwohl $\mathbb{S}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, wir betrachten $\mathbb{S}$ unabhängig von $\mathbb{C}$ und sogar benutzen unterschiedliche Notation für die Elemente von $\mathbb{S}$ und $\mathbb{C}$. Insbesondere werden die Elemente von $\mathbb{S}$ mit griechischen Buchstaben bezeichnet und die Elemente von $\mathbb{C}$ – wie üblich mit lateinischen Buchstaben.

Zu jedem Polarwinkel $\alpha \in \mathbb{S}$ entspricht eine komplexe Zahl z_α, die α als Element von $\mathbb{C}$ darstellt. Eigentlich bezeichnen z_α und α den gleichen Punkt in $\mathbb{C}$ aber wir betrachten α als Element von $\mathbb{S}$ und z_α – als Element von $\mathbb{C}$.

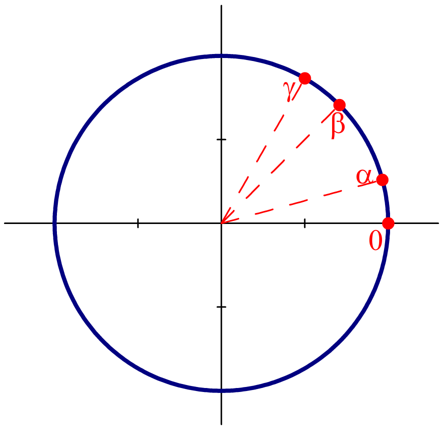
Definition. In $\mathbb{S}$ wird die Operation *Winkeladdition* wie folgt definiert: für $\alpha, \beta \in \mathbb{S}$ definieren wir den Winkel $\alpha + \beta \in \mathbb{S}$ durch die Identität

$$z_{\alpha+\beta} = z_\alpha z_\beta. \tag{3.11}$$

Bemerken wir, dass nach dem Satz 3.4 gilt

$$|z_\alpha z_\beta| = |z_\alpha| \, |z_\beta| = 1,$$

so dass $z_\alpha z_\beta$ wirklich einen Winkel bestimmt, der $\alpha + \beta$ genannt wird. Es folgt aus dem Satz 3.2, dass die Winkeladdition kommutativ und assoziativ ist.



$$\alpha + \beta = \gamma$$

Definieren wir den *Nullwinkel* $0 \in \mathbb{S}$ mit

$$z_0 = 1.$$

Dann gilt

$$\alpha + 0 = \alpha$$

da

$$z_{\alpha+0} = z_\alpha z_0 = z_\alpha \cdot 1 = z_\alpha.$$

Für jedes $\alpha \in \mathbb{S}$ definieren wir das *Negative* $-\alpha \in \mathbb{S}$ mit

$$z_{-\alpha} := (z_\alpha)^{-1} = \overline{z_\alpha}. \tag{3.12}$$

Nach dem Satz 3.6 gilt $\left|(z_a)^{-1}\right| = |z_\alpha|^{-1} = 1$ so dass $(z_\alpha)^{-1}$ einen Winkel bestimmt. In (3.12) haben wir auch benutzt, dass

$$(z_\alpha)^{-1} = |z_\alpha|^{-2}\,\overline{z_\alpha} = \overline{z_\alpha}.$$

Es gilt

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

da

$$z_{\alpha+(-\alpha)} = z_\alpha z_{-\alpha} = z_\alpha (z_\alpha)^{-1} = 1 = z_0.$$

Deswegen erfüllt die Winkeladdition alle Axiome von Addition, und somit ist $\mathbb{S}$ eine *additive Gruppe*.

Bezeichnen wir mit π den Winkel mit

$$\boxed{z_\pi = -1}.$$

Dann gilt

$$z_{-\pi} = \overline{z_\pi} = \overline{-1} = -1 = z_\pi,$$

so dass $-\pi = \pi$. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{S}$ gilt

$$z_{\pi+\alpha} = z_\pi z_\alpha = -z_\alpha.$$

Definition. Für jedes $\alpha \in \mathbb{S}$ definieren wir $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ mit

$$\boxed{\cos\alpha = \operatorname{Re} z_\alpha, \qquad \sin\alpha = \operatorname{Im} z_\alpha},$$

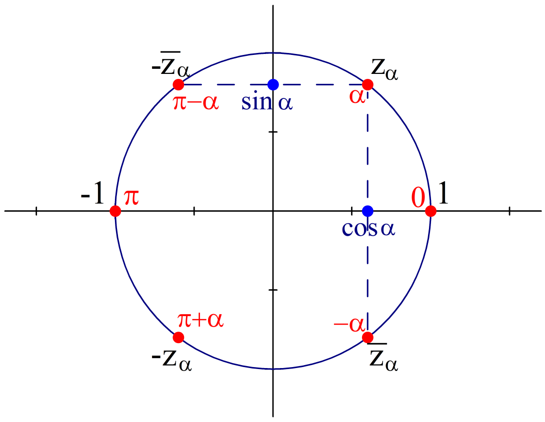
was zur folgenden Identität äquivalent ist:

$$\boxed{z_\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha}. \tag{3.13}$$

Die Abbildung $\cos : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ heißt *Kosinusfunktion* und $\sin : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ – *Sinusfunktion*. Man definiert auch die *Tangensfunktion*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

für alle α mit $\cos\alpha \neq 0$. Die Funktionen cos, sin, tan heißen auch *Winkelfunktionen*.



Z.B., , da $z_0 = 1 = 1 + 0i$ und $z_\pi = -1 = -1 + 0i$, so erhalten wir

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0.$$

Satz 3.8 *Die Winkelfunktionen erfüllen die folgenden Identitäten für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{S}$:*

(a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

(b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Die Identitäten (b) und (c) heißen *Additionstheoreme*. Es folgt aus (a), dass

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \sin\alpha \leq 1.$$

Beweis. Es folgt aus (3.13), dass

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = |z_\alpha|^2 = 1,$$

was (a) beweist. Nach (3.11) gilt

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\ &= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta),\end{aligned}$$

woraus (b) und (c) folgen, ∎

Für jedes $\alpha\in\mathbb{S}$ und $n\in\mathbb{N}$ definieren wir den Winkel $n\alpha\in\mathbb{S}$ per Induktion nach $n\in\mathbb{N}$ wie folgt:

$$1\alpha:=\alpha,\qquad (n+1)\alpha:=n\alpha+\alpha.$$

Insbesondere gilt:

$$2\alpha=\alpha+\alpha,\quad 3\alpha=2\alpha+\alpha,\quad \text{usw.}$$

Es folgt, dass[2]

$$z_{n\alpha}=(z_\alpha)^n.$$

Nach den Eigenschaften der Potenzen (2.11), die auch für die komplexen Zahlen gelten, erhalten wir

$$(n+m)\alpha=n\alpha+m\alpha\quad\text{und}\quad n(m\alpha)=(nm)\alpha. \tag{3.14}$$

Tatsächlich haben wir

$$z_{(n+m)\alpha}=(z_\alpha)^{n+m}=(z_\alpha)^n(z_\alpha)^m=z_{n\alpha}z_{m\alpha}=z_{n\alpha+m\alpha}$$

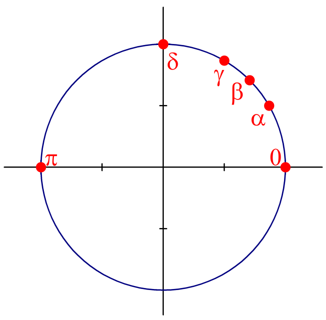
und

$$z_{n(m\alpha)}=(z_{m\alpha})^n=((z_\alpha)^m)^n=z_\alpha^{nm}=z_{(nm)\alpha},$$

was (3.14) beweist.

Beispiel. Betrachten wir die Winkel $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, die wie folgt definiert werden:

- $z_\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
- $z_\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$
- $z_\gamma=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $z_\delta=i$



Wir haben

$$z_{2\delta}=(z_\delta)^2=i^2=-1=z_\pi,$$

so dass

$$2\delta=\pi.$$

[2] Die Potenzen z^n einer komplexen Zahl z werden genau so induktiv definiert wie für reelle Zahlen:

$$z^1=z\quad\text{und}\quad z^{n+1}=z^nz.$$

Die Eigenschaften von Potenzen, die mit Ungleichungen nicht verbunden sind, gelten auch für komplexe Zahlen, z.B. der binomische Lehrsatz.

Deshalb wird der Winkel δ auch $\frac{\pi}{2}$ genannt. Es folgt, dass $z_{\frac{\pi}{2}} = i$ und somit

$$\cos\tfrac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\tfrac{\pi}{2} = 1.$$

Es gilt

$$z_{2\beta} = (z_\beta)^2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = i = z_\delta$$

so dass

$$2\beta = \delta \quad \text{und} \quad 4\beta = \pi.$$

Der Winkel β wird $\frac{\pi}{4}$ genannt. Es folgt, dass

$$z_{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i$$

und somit

$$\cos\tfrac{\pi}{4} = \sin\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es gilt

$$z_{3\gamma} = (z_\gamma)^3 = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1 = z_\pi$$

so dass

$$3\gamma = \pi.$$

Der Winkel γ wird $\frac{\pi}{3}$ genannt. Es folgt, dass

$$z_{\frac{\pi}{3}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

und somit

$$\cos\tfrac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Es gilt

$$z_{2\alpha} = (z_\alpha)^2 = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i = z_\gamma,$$

so dass

$$2\alpha = \gamma \ \text{ und } 6\alpha = \pi.$$

Der Winkel α wird $\frac{\pi}{6}$ genannt. Es folgt, dass

$$z_{\frac{\pi}{6}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i$$

und

$$\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Beispiel. Betrachten wir den Winkel ε mit

$$z_\varepsilon = \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Man kann zeigen, dass diese Zahl den Betrag 1 hat, so dass der Winkel ε wohldefiniert ist, und dass

$$z_{5\varepsilon} = (z_\varepsilon)^5 = -1 = z_\pi$$

(siehe Aufgabe 50) so dass $5\varepsilon = \pi$. Der Winkel ε wird $\frac{\pi}{5}$ genannt.

Es gibt das Verfahren von *Halbieren* des Winkels: für jedes $\alpha \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$ existiert genau ein $\beta \in \mathbb{S}$ mit $2\beta = \alpha$ und $\sin\beta > 0$. Der Winkel β wird $\frac{\alpha}{2}$ genannt. Per Induktion erhält man den Winkel $\frac{\alpha}{2^n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Z.B. so erhält man die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$ aus π und $\frac{\pi}{6}$ aus $\frac{\pi}{3}$.

Polarkoordinaten

Definition. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir $\arg z$ als der Winkel α mit

$$z_\alpha = \frac{z}{|z|}.$$

Der Wert $\arg z$ heißt das *Argument* von z oder der *Polarwinkel* von z.

Da $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$, so ist der Winkel α wohldefiniert. Man kann arg betrachten als eine Abbildung $\arg : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}$. Geometrisch bestimmt $\arg z$ die Richtung von 0 nach z durch ein Element von $\mathbb{S}$.

Satz 3.9 *Für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt*

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w \tag{3.15}$$

und

$$\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w. \tag{3.16}$$

Beweis. Sei $\alpha = \arg z$, $\beta = \arg w$ und $\gamma = \arg(zw)$. Dann gilt

$$z_\alpha = \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad z_\beta = \frac{w}{|w|},$$

woraus folgt

$$z_{\alpha+\beta} = z_\alpha z_\beta = \frac{z}{|z|}\frac{w}{|w|} = \frac{zw}{|zw|} = z_\gamma$$

und somit

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

was äquivalent zu (3.15). Man erhält (3.16) aus (3.15) wie folgt. Es gilt nach (3.15)

$$\arg \frac{z}{w} + \arg w = \arg\left(\frac{z}{w} w\right) = \arg z.$$

Addieren zu den beiden Seiten von $-\arg w$ ergibt (3.16). ■

Beispiel. Sei a eine reelle Zahl, $a \neq 0$. Im Fall $a > 0$ gilt $\arg a = 0$, da $\frac{a}{|a|} = 1$ und $z_0 = 1$. Im Fall $a < 0$ gilt $\arg a = \pi$, da $\frac{a}{|a|} = -1$ und $z_\pi = -1$. Es folgt aus (3.15), dass

$$\arg(az) = \arg z \quad \text{für } a > 0$$

und

$$\arg(az) = \arg z + \pi \quad \text{für } a < 0.$$

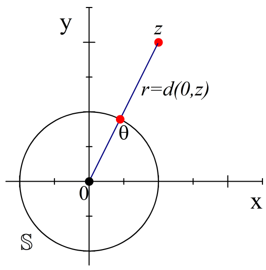
Da $\arg i = \frac{\pi}{2}$, so gilt

$$\arg(iz) = \arg z + \frac{\pi}{2}.$$

Bezeichnen wir $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entspricht ein Paar (r, θ) mit

$$r := |z| \in \mathbb{R}_+ \quad \text{und} \quad \theta := \arg z \in \mathbb{S}.$$

Die Elemente des Paars (r, θ) heißen *Polarkoordinaten* von z, wobei r *Polarradius* ist und θ – Polarwinkel. Offensichtlich r ist gleich der Abstand zwischen 0 und z, und θ zeigt die *Richtung* von 0 nach z.



Da

$$\frac{z}{|z|} = z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta,$$

so erhalten wir die folgende Beziehung zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten:

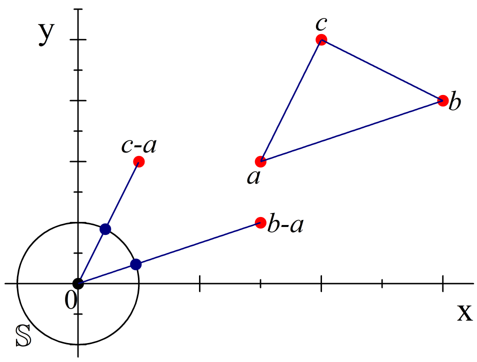
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + i(r\sin\theta). \tag{3.17}$$

Umgekehrt, für jedes $r \in \mathbb{R}_+$ und jedes $\theta \in \mathbb{S}$ hat die komplexe Zahl (3.17) die Polarkoordinaten (r, θ).

Winkel im Dreieck

Definition. Ein Dreieck Δabc ist eine Folge dreier unterschiedlichen Punkten $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Im Dreieck Δabc definieren wir den Winkel $\angle cab$ an der Ecke a mit

$$\angle cab = \arg(c-a) - \arg(b-a).$$



Analog definiert man den Winkel an der Ecke b

$$\angle abc = \arg(a-b) - \arg(c-b)$$

und den Winkel an der Ecke c:

$$\angle bca = \arg(b-c) - \arg(a-c).$$

Bemerken wir, dass

$$\angle bac = \arg(b-a) - \arg(c-a) = -\angle cab,$$

was bedeutet, dass die Winkel im Dreieck *orientiert* sind, d.h. abhängig von der Anordnung der Ecken a, b, c.

Bemerken wir auch, dass die in der Definition benutzten Folgen cab, abc und bca die *zyklischen* Permutationen von abc sind, d.h. die Teilfolgen von $abcabc$ wie folgt: $ab\underline{cab}c$, $\underline{abc}abc$, $a\underline{bca}bc$.

Satz 3.10 *Im beliebigen Dreieck Δabc bezeichnen wir die Winkel wie folgt*

$$\alpha = \angle cab, \quad \beta = \angle abc, \quad \gamma = \angle bca.$$

Dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Beweis. Nach dem Satz 3.9 haben wir

$$\alpha = \arg \frac{c-a}{b-a}, \quad \beta = \arg \frac{a-b}{c-b}, \quad \gamma = \arg \frac{b-c}{a-c}$$

und

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\frac{a-b}{c-b}\frac{b-c}{a-c}\right).$$

Bemerken wir:

$$\frac{c-a}{b-a}\frac{a-b}{c-b}\frac{b-c}{a-c} = (-1)^3 = -1,$$

woraus folgt, dass

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg(-1) = \pi.$$

■

Lemma 3.11 *Für alle komplexe $z, w \neq 0$ gelten die Identitäten*

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) = \operatorname{Re}(\overline{z}w) = |z|\,|w|\cos\alpha \tag{3.18}$$

und

$$-\operatorname{Im}(z\overline{w}) = \operatorname{Im}(\overline{z}w) = |z|\,|w|\sin\alpha, \tag{3.19}$$

wobei

$$\alpha = \angle w0z = \arg w - \arg z. \tag{3.20}$$

Beweis. Da
$$\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w, \tag{3.21}$$
so gilt die erste Identität in (3.18): $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = \operatorname{Re}(\overline{z}w)$. Wir haben $\alpha = \arg \frac{w}{z}$ und somit
$$\cos\alpha = \operatorname{Re}\frac{\frac{w}{z}}{\left|\frac{w}{z}\right|} = \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\frac{|z|}{|w|}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}w}{\overline{z}z}\frac{|z|}{|w|}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}w}{|z|^2}\frac{|z|}{|w|}\right) = \frac{1}{|w|\,|z|}\operatorname{Re}(\overline{z}w), \tag{3.22}$$
woraus (3.18) folgt.

Die erste Identität in (3.19) folgt aus (3.21), die zweite Identität beweist man genau so wie im (3.22), mit Im anstatt Re. ∎

Der Wert $|z|\,|w|\cos\alpha$ heißt das *Skalarprodukt* von z und w, und $|z|\,|w|\sin\alpha$ heißt das *Kreuzprodukt* von z, w.

Beispiel. Für $z = 1 - 2i$ und $w = 6 + 3i$ haben wir nach (3.18)
$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Re}(\overline{z}w)}{|z|\,|w|} = \frac{\operatorname{Re}(1+2i)(6+3i)}{|z|\,|w|} = 0$$
und
$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{Im}(\overline{z}w)}{|z|\,|w|} = \frac{\operatorname{Im}(1+2i)(6+3i)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{6^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}\sqrt{45}} = \frac{15}{\sqrt{225}} = 1.$$
Somit erhalten wir
$$\alpha = \arg i = \frac{\pi}{2}.$$
Es gilt auch
$$d(z,w) = |z-w| = |-5-5i| = 5\sqrt{2}.$$

Satz 3.12 (Kosinussatz) *Im beliebigen Dreieck Δabc setzen wir*
$$\mathbf{a} = d(b,c), \quad \mathbf{b} = d(a,c), \quad \mathbf{c} = d(a,b)$$
und $\alpha = \angle cab$. Dann gilt
$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bc}\cos\alpha \tag{3.23}$$

Beweis. Setzen wir $z = b - a$ und $w = c - a$. Dann gilt
$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= |c-a| = |w|, \\ \mathbf{c} &= |b-a| = |z| \end{aligned}$$
und
$$\mathbf{a} = |b-c| = |(b-a)-(c-a)| = |z-w|.$$
Auch haben wir
$$\alpha = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg w - \arg z = \angle w0z. \tag{3.24}$$
Somit ist (3.23) äquivalent zu
$$|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2|z|\,|w|\cos\alpha$$

mit α wie im (3.20).

Mit Hilfe von (3.5) und (3.18) erhalten wir

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|\cos\alpha, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Lemma 3.13 *Für alle komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 mit*

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

gilt

$$\operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2) = \operatorname{Im}(\overline{z_2}z_3) = \operatorname{Im}(\overline{z_3}z_1). \tag{3.25}$$

Beweis. Es reicht die erste Identität in (3.25) zu beweisen. Da $z_3 = -(z_1 + z_2)$, so erhalten wir

$$\operatorname{Im}(\overline{z_2}z_3) = -\operatorname{Im}(\overline{z_2}(z_1 + z_2)) = -\operatorname{Im}(\overline{z_2}z_1) - \operatorname{Im}(\overline{z_2}z_2).$$

Da $\overline{z_2}z_2$ reell ist, so gilt $\operatorname{Im}(\overline{z_2}z_2) = 0$. Nach (3.19) gilt

$$-\operatorname{Im}(\overline{z_2}z_1) = \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2),$$

woraus die Identität $\operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2) = \operatorname{Im}(\overline{z_2}z_3)$ folgt. ■

Satz 3.14 (Sinussatz) *Im beliebigen Dreieck Δabc mit den Seiten*

$$\mathbf{a} = d(b,c), \quad \mathbf{b} = d(a,c), \quad \mathbf{c} = d(a,b)$$

und Winkeln

$$\alpha = \angle cab, \quad \beta = \angle abc, \quad \gamma = \angle bca$$

gilt

$$\frac{\sin\alpha}{\mathbf{a}} = \frac{\sin\beta}{\mathbf{b}} = \frac{\sin\gamma}{\mathbf{c}}. \tag{3.26}$$

Beweis. Setzen wir

$$z_1 = c - b, \quad z_2 = a - c, \quad z_3 = b - a.$$

Nach (3.24) haben wir

$$\alpha = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg(-z_2) - \arg z_3 = \angle(-z_2)\, 0 z_3$$

und nach Lemma 3.11

$$\sin\alpha = -\frac{\operatorname{Im}\overline{-z_2}z_3}{|z_2|\,|z_3|} = \frac{\operatorname{Im}\overline{z_2}z_3}{\mathbf{bc}},$$

woraus folgt

$$\frac{\sin\alpha}{\mathbf{a}} = \frac{\operatorname{Im}\overline{z_2}z_3}{\mathbf{abc}}.$$

Analog beweist man dass

$$\frac{\sin\beta}{\mathbf{b}}=\frac{\operatorname{Im}\overline{z_3}z_1}{\mathbf{abc}}$$

und

$$\frac{\sin\gamma}{\mathbf{c}}=\frac{\operatorname{Im}\left(\overline{z_1}z_2\right)}{\mathbf{abc}}.$$

Da $z_1+z_2+z_3=0$, so gilt es nach Lemma 3.13

$$\operatorname{Im}\left(\overline{z_1}z_2\right)=\operatorname{Im}\left(\overline{z_2}z_3\right)=\operatorname{Im}\left(\overline{z_3}z_1\right),$$

woraus (3.26) folgt. ■

Transformationen der Ebene

Eine *Transformation* der Ebene ist eine bijektive Selbstabbildung von $\mathbb{C}$. In diesem Abschnitt definieren wir spezielle Transformationen: Rotation und Translation.

Definition. Sei w eine komplexe Zahl. Eine *Translation* der Ebene um w (genannt auch *Parallelverschiebung*) ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T_w &: \mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ T_w(z) &= z+w. \end{aligned}$$

Wenn man die komplexe Zahl w für Translation T_w benutzt, so wird w auch *Vektor* (oder *Verschiebungsvektor*) genannt. Offensichtlich gilt für alle $u,v\in\mathbb{Z}$ die Identität

$$T_u\circ T_v=T_{u+v}.$$

Die Translation T_w hat die inverse Abbildung $(T_w)^{-1}=T_{-w}$ da

$$T_w\circ T_{-w}=T_{-w}\circ T_w=T_0=\operatorname{Id}.$$

Somit is die Menge $\{T_w\}$ von allen Translationen eine Gruppe bezüglich Komposition.

Definition. Für jeden Winkel $\alpha\in\mathbb{S}$ definieren wir die *Rotation* (*Drehung*) R_α der Ebene als die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} R_\alpha &: \mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ R_\alpha(z) &= z_\alpha z, \end{aligned}$$

wobei $z_\alpha=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

Für alle $\alpha,\beta\in\mathbb{S}$ gilt die Identität

$$R_\alpha\circ R_\beta=R_{\alpha+\beta}$$

da für alle $z\in\mathbb{C}$

$$z_\alpha\left(z_\beta z\right)=\left(z_\alpha z_\beta\right)z=z_{\alpha+\beta}z.$$

Jede Rotation R_α hat die inverse Abbildung $(R_\alpha)^{-1}=R_{-\alpha}$ da

$$R_\alpha\circ R_{-\alpha}=R_{-\alpha}\circ R_\alpha=R_0=\operatorname{Id}.$$

Somit is die Menge $\{R_\alpha\}$ von allen Rotationen eine Gruppe bezüglich Komposition.

Für $z = x + iy$ berechnen wir $R_\alpha(z)$ explizit wie folgt:

$$\begin{aligned} R_\alpha(z) &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x+iy) \\ &= (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha). \end{aligned}$$

Z.B., für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$R_{\frac{\pi}{2}}(z) = (-y, x)$$

und für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gilt

$$R_{\frac{\pi}{4}}(z) = \frac{x-y}{\sqrt{2}} + i\frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Rotation R_α und Translation T_w von der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ haben die folgende gemeinsame Eigenschaft: unter jeder von diesen Abbildungen bleiben die Abstände zwischen den Punkten in $\mathbb{R}^2$ und die Winkel in den Dreiecken erhalten. Jede Transformation von $\mathbb{R}^2$ mit diesen Eigenschaften heißt eine *Bewegung*.

Satz 3.15 *Jede Bewegung von $\mathbb{R}^2$ ist eine Komposition $T_w \circ R_\alpha$.*

Die Komposition zweier Bewegungen ist offensichtlich wieder eine Bewegung, und die inverse Abbildung einer Bewegung ist auch eine Bewegung. Somit ist die Menge von allen Bewegungen von $\mathbb{R}^2$ eine Gruppe bezüglich Komposition. Diese Gruppe ist *nicht* kommutativ da die folgende Identität gilt:

$$R_\alpha \circ T_w = T_{z_\alpha w} \circ R_\alpha.$$

Chapter 4

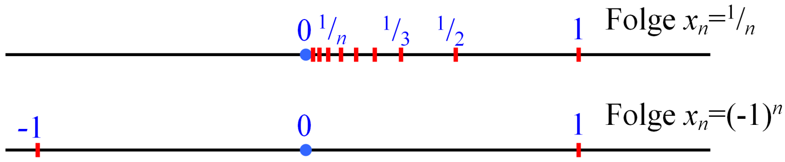
Folgen und ihre Grenzwerte

27.11.2024 **Vorlesung 14**

4.1 Begriff des Limes

Definition. Eine (*unendliche*) *Folge* von reellen Zahlen ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Der Wert $x(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ wird auch mit x_n bezeichnet. Die ganze Folge x wird auch mit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ oder sogar $\{x_n\}$ bezeichnet. Die Werte x_n werden als *Glieder* (oder Folgenglieder) der Folge x genannt.

Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen. Wir interessieren uns für das Verhalten der Folgenglieder x_n für große Werte von n. Zum Beispiel, die Glieder der Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ werden immer kleiner und nähern sich der Null für großen Werten des Index n an. Es ist natürlich zu sagen, dass die Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ den *Grenzwert* 0 hat.



Hingegen hat die Folge $\{(-1)^n\}$ keinen Grenzwert, da sie keiner Zahl annähert und zwischen 1 und -1 springt.

Definition. Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt der *Grenzwert* der Folge $\{x_n\}$ genau dann, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } n \geq N \text{ gilt } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Äquivalent, mit Hilfe von den Quantoren, schreibt man:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |x_n - a| < \varepsilon.} \tag{4.1}$$

Hat die Folge $\{x_n\}$ einen Grenzwert, so heißt die Folge *konvergent*; sonst heißt die Folge *divergent*. Man sagt auch: die Folge *konvergiert* bzw *divergiert*.

Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so benutzt man die folgende Schreibweise:

$$x_n \to a \quad (x_n \text{ konvergiert gegen } a)$$

$$x_n \to a \ \text{ für } \ n \to \infty \quad (a_n \text{ konvergiert gegen } a \text{ für } n \text{ gegen unendlich}).$$

Um den Grenzwert der Folge $\{x_n\}$ zu bezeichnen, benutzt man die Notation $\lim x_n$, die heißt der *Limes* von x_n. Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so schreibt man auch

$$a = \lim x_n \quad \text{oder} \quad a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Die Konvergenz $x_n \to a$ lässt sich betrachten als eine Annäherung von a mit den Folgengliedern x_n, wobei $\varepsilon > 0$ ein vorgegebener Approximationsfehler ist. Dann bedeutet die Bedingung (4.1), dass jedes Folgenglied x_n mit genügend großem n eine "gute" Annäherung von a ist, nämlich, mit dem Approximationsfehler $< \varepsilon$. Es ist wichtig zu betonen, dass diese Eigenschaft für beliebiges positives ε gelten muss, so dass der Approximationsfehler beliebig klein sein kann.

Beispiel. 1. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\frac{1}{n} \to 0 \ \text{ für } n \to \infty.$$

Nach Definition müssen wir beweisen dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \text{ gilt } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{1}{n} < \varepsilon$, d.h. zu $n > \varepsilon^{-1}$. Um dies zu sichern, reicht es zu haben $N > \varepsilon^{-1}$, und ein solches N existiert nach dem Archimedischen Prinzip, z.B. $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$

Ebenso beweist man, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{c}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

2. Zeigen wir, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \text{ gilt } \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Die Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ ist äquivalent zu $n > \varepsilon^{-2}$. Um dies zu sichern, reicht es zu haben $N > \varepsilon^{-2}$, z.B. nehmen wir $N = [\varepsilon^{-2}] + 1$.

Jetzt besprechen wir eine äquivalente Definition des Grenzwertes.

Definition. Man sagt, dass eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage $A(n)$ für *fast alle* n gilt, wenn $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus S$ gilt, wobei $S \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge ist.

Mit anderen Worten, "fast alle" bedeutet: alle außer einer endlichen Menge.

Behauptung. *Die Bedingung* $a = \lim x_n$ *ist äquivalent zu:*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \textit{gilt} \quad |x_n - a| < \varepsilon \textit{ für fast alle } n.} \tag{4.2}$$

Beweis. Gilt $a = \lim x_n$, so erhalten wir nach (4.1): für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ gilt für alle } n \geq N,$$

d.h.

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{E}_{N-1}.$$

Somit gilt auch (4.2). Umgekehrt, gilt (4.2), so $\forall \varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $S \subset \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N} \setminus S.$$

Da S endlich ist, so existiert $\max S$ (Aufgabe 40). Setzen wir $N = \max S + 1$. Dann

$$n \geq N \Rightarrow n \in \mathbb{N} \setminus S \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

woraus folgt $a = \lim x_n$. ∎

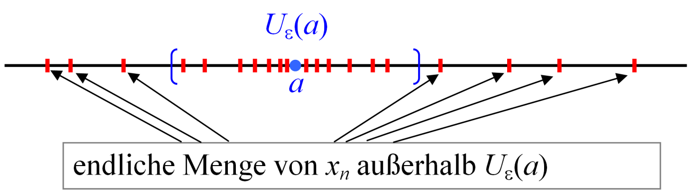
Die Bedingung $|x_n - a| < \varepsilon$ ist offensichtlich äquivalent zu $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Definition. Das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ heißt die ε-*Umgebung* von a und wird mit $U_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Es folgt, dass die Bedingung $a = \lim x_n$ äquivalent zur folgenden Bedingung ist:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } x_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n,} \tag{4.3}$$

d.h. jede Umgebung von a enthält fast alle Folgenglieder x_n.



Hier ist noch eine äquivalente Umformulierung: $a = \lim x_n$ gilt genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ die Menge } \{n : x_n \notin U_\varepsilon(a)\} \text{ ist endlich.}$$

Daraus erhalten wir die Negation der Bedingung $a = \lim x_n$.

Behauptung. *Eine Zahl* a *ist kein Grenzwert von* $\{x_n\}$ *genau dann, wenn*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \textit{so dass die Menge } \{n : x_n \notin U_\varepsilon(a)\} \textit{ unendlich ist.} \tag{4.4}$$

Jetzt beweisen wir, dass $\lim x_n$ nicht zwei Werte annehmen kann.

Behauptung. *Ist* $\{x_n\}$ *konvergent so ist der Grenzwert* $\lim x_n$ *eindeutig bestimmt.*

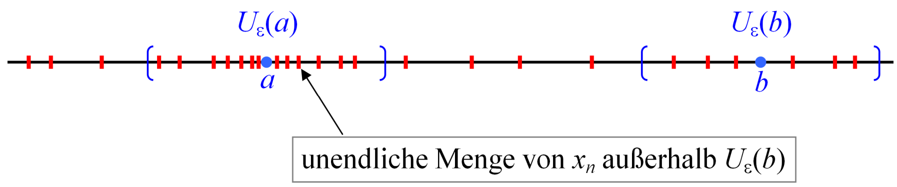
Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass es zwei Werte von $\lim x_n$ gibt, d.h. $x_n \to a$ und $x_n \to b$ mit $a \neq b$. Sei $a < b$. Wählen wir ein $\varepsilon > 0$ so dass die Intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ und $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ disjunkt sind. Dafür reicht es zu sichern, dass

$$a + \varepsilon < b - \varepsilon,$$

d.h.

$$\varepsilon < \frac{b - a}{2}.$$

Da $b - a > 0$, so solches ε existiert. Da $a = \lim x_n$, so enthält $U_\varepsilon(a)$ fast alle x_n.



Daraus folgt, dass es außerhalb des Intervalls $U_\varepsilon(b)$ unendlich viele Folgenglieder x_n gibt, was in Widerspruch zum $b = \lim x_n$ steht. ■

Beispiel. 1. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}$ derart, dass $x_n = a$ für fast alle n gilt. Dann gilt auch $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$ für fast alle n, woraus $x_n \to a$ folgt.

2. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = (-1)^n$ divergiert. Der Wert $a = 1$ ist kein Grenzwert, da es außerhalb $U_1(1/2)$ unendlich viele Folgenglieder mit dem Wert -1 gibt. Analog ist $a = -1$ kein Grenzwert. Sei $a \neq 1$ und $a \neq -1$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ derart, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ weder 1 noch -1 enthält, und somit alle Glieder x_n außerhalb $U_\varepsilon(a)$ liegen. Deshalb ist a kein Grenzwert.

3. Die Folge $x_n = n$ divergiert, da für jedes $a \in \mathbb{R}$ außerhalb des Intervalles $U_1(a)$ unendlich viele Folgenglieder liegen, so dass a kein Grenzwert von x_n ist. Ebenso divergiert die Folge $x_n = cn$ für $\forall c \neq 0$.

Bemerkung. Die Definition (4.1) von dem Grenzwert ist einer von den wichtigsten Begriffen in ganzer Mathematik. Der Begriff von Grenzwert wurde intuitiv, ohne genaue Definition, schon von den Begründern von Infinitesimalrechnung Isaac Newton und Wilhelm-Gottfried Leibniz im 17. Jahrhundert benutzt. Man brauchte fast 150 Jahre von weiterer Entwicklung der Analysis um eine rigorose Definition des Grenzwertes vorzulegen. Diese Definition wurde von Augustin Louis Cauchy in ca. 1821 gegeben.

4.2 Eigenschaften des Limes

Für Beweise von Eigenschaften des Limes benutzen wir die folgende Eigenschaft des Begriffes "für fast alle n".

Behauptung. *Seien $A(n)$ und $B(n)$ zwei von $n \in \mathbb{N}$ abhängigen Aussagen. Gilt jede davon für fast alle n, so gilt auch $A(n) \wedge B(n)$ für fast alle n.*

Beweis. Nach Definition gibt es endliche Mengen $S, T \subset \mathbb{N}$ so dass $A(n)$ für alle $n \in S^c$ gilt und $B(n)$ für alle $n \in T^c$ gilt. Dann gilt $A(n) \wedge B(n)$ für alle

$$n \in S^c \cap T^c = (S \cup T)^c$$

(wobei wir die Formel (1.8) von De Morgan benutzt haben). Nach dem Satz 2.16 ist die Vereinigung $S \cup T$ endlich, woraus folgt, dass $A(n) \wedge B(n)$ für fast alle n gilt. ■

29.11.2024 Vorlesung 15

Die weiteren Eigenschaften des Grenzwertes werden in dem folgenden Satz angegeben.

Satz 4.1 *(a) Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Folgen. Gilt $x_n \leq y_n$ für fast alle n, so gilt auch*

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

Insbesondere, $x_n = y_n$ für fast alle n $\Rightarrow$ $\lim x_n = \lim y_n$.

(b) Seien $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ drei Folgen mit $x_n \leq y_n \leq z_n$ für fast alle n. Gilt

$$\lim x_n = \lim z_n =: a,$$

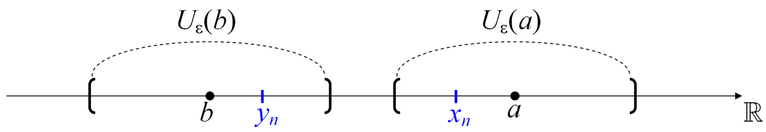
so ist $\{y_n\}$ auch konvergent und $\lim y_n = a$.

(c) Jede konvergente Folge ist beschränkt d.h. es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $x_n \to a \Leftrightarrow |x_n - a| \to 0$ (insbesondere $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$).

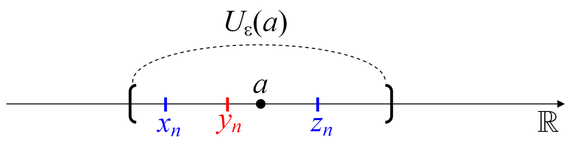
Beweis. (a) Bezeichnen wir $a = \lim x_n$ und $b = \lim y_n$ und beweisen dass $a \leq b$. Nehmen wir an dass $a > b$. Es gibt $\varepsilon > 0$ so dass die Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ disjunkt sind; darüber hinaus, für jedes $x \in U_\varepsilon(a)$ und $y \in U_\varepsilon(b)$ gilt $x > y$. Zum Beispiel, das ist der Fall für $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.

Nach der Voraussetzung gilt $x_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle n und $y_n \in U_\varepsilon(b)$ für fast alle n.



Nach der obigen Behauptung gelten die Bedingungen $x_n \in U_\varepsilon(a)$ und $y_n \in U_\varepsilon(b)$ gleichzeitig für fast alle n, woraus folgt $x_n > y_n$ für fast alle n. Somit erhalten wir den Widerspruch zur Voraussetzung dass $x_n \leq y_n$ für fast alle n gilt.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gelten die Bedingungen $x_n \in U_\varepsilon(a)$ und $z_n \in U_\varepsilon(a)$ gleichzeitig für fast alle n.



Da auch $x_n \leq y_n \leq z_n$ für fast alle n gilt, so folgt es, dass $y_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle n und somit $y_n \to a$.

(c) Sei $x_n \to a$. Die Menge von x_n, die in $U_1(a)$ liegen, ist beschränkt, da $U_1(a)$ beschränkt ist. Die Menge von x_n, die außerhalb $U_1(a)$, liegen ist endlich, so dass diese Menge auch beschränkt ist (jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat Maximum und Minimum nach Aufgabe 40). Somit ist die ganze Menge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ beschränkt als die Vereinigung zweier beschränkten Mengen.

(d) Die Bedingung $x_n \to a$ bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

für fast alle n erfüllt ist, während $|x_n - a| \to 0$ bedeutet, dass

$$||x_n - a| - 0| < \varepsilon$$

für fast alle n erfüllt ist. Offensichtlich sind die beiden Bedingungen äquivalent. ■

Bemerkung. *Achtung*: die Bedingung $x_n < y_n$ impliziert $\lim x_n \leq \lim y_n$ aber *nicht* $\lim x_n < \lim y_n$, was man im Beispiel $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$ sieht.

Beispiel. Betrachten wir die Folge $x_n = a^n$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ und untersuchen wir die Konvergenz von $\{x_n\}$ abhängig von dem Wert von a. Betrachten wir verschiedene Fälle.

1. Sei $a > 1$, d.h. $a = 1 + c$ wobei $c > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung[1] (Aufgabe 30) haben wir

$$a^n = (1 + c)^n \geq 1 + nc.$$

Da die Folge $\{nc\}_{n=1}^{\infty}$ nach dem Archimedischen Prinzip unbeschränkt ist, so ist die Folge $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ auch unbeschränkt und somit divergent.

2. Sei $a < -1$. Da $|x_n| = |a|^n$, so erhalten wir, dass die Folge $\{|x_n|\}$ unbeschränkt ist und somit auch $\{x_n\}$. Folglich ist $\{x_n\}$ divergent.

3. Sei $a = -1$. Die Folge $x_n = (-1)^n$ wurde schon betrachtet, und wir wissen, dass sie divergiert.

4. Sei $a = 1$. Dann $x_n = 1$ und diese Folge konvergiert gegen 1.

5. Sei $a = 0$. Dann $\{x_n\}$ ist auch eine konstante Folge, die gegen 0 konvergiert.

6. Sei $0 < a < 1$. Setzen wir $b = \frac{1}{a} > 1$. Wie oberhalb schreiben wir $b = 1 + c$ mit $c > 0$ und erhalten

$$b^n = (1 + c)^n \geq 1 + nc > nc$$

woraus folgt

$$0 < a^n < \frac{1}{nc}.$$

Da $\frac{1}{nc} \to 0$, so erhalten wir nach Satz 4.1(b), dass $a_n \to 0$.

7. Sei $-1 < a < 0$. Dann gilt $0 < |a| < 1$ und $|a^n| = |a|^n \to 0$, woraus folgt $a^n \to 0$.

Somit ist die Folge $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent genau dann, wenn $-1 < a \leq 1$.

---

[1] Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Für $x \geq 0$ lässt sich diese Ungleichung mit Hilfe von dem binomischen Lehrsatz beweisen, da

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... \geq 1 + nx.$$

4.3 Rechenregeln

Hier beweisen wir einige Rechenregeln für den Grenzwert.

Satz 4.2 *Seien $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Dann gelten*

$$x_n + y_n \to a + b, \qquad x_n - y_n \to a - b, \quad x_n y_n \to ab.$$

Falls $y_n \neq 0$ und $b \neq 0$, so gilt auch

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

Man kann die obigen Regeln mit Hilfe von dem Zeichen lim umschreiben wie folgt:

$$\begin{aligned} \lim (x_n \pm y_n) &= \lim x_n \pm \lim y_n &&\text{(Summenregel)} \\ \lim (x_n y_n) &= \lim x_n \lim y_n &&\text{(Produktregel)} \\ \lim \frac{x_n}{y_n} &= \frac{\lim x_n}{\lim y_n} &&\text{(Quotientenregel)} \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass die rechten Seiten sinnvoll sind. Für eine konstante Folge $y_n = c$ erhalten wir, dass

$$\lim (x_n + c) = \lim x_n + c \quad \text{und} \quad \lim (cx_n) = c \lim x_n.$$

Beweis von Satz 4.2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ und } \; |y_n - b| < \varepsilon \tag{4.5}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass für fast alle n gilt

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (a + b)| &= |x_n - a + y_n - b| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < 2\varepsilon =: \varepsilon'. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Jetzt können wir $\varepsilon' > 0$ beliebig angeben und setzen $\varepsilon = \varepsilon'/2 > 0$ so dass (4.5) für fast alle n gilt. Wir beschließen, dass auch (4.6) für fast alle n gilt, d.h.

$$|x_n + y_n - (a + b)| < \varepsilon',$$

woraus folgt

$$x_n + y_n \to a + b.$$

Die Konvergenz $x_n - y_n \to a - b$ beweist man analog.

Um $x_n y_n \to ab$ zu beweisen, bemerken wir zuerst dass die Folge $\{x_n\}$ nach dem Satz 4.1(c) beschränkt ist, d.h. für eine Zahl $c > 0$ gilt

$$|x_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Differenz $x_n y_n - ab$ lässt sich für fast alle n wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\leq |x_n (y_n - b)| + |(x_n - a)\, b| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c\,|y_n - b| + |b|\,|x_n - a| \\ &< c\varepsilon + |b|\,\varepsilon = (c + |b|)\,\varepsilon =: \varepsilon'. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon' = (c + |b|)\,\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl ist (da $\varepsilon = \varepsilon/\,(c + |b|)$ positive für jedes $\varepsilon' > 0$ ist), so erhalten wir $x_n y_n \to ab$.

Für die letzte Behauptung $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ reicht es zu beweisen, dass $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$ da danach gilt

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Sei $b > 0$ (der Fall $b < 0$ ist analog). Da für fast alle n gilt

$$y_n \in U_{b/2}\,(b) = (\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}),$$

so erhalten wir, dass $y_n > \frac{b}{2}$ für fast alle n. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für fast alle n auch

$$|y_n - b| < \varepsilon,$$

woraus folgt, dass für fast alle n

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n|\,b} < \frac{\varepsilon}{(b/2)\,b} =: \varepsilon'.$$

Da ε' eine beliebige positive Zahl ist, so beschließen wir dass $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$. ■

Beispiel. Mit Hilfe von dem Satz 4.2 bestimmen wir den Grenzwert der Folge

$$x_n = \frac{an^2 + bn + c}{a'n^2 + b'n + c'}, \tag{4.7}$$

wobei a, b, c, a', b', c' reelle Zahlen sind mit $a' \neq 0$. Der Trick ist hier das führende Glied n^2 im Zähler und Nenner auszuklammern. Wir haben

$$x_n = \frac{n^2\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{n^2\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c}{n^2}\right)} = \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}}.$$

Wir wissen schon, dass $\frac{1}{n} \to 0$. Daraus folgt, dass auch $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{b}{n} \to 0$, $\frac{c}{n^2} \to 0$ und somit

$$\lim\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right) = a \quad \text{und} \quad \lim\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}\right) = a'.$$

Es folgt nach der Quotientenregel

$$\lim x_n = \frac{\lim\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{\lim\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}\right)} = \frac{a}{a'}.$$

Nach Aufgabe 59 gilt auch folgendes: wenn $x_n \geq 0$ und $\lim x_n = a$ dann $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$, was im nächsten Beispiel verwendet wird.

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim \left(\sqrt{n^2+n}-n\right).$$

Der Trick ist hier die Differenz zweier großer Ausdrücke mit ihre Summe[2] zu multiplizieren und dividieren. Wir haben

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{\left(n^2+n\right)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{n} \to 0$, es folgt, dass $1+\frac{1}{n} \to 1$ und somit auch $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$. Es folgt, dass

$$\sqrt{n^2+n}-n \to \frac{1}{2}.$$

Z.B. für $n = 1000$ gilt $\sqrt{n^2+n}-n = 0.499\,875\,...$

04.12.2024 **Vorlesung 16**

4.4 Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$

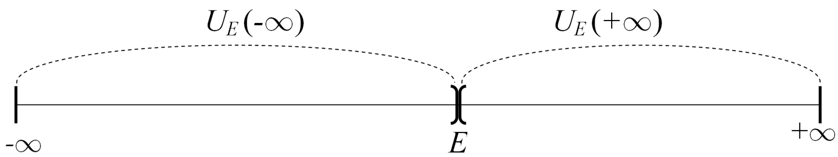
Hier definieren wir den Begriff des Limes mit den Werten in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Definition. Für jedes $E \in \mathbb{R}$ definieren wir die Umgebung $U_E(+\infty)$ durch

$$U_E(+\infty) = (E, +\infty] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > E\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > E\} \cup \{+\infty\}.$$

Analog definieren wir die Umgebung $U_E(-\infty)$ durch

$$U_E(-\infty) = [-\infty, E) = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < E\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x < E\} \cup \{-\infty\}.$$



Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ hat einen Grenzwert $a \in \overline{\mathbb{R}}$ wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\boxed{\text{für jede Umgebung } U \text{ von } a \text{ gilt } x_n \in U \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.} \tag{4.8}$$

[2]Der Ausdruck $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ heißt *Konjugierte* von $\sqrt{A}-\sqrt{B}$

Man schreibt in diesem Fall

$$\lim x_n = a \quad \text{oder} \quad x_n \to a \;\; \text{für} \;\; n \to \infty$$

Ist a reell, so stimmt diese Definition mit der Definition des Limes in Abschnitt 4.1 überein. In diesem Fall sagt man, dass x_n gegen a konvergiert, und die Folge $\{x_n\}$ heißt konvergent. Ist $a = \pm\infty$, so sagt man, dass dass x_n gegen a *divergiert,* und die Folge $\{x_n\}$ heißt *bestimmt divergent.* Hat die Folge keinen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$, so heißt die Folge $\{x_n\}$ *unbestimmt divergent.*

Die Bedingung $x_n \to +\infty$ bedeutet:

$$\forall E \in \mathbb{R} \;\; \text{gilt} \;\; x_n > E \text{ für fast alle } n.$$

Die Bedeutung $x_n \to -\infty$ bedeutet:

$$\forall E \in \mathbb{R} \;\; \text{gilt} \;\; x_n < E \text{ für fast alle } n.$$

Beispiel. 1. Die Folge $x_n = n$ divergiert gegen $+\infty$, da die Bedingung $x_n > E$ für alle $n > E$ erfüllt ist und somit für fast alle n. Analog divergiert die Folge $x_n = -n$ gegen $-\infty$. Mit gleichem Argument beweist man, dass die Folge $x_n = cn$ gegen $+\infty$ divergiert, wenn $c > 0$, und gegen $-\infty$ wenn $c < 0$.

2. Die Folge $x_n = \sqrt{n}$ auch divergiert gegen $+\infty$, da die Bedingung $x_n > E$ bedeutet, dass $\sqrt{n} > E$, was für positives E äquivalent zu $n > E^2$ ist. Somit gilt $x_n > E$ für fast alle n.

Erweitern wir die Aussagen (a) und (b) des Satzes 4.1 auf die Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$.

Satz 4.3 *Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folgen von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$.*

(a) Gilt $x_n \le y_n$ für fast alle n, so gilt $\lim x_n \le \lim y_n$, vorausgesetzt, dass $\lim x_n$ und $\lim y_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existieren.

(b) Gelten $x_n \le y_n \le z_n$ für fast alle n und $\lim x_n = \lim z_n =: a \in \overline{\mathbb{R}}$, so gilt auch $\lim y_n = a$.

Beweis. (a) Setzen wir $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$ und nehmen das Gegenteil an, dass $a > b$. Beweisen wir zuerst die folgende Aussage.

Behauptung. *Gilt $a > b$ so existieren Umgebungen A von a und B von b so dass*

$$\forall x \in A \;\; \forall y \in B \;\; \text{gilt } x > y. \tag{4.9}$$

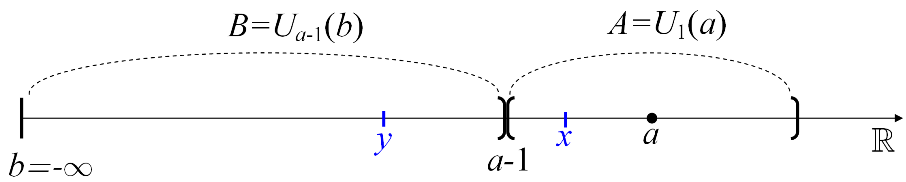
Seien a und b zuerst reell. Wir haben schon im Beweis des Satzes 4.1 gesehen dass die Umgebungen

$$A = U_\varepsilon(a) \quad \text{und} \quad B = U_\varepsilon(b)$$

für $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ die Bedingung (4.9) erfüllen. Sei a reell und $b = -\infty$. Dann setzen wir

$$A = U_1(a) \quad \text{und} \quad B = U_{a-1}(-\infty)$$

so dass für $x \in A$ und $y \in B$ gilt $x > a - 1 > y$.



Der Fall $a = +\infty$ und b reell ist analog. Im Fall $a = +\infty$ und $b = -\infty$ setzen wir

$$A = U_0(+\infty) \quad \text{und} \quad B = U_0(-\infty).$$

Da $x_n \in A$ und $y_n \in B$ für fast alle n, so erhalten wir aus (4.9, $x_n > y_n$ was im Widerspruch zu Voraussetzung $x_n \leq y_n$ für fast alle n steht.

(b) Sei U eine beliebige Umgebung von a. Nach Voraussetzung liegen x_n und z_n in U für fast alle n. Da U ein Intervall ist und $x_n \leq y_n \leq z_n$ für fast alle n gilt, so liegt auch y_n in U für fast alle n, woraus $y_n \to a$ folgt. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Folge $x_n = a^n$. Wir wissen schon, dass diese Folge konvergiert genau dann, wenn $a \in (-1, 1]$. Zeigen wir, dass für $a > 1$ gilt $a^n \to +\infty$. Schreiben wir $a = 1 + c$ wobei $c > 0$ und erhalten mit Hilfe von Bernoullischer Ungleichung

$$a^n = (1 + c)^n > cn.$$

Da $cn \to +\infty$ und $cn \leq a^n < +\infty$ so folgt es, dass auch $a^n \to +\infty$.

Für $a < -1$ ist die Folge $\{a^n\}$ divergent. Für gerade n liegt a^n in $U_0(+\infty)$ und für ungerade n liegt a^n in $U_0(-\infty)$. Somit enthält weder $U_0(+\infty)$ noch $U_0(-\infty)$ fast alle Glieder, und we beschließen, dass die Folge $\{a^n\}$ unbestimmt divergiert.

4.5 Monotone Folgen

Definition. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von reellen Zahlen heißt *monoton steigend* wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, and *monoton fallend* wenn $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beispiel. Die Folge $x_n = n$ ist monoton steigend, die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend, die konstante Folge $x_n = a$ ist gleichzeitig monoton steigend und fallend, die Folge $x_n = (-1)^n$ ist nicht monoton.

Ist $\{x_n\}$ monoton steigend, so gilt $x_n \geq x_m$ für alle $n \geq m$, was man per Induktion nach $n \geq m$ beweist. Insbesondere gilt $x_n \geq x_1$ so dass x_1 eine untere Schranke ist, und $\{x_n\}$ nach unten beschränkt ist. Ist $\{x_n\}$ monoton fallend, so gilt $x_n \leq x_m$ für alle $n \geq m$, und $\{x_n\}$ ist nach oben beschränkt.

Hauptsatz 4.4 (Monotoniekriterium) *Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge von reellen Zahlen.*

Ist $\{x_n\}$ monoton steigend, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist $\{x_n\}$ monoton fallend, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Insbesondere hat jede monotone Folge immer einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ (endlich oder $\pm\infty$). Darüber hinaus konvergiert eine monotone Folge genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. Sei $\{x_n\}$ monoton steigend. Nach dem Satz 1.13 existiert das Supremum

$$a = \sup\{x_n\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

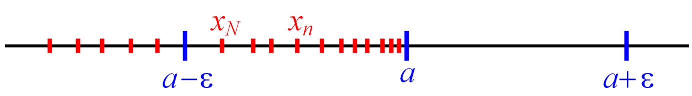
Beweisen wir, dass $x_n \to a$.

Sei zuerst a reell, d.h. die Folge $\{x_n\}$ ist beschränkt. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Zahl $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{x_n\}$. Deshalb existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Da die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend ist, erhalten wir, dass

$$x_n > a - \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$



Da nach Definition von a gilt $x_n \leq a$, so erhalten wir, dass

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{für alle } n \geq N,$$

woraus $x_n \to a$ folgt.

Sei $a = +\infty$, d.h. die Folge $\{x_n\}$ ist unbeschränkt. Sei E beliebige reelle Zahl. Da E keine obere Schranke von $\{x_n\}$ ist, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N > E$. Da $\{x_n\}$ monoton steigend ist, so erhalten wir, dass

$$x_n > E \quad \text{für alle } n \geq N,$$

woraus $\lim x_n = +\infty = a$. folgt. Der Fall von monoton fallender Folge ist analog.

Beweisen wir die letzte Aussage. Sei $\{x_n\}$ monoton steigend. Dann ist $\{x_n\}$ nach unten beschränkt, so dass $\{x_n\}$ beschränkt ist genau dann, wenn $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, d.h. wenn $\lim x_n \in \mathbb{R}$, was äquivalent zu Konvergenz der Folge ist. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die wie folgt induktiv definiert ist:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Die ersten Glieder der Folge sind wie folgt:

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{9}{4} = 2,25, \quad x_4 = \frac{793}{324} = 2,447..., \quad x_5 = \frac{532689481}{203747076} = 2,614...$$

usw. Da offensichtlich gilt $x_{n+1} > x_n$, so ist diese Folge monoton steigend und somit hat einen Grenzwert $x = \lim x_n \in [0, +\infty]$. Sei $x < +\infty$. Es folgt aus (4.10) für $n \to \infty$, dass x die folgende Gleichung erfüllen muss:

$$x = x + \frac{1}{x^2}.$$

Da es keine reelle Zahl x gibt, die diese Gleichung erfüllt, so bleibt es nur eine Möglichkeit $x = +\infty$. Deshalb beschließen wir dass $x_n \to +\infty$.

Beispiel. Betrachten wir einen Ausdruck der aus einer unendlichen Folge von Wurzeln besteht:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}}$$

Rigoros wird der Wert dieses Ausdrucks als $\lim x_n$ definiert, wobei

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}.$$

In der Tat haben wir

$$x_2 = \sqrt{1}, \quad x_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \quad x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \quad \text{usw.}$$

Man kann zeigen, dass die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend und beschränkt ist, woraus die Konvergenz folgt (siehe Aufgabe 68). Der Grenzwert $x := \lim x_n$ lässt sich danach wie folgt bestimmen. Aus $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ erhalten wir für $n \to \infty$

$$x = \sqrt{1 + x},$$

was äquivalent zu $x^2 - x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\ldots$.

Beispiel. Die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton steigend und beschränkt (siehe Aufgabe 69). Der Grenzwert

$$e := \lim x_n = 2,718281828459045...$$

heißt die *Eulersche Zahl*, die eine wichtige Rolle in Analysis spielt.

11.12.2024 **Vorlesung 17**

4.6 Cauchy-Folgen

Erinnern wir uns an die Definition des Grenzwertes: eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ when

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N \ \ \text{gilt} \ \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Jetzt definieren wir einen ähnlichen Begriff.

Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamentalfolge*) wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m \geq N \ \text{ gilt } \ |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.11}$$

Die Bedeutung (4.11) heißt die *Cauchy-Bedingung*. Sie lässt sich äquivalent wie folgt umformulieren:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } \ |x_n - x_m| < \varepsilon \ \text{ für fast alle } n \text{ und fast alle } m. \tag{4.12}$$

Kurz bezeichnet man die Bedingung (4.11) bzw (4.12) wie folgt:

$$x_n - x_m \to 0 \ \text{ für } \ n, m \to \infty.$$

Hauptsatz 4.5 (Cauchy-Kriterium) *Eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen konvergiert genau dann, wenn $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.*

Mit Hilfe von dem Cauchy-Kriterium kann man die Konvergenz einer Folge $\{x_n\}$ beweisen, ohne den Grenzwert zu kennen, da die Cauchy-Bedingung offensichtlich den Wert des Grenzwertes nicht benutzt. Wir geben ein Beispiel von Anwendung des Cauchy-Kriteriums.

Beispiel. Definieren wir eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per Induktion wie folgt:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - x_n^2\right) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Zum Beispiel,

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{8} = 0,375\,, \quad x_4 = \frac{55}{128} = 0.429\,6875, \\
x_5 &= \frac{13\,359}{32\,768} = 0,407684326171875\,, \\
x_6 &= \frac{895\,278\,943}{2147\,483\,648} = 0,416\,896\,745\,096\,892, \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Beweisen wir, dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert, und danach bestimmen $\lim x_n$.

Schritt 1. Beweisen wir per Induktion nach n, dass $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktionsanfang ist offensichtlich da $x_1 = 0$. Induktionsschritt: gilt $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, so gilt $0 \leq 1 - x_n^2 \leq 1$ und es folgt aus (4.13), dass $x_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Schritt 2. Beweisen wir, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n+1} - x_{m+1}| \leq \frac{1}{2}\,|x_n - x_m|\,. \tag{4.14}$$

Wir haben nach (4.13)

$$|x_{n+1} - x_{m+1}| = \left|\frac{1}{2}\left(1 - x_n^2\right) - \frac{1}{2}\left(1 - x_m^2\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left|x_n^2 - x_m^2\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x_n + x_m\right| \cdot \left|x_n - x_m\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|x_n - x_m\right|,
\end{aligned}
$$

da nach dem Schritt 1

$$0 \leq x_m + x_n \leq 1.$$

Schritt 3. Beweisen wir per Induktion nach $m \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \geq m$ gilt

$$\left|x_n - x_m\right| \leq 2^{-m}. \tag{4.15}$$

Induktionsanfang. Für $m = 1$ gilt

$$\left|x_n - x_1\right| \leq 2^{-1}$$

da x_n und x_1 in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ liegen.

Induktionsschritt von m nach $m+1$. Für jedes $n \geq m+1$ haben wir $n-1 \geq m$ und somit nach der Induktionsvoraussetzung (4.15)

$$\left|x_{n-1} - x_m\right| \leq 2^{-m}.$$

Wenn wir diese Ungleichung zusammen mit (4.14) verwenden, erhalten wir

$$\left|x_n - x_{m+1}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x_{n-1} - x_m\right| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-m} = 2^{-(m+1)},$$

was zu beweisen war. Es folgt aus (4.15), dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert.

Schritt 4. Setzen wir $x = \lim x_n$. Es folgt aus (4.13), dass

$$x = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right),$$

d.h.

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die einzige nichtnegative Nullstelle

$$x = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414...$$

Beispiel. Betrachten wir einen unendlichen *Kettenbruch*:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}} \tag{4.16}$$

deren Wert wie folgt definiert ist. Betrachten wir die folgende induktiv definierte Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Zum Beispiel, wir haben

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0,5 \\
x_3 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0,666... \\
x_4 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} = 0,6 \\
x_5 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8} = 0,625.
\end{aligned}
$$

Man kann beweisen, dass die Folge $\{x_n\}$ die Cauchy-Bedingung erfüllt und somit konvergent ist (siehe Aufgabe 75). Man nimmt nach Definition an, dass der Wert des Kettenbruches (4.16) gleich $\lim x_n$ ist. Der Grenzwert $\lim x_n$ lässt sich aus der Gleichung (4.17) explizit bestimmen.

Beweis von dem Satz 4.5. *Konvergenz⇒Cauchy-Bedingung.* Sei $\{x_n\}$ konvergent und $x_n \to a$ für ein $a \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N \;\; \text{gilt} \;\; |x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.18}$$

Beweisen wir, dass $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Es folgt aus (4.18) dass für alle $n, m \geq N$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < 2\varepsilon.$$

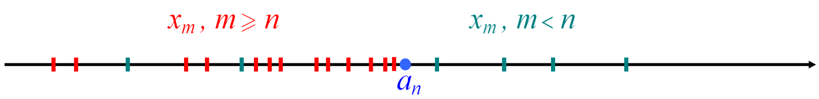
Da 2ε beliebig positiv ist, erhalten wir, dass $\{x_n\}$ die Cauchy-Bedingung erfüllt.

Cauchy-Bedingung⇒Konvergenz. Sei $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m \geq N \;\; \text{gilt} \;\; |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.19}$$

Beweisen wir, dass $\{x_n\}$ konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir

$$a_n := \sup\{x_m : m \geq n\} = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$



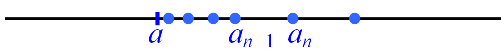
Insbesondere gelten die Ungleichungen

$$x_n \leq a_n, \quad x_{n+1} \leq a_n, \quad x_{n+2} \leq a_n, \; ... \; .$$

Es folgt

$$a_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} \leq a_n,$$

so dass die Folge $\{a_n\}$ monoton fallend ist.



Nach dem Satz 4.4 (Monotoniekriterium) gibt es den Grenzwert $a := \lim a_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

Zeigen wir, dass $a \in \mathbb{R}$ und $x_n \to a$. Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und wählen N nach (4.19), d.h. $\forall n, m \geq N$ gilt

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt es für alle $m \geq N$

$$|x_m - x_N| < \varepsilon,$$

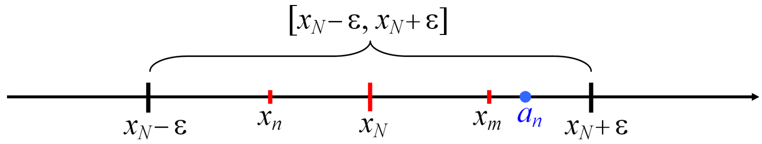
woraus folgt

$$x_m \in [x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon] \quad \forall m \geq N. \tag{4.20}$$

Da a_n das Supremum von x_m mit $m \geq n$ ist, so folgt es, dass

$$a_n \in [x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon] \quad \forall n \geq N. \tag{4.21}$$

Insbesondere ist die Folge $\{a_n\}$ beschränkt, woraus $a \in \mathbb{R}$ folgt.



Setzen wir in (4.20) mit $m = n$ und erhalten aus (4.20) und (4.21) dass

$$x_n \text{ und } a_n \in [x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon] \quad \forall n \geq N.$$

und somit

$$|x_n - a_n| \leq 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - a_n| = 0$$

und somit

$$\lim x_n = \lim (a_n + (x_n - a_n)) = \lim a_n + \lim (x_n - a_n) = a.$$

■

Bemerkung. Nach dem obigen Argument, für beliebige Folge $\{x_n\}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{x_m : m \geq n\} =: \limsup_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}},$$

der heißt *Limes superior* von x_n. Analog existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \inf \{x_m : m \geq n\} =: \liminf_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}},$$

der heißt *Limes inferior* von x_n. Es folgt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Die Begriffe von Limes superior und Limes inferior ersetzen den Begriff des Limes wenn dieser nicht existiert. Man kann beweisen, dass der Grenzwert $\lim x_n$ genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert, wenn

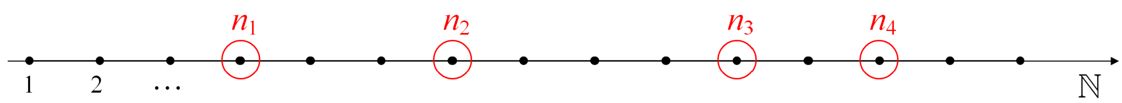
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

(siehe Aufgabe 77).

4.7 Teilfolgen und Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition. Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (d.h. die Folge $\{n_k\}$ ist *streng monoton steigend*). Dann heißt die Folge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ...\}$ eine *Teilfolge* von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ein Beispiel einer streng monoton steigenden Folge $\{n_k\}$ ist hier gezeigt.



Erinnern wir uns daran, dass eine Folge $\{x_n\}$ eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist mit $x_n = x(n)$. Analog ist die Folge $\{n_k\}$ eine Abbildung $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n(k) = n_k$. Die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ ist die zusammengesetzte Abbildung $x \circ n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $(x \circ n)(k) = x(n(k)) = x_{n_k}$.

Beispiel. Sei $n_k = 2k$. Dann $x_{n_k} = x_{2k}$, und die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ besteht aus allen Gliedern der Folge $\{x_n\}$ mit geraden n.

Definition. Ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $\{x_n\}$ wenn es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ gibt mit $x_{n_k} \to a$.

Lemma 4.6 *Seien $\{x_n\}$ eine Folge und $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(a) Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$ so jede Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ hat den Grenzwert a. Mit anderen Worten ist a der einzige Häufungspunkt von $\{x_n\}$.

(b) Ist a ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$ so enthält jede Umgebung $U(a)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$.

Beweis. (a) Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so enthält jede Umgebung $U(a)$ fast alle Folgenglieder x_n, d.h. die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U(a)\}$ endlich ist. Daraus folgt, dass auch die Menge

$$\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \notin U(a)\}$$

endlich ist, so dass fast alle x_{n_k} in $U(a)$ liegen, d.h. $x_{n_k} \to a$.

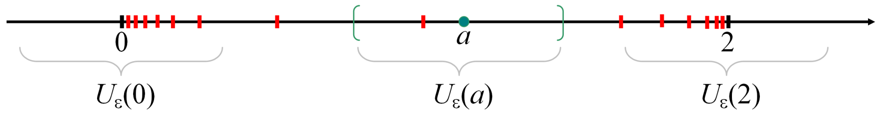
(b) Ist a ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$ so ist a ein Grenzwert einer Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Somit enthält jede Umgebung $U(a)$ fast alle Folgenglieder $\{x_{n_k}\}$ und somit unendlich viele Glieder von $\{x_n\}$. ■

Beispiel. Die Folge $x_n = (-1)^n$ has keine Grenzwert, aber diese Folge hat zwei Häufungspunkte: 1 und -1, da $x_{2k} \to 1$ und $x_{2k+1} \to -1$. Es gibt keine weiteren Häufungspunkte: für jede $a \notin \{-1, 1\}$ gibt es eine Umgebung $U(a)$ die weder 1 noch -1 enthält.

Beispiel. Bestimmen wir die Häufungspunkte der Folge

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1 - (-1)^n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ ist gerade} \\ 2 - \frac{1}{n}, & n \text{ its ungerade.} \end{cases}$$

Da $\frac{1}{n} \to 0$ und $2 - \frac{1}{n} \to 2$, so sind 0 und 2 die Häufungspunkte der Folge. Zeigen wir, dass es keinen anderen Häufungspunkt gibt. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \in [0, 2]$, so gibt es keinen Häufungspunkt außerhalb des Intervalls $[0, 2]$. Sei $a \in (0, 2)$.

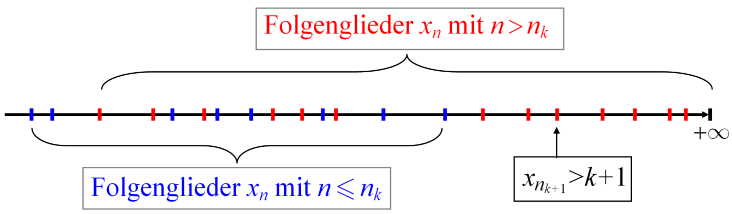


Dann gibt es ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ derart, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ disjunkt von $U_\varepsilon(0)$ und $U_\varepsilon(2)$ ist. Deshalb ist die Menge $\{n : x_n \in U_\varepsilon(a)\}$ endlich für gerade n, und auch endlich für ungerade n. Somit ist diese Menge endlich, und a ist kein Häufungspunkt.

Lemma 4.7 *Wenn $\{x_n\}$ eine nach oben (bzw unten) unbeschränkte Folge so ist $+\infty$ (bzw $-\infty$) ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$.*

Beweis. Wir konstruieren per Induktion nach k eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $x_{n_k} > k$, woraus folgt $x_{n_k} \to +\infty$. Induktionsanfang für $k = 1$. Wir wählen n_1 so dass $x_{n_1} > 1$ (das ist möglich da $\{x_n\}$ nach oben unbeschränkt ist).

Induktionsschritt von k nach $k+1$. Ist n_k schon bekannt, wir wählen n_{k+1} wie folgt. Da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt ist, so ist auch die Menge $\{x_n : n > n_k\}$ auch nach oben unbeschränkt (da das Komplement $\{x_n : n \le n_k\}$ eine endliche und somit beschränkte Menge ist).



Somit gibt es für jede Zahl C ein $n > n_k$ mit $x_n > C$. Insbesondere gibt es ein $n > n_k$ mit $x_n > k + 1$. Wir setzen $n_{k+1} = n$ und erhalten $n_{k+1} > n_k$ und $x_{n_{k+1}} > k + 1$, was zu beweisen war. ■

Hauptsatz 4.8 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Setzen wir

$$a_n = \sup\{x_m : m \ge n\}. \tag{4.22}$$

Wir wissen schon, dass die Folge $\{a_n\}$ ist monoton fallend. Da $\{x_n\}$ beschränkt ist, so ist a_n reell. Die Folge $\{a_n\}$ ist auch beschränkt und somit konvergent. Setzen wir

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

und zeigen, dass a ein Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}$ ist. Wir konstruieren per Induktion nach k eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ so dass

$$|x_{n_k} - a| \le \frac{1}{k} \quad \forall k \ge 2.$$

und somit $x_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$.

Induktionsanfang: $n_1 = 1$. Induktionsschritt von k nach $k+1$. Sei n_k schon bekannt, wir müssen n_{k+1} so wählen dass $n_{k+1} > n_k$ und

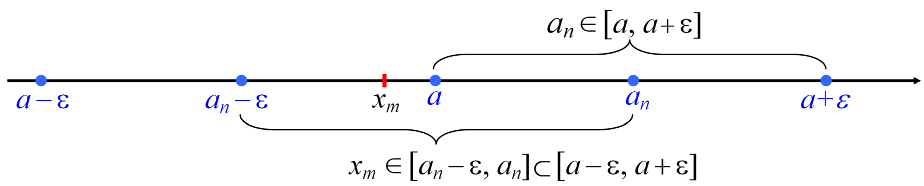
$$\left|x_{n_{k+1}} - a\right| \leq \frac{1}{k+1} =: \varepsilon. \tag{4.23}$$

Da $a_n \to a$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, woraus folgt

$$a_n \in [a, a+\varepsilon],$$

da $a_n \geq a$. Fixieren wir ein n so groß dass $n \geq N$ und auch $n > n_k$, und betrachten a_n. Es folgt aus (4.22) dass ein $m \geq n$ existiert mit

$$x_m \in [a_n - \varepsilon, a_n].$$



Setzen wir $n_{k+1} = m$ (insbesondere gilt $n_{k+1} \geq n > n_k$) und erhalten dass

$$x_{n_{k+1}} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

woraus (4.23) folgt. ■

Korollar 4.9 *Jede Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen besitzt eine Teilfolge, die einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ hat. Mit anderen Worten, die Menge von Häufungspunkten von $\{x_n\}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ist immer nichtleer.*

Beweis. Jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ hat einen Häufungspunkt nach dem Satz 4.8. Ist die Folge $\{x_n\}$ nach oben (bzw nach unten) unbeschränkt, so ist $+\infty$ (bzw $-\infty$) ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$ nach Lemma 4.7. ■

13.12.2024 Vorlesung 18

4.8 Operationen mit $+\infty$ und $-\infty$.

Für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir Addition mit $+\infty$ wie folgt:

$$(+\infty) + a = a + (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & -\infty < a \leq +\infty \\ \text{unbestimmt}, & a = -\infty. \end{cases}$$

Analog definiert man Addition mit $-\infty$:

$$(-\infty) + a = a + (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & -\infty \leq a < +\infty \\ \text{unbestimmt}, & a = +\infty. \end{cases}$$

Subtraktion reduziert sich auf Addition wie folgt:

$$a-(+\infty)=a+(-\infty) \quad \text{und} \quad a-(-\infty)=a+(+\infty)\,.$$

Multiplikation mit $+\infty$ wird wie folgt definiert:

$$(+\infty)\cdot a = a\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & 0<a\le+\infty \\ -\infty, & -\infty\le a<0 \\ \text{unbestimmt}, & a=0. \end{cases}$$

und analog mit $-\infty$.

Division durch $+\infty$ wird wie folgt definiert:

$$\frac{a}{+\infty} = \begin{cases} 0, & a\in\mathbb{R} \\ \text{unbestimmt}, & a=+\infty \text{ or } a=-\infty, \end{cases}$$

und analog durch $-\infty$.

Somit bleiben die folgenden Operationen unbestimmt:

$$\infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0}. \tag{4.24}$$

Alle diese Ausdrücke heißen *unbestimmte* Ausdrücke. Auch $\frac{a}{0}$ ist unbestimmt.

Satz 4.10 *Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei Folgen von reellen Zahlen mit $\lim x_n = a$ und $\lim y_n = b$ wobei $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten die Rechenregeln*

$$\lim(x_n+y_n)=a+b,\quad \lim(x_n-y_n)=a-b,\quad \lim(x_ny_n)=ab,\qquad \lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}, \tag{4.25}$$

vorausgesetzt, dass die Ausdrücke $a+b$, $a-b$, ab, bzw $\frac{a}{b}$ bestimmt sind (und $y_n\neq0$ im letzten Fall).

Beweis. Für reellen a,b wurden die Identitäten (4.25) im Satz 4.2 bewiesen. Betrachten wir den Fall wenn a reell ist und $b=+\infty$. Die Folge $\{x_n\}$ ist beschränkt, d.h. es gibt $c>0$ mit

$$|x_n|<c \text{ für alle } n, \tag{4.26}$$

für ein $c>0$ (wir verwenden nur die Beschränktheit von $\{x_n\}$). Für jedes $E\in\mathbb{R}$ gilt $y_n\in U_E(+\infty)$ für fast alle n, d.h.

$$y_n>E \;\text{ für fast alle } n, \tag{4.27}$$

Bestimmen wir $\lim(x_n+y_n)$. Es folgt aus (4.26) und (4.27), dass für fast alle n

$$x_n+y_n>-c+E=:E',$$

Da E' beliebig ist, so erhalten wir, dass

$$x_n+y_n\to+\infty=a+b.$$

Bestimmen wir $\lim(x_n-y_n)$. Es folgt analog, dass für fast alle n

$$x_n-y_n<c-E=:E',$$

und somit

$$x_n - y_n \to -\infty = a - b.$$

Bestimmen wir $\lim x_n y_n$. Nehmen wir zusätzlich an, dass $a > 0$ (der Fall von $a < 0$ ist analog). Dann gilt $x_n \in U_{a/2}(a)$ für fast alle n, insbesondere gilt

$$x_n > \frac{a}{2} \text{ für fast alle } n.$$

Es folgt aus (4.27) mit $E > 0$, dass für fast alle n

$$x_n y_n > \frac{a}{2} E =: E'.$$

Da E' eine beliebige positive Zahl ist, so folgt es

$$x_n y_n \to +\infty = ab.$$

Bestimmen wir $\lim \frac{x_n}{y_n}$. Es folgt aus (4.26) und (4.27) mit $E > 0$, dass

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = \frac{|x_n|}{y_n} < \frac{c}{E} =: \varepsilon.$$

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, so erhalten wir

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \to 0$$

und somit

$$\frac{x_n}{y_n} \to 0 = \frac{a}{b}.$$

Die anderen Fällen von a und b lassen sich analog behandeln. ∎

Beispiel. Zeigen wir, warum die Ausdrücke (4.24) unbestimmt sollen sein.

1. *Warum ist* $\infty - \infty$ *unbestimmt?*

Die Folgen $x_n = n + c$ und $y_n = n$ haben den Grenzwert $+\infty$ aber die Differenz $x_n - y_n = c$ hat den Grenzwert c, was eine beliebige reelle Zahl ist. Für die Folge $x_n = n + (-1)^n$ gilt auch $\lim x_n = +\infty$ aber die Differenz $x_n - y_n = (-1)^n$ überhaupt keinen Grenzwert hat. Somit lässt der Ausdruck $\infty - \infty$ sich nicht eindeutig definieren.

2. *Warum ist* $0 \cdot \infty$ *unbestimmt?*

Sei $x_n = \frac{c}{n}$ und $y_n = n$. Dann gilt $x_n \to 0$ und $y_n \to +\infty$, während $x_n y_n \to c$. Da c beliebig ist, so $0 \cdot \infty$ lässt sich nicht eindeutig definieren.

3. *Warum ist* $\frac{\infty}{\infty}$ *unbestimmt?*

Sei $x_n = cn$ mit $c > 0$ und $y_n = n$ so dass $x_n \to +\infty$ und $y_n \to +\infty$. Dann gilt $\frac{x_n}{y_n} \to c$, so dass $\frac{\infty}{\infty}$ sich nicht eindeutig definieren lässt.

4. *Warum ist* $\frac{0}{0}$ *unbestimmt?*

Sei $x_n = \frac{c}{n}$ und $y_n = \frac{1}{n}$ so dass $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$. Dann gilt $\frac{x_n}{y_n} \to c$, so dass $\frac{0}{0}$ sich nicht eindeutig definieren lässt.

Beispiel. Mit Hilfe von dem Satz 4.10 bestimmen wir den folgenden Grenzwert:

$$\lim \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2^n - \frac{n+1}{n}}.$$

Da $\sqrt{n} \to +\infty$, so gilt
$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$
und
$$\lim \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3 + 0 = 3.$$
Da $2^n \to +\infty$ und $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, so gilt
$$\lim \left(2^n - \frac{n+1}{n}\right) = +\infty - 1 = +\infty.$$
Somit erhalten wir
$$\lim \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2^n - \frac{n+1}{n}} = \frac{3}{+\infty} = 0.$$
Den Grenzwert
$$\lim \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}} \tag{4.28}$$
kann man analog nicht bestimmen, da $n+\sqrt{n} \to +\infty$ und auch $n-\sqrt{n} \to +\infty$ (da $\sqrt{n} \leq \frac{n}{2}$ für $n \geq 4$ und somit $n - \sqrt{n} \geq n/2$). In diesem Fall erhalten wir den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, und man muss andere Methoden einsetzen. Den Grenzwert
$$\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \tag{4.29}$$
ist auch ein unbestimmter Ausdruck $\infty - \infty$, so ist der Satz 4.10 in diesem Fall auch nicht benutzbar. Die Grenzwerte (4.28) und (4.29) werden in Aufgabe 58 betrachtet.

4.9 Komplexwertige Folgen

Definition. Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ von komplexen Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ wenn $|z_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$. Man schreibt: $\lim z_n = a$ oder $z_n \to a$ für $n \to \infty$.

Definition. Eine komplexwertige Folge $\{z_n\}$ heißt Cauchy-Folge wenn $|z_n - z_m| \to 0$ für $n, m \to \infty$.

Offensichtlich stimmen diese Definitionen mit den entsprechenden Definitionen für reellwertige Folgen überein.

Satz 4.11 *Sei $\{z_n\}$ eine komplexwertige Folge.*

(a) Die Konvergenz $z_n \to a$ für ein $a \in \mathbb{C}$ gilt genau dann, wenn $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} a$.

(b) Die Folge $\{z_n\}$ ist Cauchy-Folge genau dann, wenn $\{\operatorname{Re} z_n\}$ und $\{\operatorname{Im} z_n\}$ Cauchy-Folgen sind.

(c) (Cauchy-Kriterium) Die Folge $\{z_n\}$ ist konvergent genau dann, wenn $\{z_n\}$ Cauchy-Folge ist.

Beweis. (a) Siehe Aufgabe 65

(b) Wir haben

$$|z_n - z_m|^2 = |x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2$$

woraus folgt, dass

$$|z_n - z_m| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_n - x_m| \to 0 \text{ und } \quad |y_n - y_m| \to 0$$

für $n, m \to \infty$. Somit ist $\{z_n\}$ Cauchy-Folge genau dann, wenn $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ Cauchy-Folgen sind.

(c) Nach (a), (b) und Satz 4.5 erhalten wir

$$\begin{aligned} \{z_n\} \text{ konvergiert} &\Leftrightarrow \{x_n\} \text{ und } \{y_n\} \text{ konvergieren} \\ &\Leftrightarrow \{x_n\} \text{ und } \{y_n\} \text{ sind Cauchy-Folgen} \\ &\Leftrightarrow \{z_n\} \text{ ist Cauchy-Folge.} \end{aligned}$$

■

Satz 4.12 (Rechenregeln) *Seien $\{z_n\}$ und $\{w_n\}$ zwei komplexwertige konvergente Folgen mit $z_n \to a$ und $w_n \to b$. Dann gelten*

$$z_n + w_n \to a + b, \quad z_n - w_n \to a - b, \quad z_n w_n \to ab, \quad \frac{z_n}{w_n} \to \frac{a}{b}$$

wobei im letzten Teil vorausgesetzt ist, dass $w_n \neq 0$ und $b \neq 0$.

Beweis erfolgt mit Hilfe von den Sätzen 4.2 und 4.11 (siehe Aufgabe 66).

4.10 Intervallschachtelungsprinzip

In diesem Abschnitt betrachten wir die Folgen von Mengen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wobei A_n eine Menge für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist. Man definiert den Durchschnitt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und die Vereinigung $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ der Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } x \in A_n,$$

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ \text{ mit } x \in A_n$$

Definition. Eine Folge $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen heißt eine *Intervallschachtelung* wenn $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es folgt, dass für alle $m \geq n$ gilt $I_m \subset I_n$.

Satz 4.13 (Intervallschachtelungsprinzip) *Sei $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Intervallschachtelung, wobei alle Intervalle I_n abgeschlossen und beschränkt sind. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nichtleer.*

18.12.2024 **Vorlesung 19**

Bemerkung. Es ist wichtig, dass alle Intervalle abgeschlossen sind. Betrachten wir die folgende Intervallschachtelung: $I_n = (0, \frac{1}{n}]$. Wir behaupten, dass der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ leer ist. In der Tat, gilt $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $0 < x \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch $x^{-1} \geq n$, was im Widerspruch zum Archimedischen Prinzip steht. Im Gegenteil ist der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, \frac{1}{n}]$ nichtleer da er die Null enthält.

Auch ist die Beschränktheit der Intervalle wesentlich. Zum Beispiel, die Intervallschachtelung von den unbeschränkten Intervallen $I_n = [n, +\infty)$ hat einen leeren Durchschnitt.

Beweis. Sei $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$. Die Bedingung $I_{n+1} \subset I_n$ ist äquivalent zu

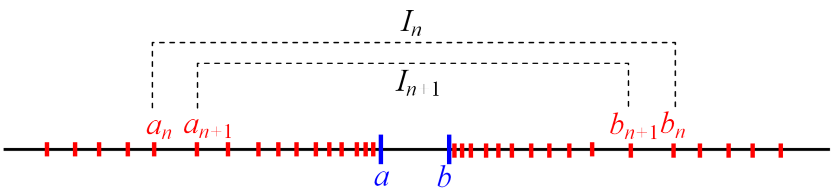
$$a_n \leq a_{n+1} \text{ und } b_n \geq b_{n+1}.$$

d.h. die Folge $\{a_n\}$ monoton steigend ist und $\{b_n\}$ – monoton fallend. Nach dem Satz 4.4 haben die beiden Folgen die Grenzwerte:

$$a := \lim a_n = \sup \{a_n\}$$

und

$$b := \lim b_n = \inf \{b_n\}.$$



Die Bedingung $a_n \leq b_n$ impliziert nach dem Satz 4.3 dass $a \leq b$. Deshalb gilt für alle n

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n,$$

was impliziert, dass $[a, b] \subset [a_n, b_n] = I_n$ für alle n and somit

$$[a, b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Folglich ist der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nicht leer. ∎

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $[a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

4.11 * Alternativer Beweis von dem Cauchy-Kriterium

Zweiter Beweis von dem Satz 4.5. Hier geben wir einen anderen Beweis der Implication

Cauchy-Bedingung $\Rightarrow$ *Konvergenz*,

der auf dem Intervallschachtelungsprinzip basiert. Sei $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge. Wir beweisen, dass $\{x_n\}$ konvergent. Dafür definieren wir per Induktion nach k eine Folge $\{I_k\}$ von beschränkten abgeschlossenen Intervallen mit der folgenden Eigenschaften:

1. Die Länge $\ell(I_k) \le \frac{2}{k}$;
2. $I_{k+1} \subset I_k$;
3. Fast alle Folgenglieder x_n liegen in I_k für jedes k.

Induktionsanfang für $k = 1$. Es folgt aus (4.11) mit $\varepsilon = 1$ dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\forall n, m \ge N \quad |x_n - x_m| < 1.$$

Fixieren wir ein $m \ge N$ and setzen

$$I_1 := [x_m - 1, x_m + 1].$$

Somit erhalten wir $\ell(I_1) = 2$ und $x_n \in I_1$ für alle $n \ge N$.

Induktionsschritt von k nach $n + 1$. Ist I_k schon definiert, so definieren wir I_{k+1} wie folgt. Es folgt aus (4.11) mit $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\forall n, m \ge N \text{ gilt } \quad |x_n - x_m| < \frac{1}{k+1}.$$

Da fast alle x_n in I_k liegen, so kann man N so groß wählen, dass auch $x_n \in I_k$ für alle $n \ge N$. Fixieren wir ein $m \ge N$ und setzen

$$I_{k+1} = I_k \cap [x_m - \tfrac{1}{k+1}, x_m + \tfrac{1}{k+1}].$$

Es folgt, dass $\ell(I_{k+1}) \le \frac{2}{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ und $x_n \in I_k$ für alle $n \ge N$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es eine Zahl

$$a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Zeigen wir, dass $a = \lim x_n$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein k mit $\ell(I_k) < \varepsilon$. Da $a \in I_k$, so folgt es, dass

$$I_k \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Da I_k fast alle x_n enthält, so folgt es, dass auch $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ fast alle x_n enthält, woraus $a = \lim x_n$ folgt. ■

4.12 * Weitere Eigenschaften von Häufungspunkten

Satz 4.14 *Sei $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) a ist ein Häufungspunkt der Folge $\{x_n\}$ (d.h. a ist der Grenzwert einer Teilfolge von $\{x_n\}$).

(ii) Jede Umgebung $U(a)$ von a enthält unendlich viel Glieder der Folge $\{x_n\}$ (d.h. die Menge$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U(a)\}$ ist unendlich).

Der Beweis von $(i) \Rightarrow (ii)$ befindet sich in Lemma 4.6, und von $(ii) \Rightarrow (i)$ – in Aufgabe 76.

Satz 4.15 *Sei $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Menge von allen Häufungspunkten einer Folge $\{x_n\}$. Dann gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max H \quad \textit{und} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \min H.$$

Beweis in Aufgabe 78.

4.13 * Überdeckungssatz

Fixieren wir eine Grundmenge M und eine nichtleere *Indexmenge* S. Eine *Familie* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$ von Teilmengen von M mit der Indexmenge S ist eine Abbildung

$$\begin{gathered} A : S \to \mathcal{P}(M) \\ S \ni \alpha \mapsto A_\alpha \subset M \end{gathered}$$

Für beliebiges S definieren wir die Vereinigung $\bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$ und den Durchschnitt $\bigcap\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$ der Familie $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$ wie folgt:

$$x \in \bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha \in S \ \text{ mit } x \in A_\alpha$$

$$x \in \bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha \in S \text{ gilt } x \in A_\alpha.$$

Definition. Eine Familie $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$ von Mengen heißt eine *Überdeckung* einer Menge B wenn

$$B \subset \bigcup_{\alpha\in S} A_\alpha.$$

Ist T eine Teilmenge von S, so betrachten wir auch die *Teilfamilie* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$. Ist $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ auch eine Überdeckung von B, so heißt sie eine *Teilüberdeckung* von B.

Hauptsatz 4.16 (Satz von Heine-Borel[3], Überdeckungssatz) *Seien a, b reelle Zahlen mit $a \le b$ und sei $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ eine Überdeckung von $[a, b]$ mit offenen Intervallen I_α, wobei S eine beliebige Indexmenge ist. Dann enthält $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ eine* ***endliche*** *Teilüberdeckung $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$ von $[a, b]$.*

Die Endlichkeit von $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$ bedeutet, dass T eine endliche Teilmenge von S ist. Der Satz 4.16 lässt sich kurz wie folgt umformulieren: jede offene Überdeckung von $[a, b]$ enthält eine endliche Teilüberdeckung, wobei

"offene Überdeckung"="eine Überdeckung mit offenen Intervallen"

Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt* wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Offensichtlich ist jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ kompakt. Der Satz 5.5 besagt, dass auch jedes beschränktes abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ kompakt ist. In bestimmten Sinn haben kompakte Mengen ähnlichen Eigenschaften wie endliche Mengen. Zum Beispiel, wir wissen, dass jede nichtleere endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ das Maximum und Minimum hat (Aufgabe 40). Man kann beweisen, dass jede nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ auch das Maximum und Minimum hat (siehe Aufgabe 60).

Der Begriff von Kompaktheit ist einer von zentralen Begriffen in Analysis and Topologie. Wir vertiefen und benutzen ihn später.

Beweis von Satz 4.16. Nehmen wir das Gegenteil an, dass es eine Überdeckung $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ von $[a, b]$ gibt die keine endliche Teilüberdeckung von $[a, b]$ enthält. Wir sagen

[3] Auch als "Satz von Borel-Lebesgue" genannt.

dass eine Teilmenge J von $[a,b]$ *passend* ist wenn J keine endliche Teilüberdeckung von $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ zulässt. Somit ist $[a,b]$ passend. Als Beispiel bemerken wir, dass eine Teilmenge J von einem von I_α nicht passend ist.

Wir bestimmen eine Folge $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen mit den folgenden Eigenschaften:

- $[a_1,b_1]=[a,b]$;
- $\{[a_n,b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung;
- jedes Intervall $[a_n,b_n]$ ist passend;
- $b_n-a_n\to 0$ für $n\to\infty$.

Wir definieren $[a_n,b_n]$ per Induktion nach n. Für Induktionsanfang setzen wir $[a_1,b_1]=[a,b]$.

Für Induktionsschritt nehmen wir an, dass $[a_n,b_n]$ für ein n schon definiert, und bestimmen $[a_{n+1},b_{n+1}]$ wie folgt. Setzen wir

$$c=\frac{a_n+b_n}{2}$$

und bemerken, dass eines von zwei Intervallen $[a_n,c]$, $[c,b_n]$ passend ist. In der Tat, ist es nicht der Fall, so gibt es endliche Teilüberdeckungen $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T_1}$ von $[a_n,c]$ und $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T_2}$ von $[c,b_n]$. Dann ist $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T_1\cup T_2}$ eine endliche Teilüberdeckung von $[a_n,b_n]$, was nach der Induktionsvoraussetzung nicht möglich ist.

Bezeichnen wir mit $[a_{n+1},b_{n+1}]$ das eine der Intervalle $[a_n,c]$, $[c,b_n]$, das passend ist. Offensichtlich haben wir

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$$

und

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}. \tag{4.30}$$

Die Folge $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^\infty$ ist somit eine Intervallschachtelung. Es folgt aus (4.30) dass

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}$$

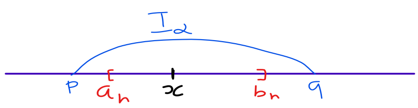
und somit

$$b_n-a_n\to 0 \text{ für } n\to\infty. \tag{4.31}$$

Nach dem Satz 4.13 existiert eine Zahl

$$x\in\bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n].$$

Da $x\in[a,b]$ und $\{I_\alpha\}_{\alpha\in S}$ eine Überdeckung von $[a,b]$ ist, so gehört x zu einem Intervall I_α mit $\alpha\in S$. Sei $I_\alpha=(p,q)$ mit $p<q$ und somit $p<x<q$.



Wie behaupten, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$[a_n, b_n] \subset (p, q)\,. \tag{4.32}$$

Da $a_n \le x \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt es aus (4.31), dass

$$|a_n - x| \to 0 \quad \text{und} \quad |b_n - x| \to 0$$

und somit

$$\lim a_n = \lim b_n = x.$$

Da $x \in (p, q)$, so enthält (p, q) fast alle a_n und b_n, woraus (4.32) für ein n folgt. Die Bedingung (4.32) bedeutet, dass das Intervall $[a_n, b_n]$ von *einem* Intervall I_α überdeckt ist, so dass $[a_n, b_n]$ nicht passend ist, was im Widerspruch zur Konstruktion von $[a_n, b_n]$ steht, da alle $[a_n, b_n]$ passend sind. ∎

Korollar 4.17 *Ein nichtleeres Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt when J abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Ist J abgeschlossen und beschränkt so ist J kompakt nach dem Satz 4.16. Beweisen wir, dass wenn J nicht abgeschlossen oder nicht beschränkt ist, so ist J nicht kompakt. Dafür zeigen wir, dass es eine offene Überdeckung von J gibt die keine endliche Teilüberdeckung hat.

Sei zuerst J unbeschränkt. Betrachten wir die Folge $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von offenen Intervallen $I_k = (-k, k)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist die Familie $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$ und somit von J. Ist $\{I_k\}_{k\in T}$ eine endliche Teilüberdeckung von J, so ist T eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und somit existiert das Maximum von T, sei $m = \max T$. Dann gilt $I_k \subset I_m$ für alle $k \in T$ und somit

$$\bigcup_{k\in T} I_k = I_m \not\supset J,$$

was ein Widerspruch ist. Somit ist J nicht kompakt.

Sei jetzt J ein beschränktes Intervall das nicht abgeschlossen ist. Zum Beispiel, sei $J = (a, b]$ mit $a < b$ (andere Typen von Intervallen lassen sich analog behandeln). Betrachten wir die offenen Intervalle

$$I_k = (a + \frac{1}{k}, c), \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $c = b + 1$. Die Familie $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von $(a, b]$, aber sie hat keine endliche Teilüberdeckung. In der Tat sei $\{I_k\}_{k\in T}$ eine endliche Teilüberdeckung von J. Wie in dem obigen Argument setzen wir $m = \max T$ und erhalten, dass

$$\bigcup_{k\in T} I_k = I_m,$$

während das einzige Intervall I_m keine Überdeckung von J ist. ∎

4.14 * Alternativer Beweis von dem Satz von Bolzano-Weierstraß

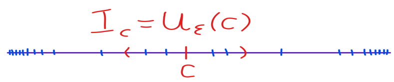
Zweiter Beweis von dem Satz 4.8. Wir geben hier einen anderen Beweis von dem Satz von Bolzano-Weierstraß, der auf dem Überdeckungssatz basiert. Wir müssen beweisen, dass jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ einen Häufungspunkt hat. Nach dem Satz 4.14, ein $c \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$ genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(c) \text{ enthält unendlich viel Glieder von } \{x_n\}. \tag{4.33}$$

Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ so dass $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\{x_n\}$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ hat. Dann für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt die Negation von (4.33), d.h. für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ so dass } U_\varepsilon(c) \text{ nur endlich viel Glieder von } \{x_n\} \text{ enthält.} \tag{4.34}$$

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ wählen wir ein ε wie in (4.34) und bezeichnen $I_c = U_\varepsilon(c)$. Die Familie $\{I_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ von offenen Intervallen überdeckt offensichtlich die ganze Menge $\mathbb{R}$, insbesondere das Intervall $[a, b]$.



Nach dem Satz 4.16, es gibt eine endliche Teilüberdeckung $\{I_c\}_{c\in T}$ von $[a, b]$. Da jedes I_c nur endlich viel Glieder von $\{x_n\}$ enthält, so erhalten wir, dass die Vereinigung $\bigcup_{c\in T} I_c$ auch nur endlich viel Glieder von $\{x_n\}$ enthält, was im Widerspruch zur Bedingung steht, dass $[a, b]$ die ganze Folge $\{x_n\}$ enthält. ■

Chapter 5

Reihen

5.1 Reellwertige Reihen

Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

heißt eine *Reihe* (unendliche Summe). Die Summe (der Wert) der Reihe wird wie folgt definiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir zuerst die *Partialsumme*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ... + a_n.$$

Es gilt nach der induktiven Definition einer endlichen Summe, dass

$$S_1 = a_1 \text{ und } S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Definition. Setzen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n,$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.

Der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist nur dann definiert wenn die Folge $\{S_n\}$ konvergent oder bestimmt divergent ist. Ist $\{S_n\}$ unbestimmt divergent, so ist der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht definiert. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent bzw bestimmt divergent bzw unbestimmt divergent ist, wenn gleiches für die Folge $\{S_n\}$ gilt.

Beispiel. Betrachten wir die *geometrische* Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + ...$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Für $x \neq 1$ ist die Partialsumme gleich

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \tag{5.1}$$

(Aufgabe 31). Im Fall $x \in (-1,1)$ erhalten wir $x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, woraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}. \tag{5.2}$$

Im Fall $x > 1$ folgt es aus (5.1) und $x^{n+1} \to +\infty$ dass

$$S_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \to +\infty \ \text{ für } \ n \to \infty,$$

so dass $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = +\infty$. Im Fall $x = 1$ gilt (5.1) nicht, aber wir haben $S_n = n+1$ und somit wieder $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \infty$.

Für $x \leq -1$ hat die Folge $\{x^{n+1}\}$ und somit $\{S_n\}$ keinen Grenzwert, woraus folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ unbestimmt divergiert.

Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *nichtnegativ* wenn alle Glieder a_k nichtnegative reelle Zahlen sind.

Satz 5.1 *Für jede nichtnegative Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist ihre Summe immer definiert als Element von $[0,+\infty]$. Mit anderen Worten gibt es nur zwei Möglichkeiten:*

1. *entweder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert;*
2. *oder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ und die Reihe bestimmt divergiert.*

Beweis. Da $a_k \geq 0$, so ist die Folge $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Partialsummen monoton steigend, weil

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n.$$

Nach den Satz 4.4 existiert $\lim S_n$ als Element von $\overline{\mathbb{R}}$. Da $S_n \geq 0$, so gilt $\lim S_n \in [0,+\infty]$.
■

Beispiel. Betrachten wir die *harmonische* Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

und zeigen, dass sie bestimmt divergent ist, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \tag{5.3}$$

Dafür bemerken wir, dass für die Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \tag{5.4}$$

die folgende Eigenschaft gilt

$$S_{2n} - S_n \quad = \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

Somit ist die Cauchy-Bedingung für die Folge $\{S_n\}$ nicht erfüllt, und die Folge $\{S_n\}$ ist nicht konvergent. Da die harmonische Reihe nicht-negative ist und somit ihre Summe definiert ist, es folgt, dass die Summe gleich $+\infty$ ist, d.h. (5.3).

Bemerken wir, dass die Folge $\{S_n\}$ von Partialsummen sehr langsam steigt, zum Beispiel

$$S_{1000} = 7,485\ldots,\quad S_{10\,000} = 9,787\ldots,\quad S_{100\,000} = 12,090\ \ldots,\ S_{1\,000\,000} = 14,392\ \ldots$$

Beispiel. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

(siehe Aufgabe 82). In der Tat gilt es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1,644\,934\ldots$$

Satz 5.2 *Gilt* $0 \leq a_k \leq b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *so gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Betrachten wir die Partialsummen

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{und} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k. \tag{5.6}$$

Die Voraussetzung $a_k \leq b_k$ ergibt $A_n \leq B_n$ und somit $\lim A_n \leq \lim B_n$, was zu beweisen war. ∎

5.2 Komplexwertige Reihen

Sei jetzt $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von komplexen Zahlen.

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ von *Partialsummen* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergent ist (sonst heißt die Reihe divergent). Der Summe (der Wert) der konvergenten Reihe wird wie folgt definiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Nach den Eigenschaften des Limes erhalten wir die folgenden Eigenschaften von Reihen.

Satz 5.3 *Für $a_k, b_k, c \in \mathbb{C}$ gelten die Identitäten*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{5.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

vorausgesetzt, dass die rechten Seiten bestimmt sind.

Bemerkung. Die letzte Bedingung bedeutet, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \sum b_k$ konvergent sind. Im Fall wenn a_k, b_k, c reell sind, kann man auch bestimmt divergente Reihen erlauben, vorausgesetzt, dass die Operationen mit den Unendlichkeiten in den rechten Seiten bestimmt sind.

Beweis. Betrachten wir die Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = A_n + B_n,$$

wobei A_n und B_n die Partialsummen von $\sum a_k$ bzw $\sum b_k$ sind, wie in (5.6). Nach dem Satz 4.12 (4.10 im Fall von reellen Reihen) erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

woraus (5.7) folgt. Die zweite Identität wird analog bewiesen. ∎

Für jede Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir auch die *Restreihe* $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$.

Satz 5.4 (a) (Restreihe-Kriterium) *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent genau dann, wenn die Restreihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent ist (für jedes $m \in \mathbb{N}$).*

(b)(Trivialkriterium) *Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt* $\lim a_k = 0$.

Die Folge $\{a_k\}$ heißt *Nullfolge* wenn $\lim a_k = 0$. Dann (b) ergibt folgendes: ist die Folge $\{a_k\}$ keine Nullfolge, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis. (a) Betrachten wir die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $T_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$ mit $n > m$. Dann gilt

$$S_n - T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k =: C, \tag{5.8}$$

wobei die Konstante C unabhängig von n ist. Daraus folgt, dass $\{S_n\}$ konvergiert genau dann, wenn $\{T_n\}$ konvergiert.

(b) Für die Partialsummen gilt

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n.$$

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergent, so ist die Folge $\{S_n\}$ konvergent und somit Cauchy, woraus folgt $\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$ und somit auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

■

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt es aus (5.8), dass

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \to 0 \text{ für } m \to \infty$$

so dass $\sum_{k=m}^{\infty} a_k \to 0$ für $m \to \infty$.

Beispiel. Betrachten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $x \in \mathbb{C}$. Genauso wie im reellen Fall erhalten wir im Fall $|x| < 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \to \frac{1}{1-x} \text{ für } n \to \infty,$$

(siehe (5.1)) da $|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \to 0$. Somit gilt im Fall $|x| < 1$ die Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Im Fall $|x| \geq 1$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ divergent, da $\left|x^k\right| = |x|^k \geq 1$ und somit $\left\{x^k\right\}$ keine Nullfolge ist.

20.12.2024 Vorlesung 20

5.3 Majorantenkriterium und absolute Konvergenz

Satz 5.5 (Majorantenkriterium, Vergleichskriterium) *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexwertige Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine reellwertige, nicht-negative konvergente Reihe. Gilt*

$$|a_k| \leq b_k \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{5.9}$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch konvergent und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{5.10}$$

Unter der Bedingung (5.9) heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine *Majorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Man sagt auch, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *majorisiert* wird. Da $b_k \geq 0$, so existiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ immer als Element von $\overline{\mathbb{R}}$ (Satz 5.1), und die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist äquivalent zu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$.

Beweis. Im Beweis benutzen wir die folgende Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung (Satz 3.4): für beliebige endliche Folge $\{c_k\}_{k=1}^n$ von komplexen Zahlen gilt

$$\left|\sum_{k=1}^n c_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|, \tag{5.11}$$

was man per Induktion nach n beweist.

Betrachten wir die Partialsummen

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{und} \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Für alle natürlichen Zahlen $n > m$ gilt

$$|A_n - A_m| = \left|\sum_{k=m+1}^n a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = B_n - B_m. \tag{5.12}$$

Für $m > n$ gilt analog

$$|A_n - A_m| \leq B_m - B_n,$$

so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|A_n - A_m| \leq |B_n - B_m|.$$

Die Folge $\{B_n\}$ konvergiert und somit ist eine Cauchy-Folge, d.h. $|B_n - B_m| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Daraus folgt, dass auch $|A_n - A_m| \to 0$. Somit ist $\{A_n\}$ eine Cauchy-Folge, die nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert (Sätze 4.5 und 4.11(c)). Folglich ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent.

Jetzt beweisen wir (5.10). Setzen wir

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{k=1}^\infty a_k \quad \text{und} \quad B = \lim_{n\to\infty} B_n = \sum_{k=1}^\infty b_k$$

und beweisen, dass $|A| \leq B$. Bemerken wir, dass

$$|A| = \lim_{n\to\infty} |A_n|,$$

da

$$||A_n| - |A|| \leq |A_n - A| \to 0 \ \text{ für } \ n \to \infty.$$

Es gilt nach (5.11)

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^n a_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n b_k = B_n.$$

woraus folgt

$$|A| = \lim |A_n| \leq \lim B_n = B$$

was zu beweisen war. ■

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ heißt *absolut konvergent* wenn

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty.$$

Korollar 5.6 *Ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent, so ist sie konvergent. Es gilt auch*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,. \tag{5.13}$$

Beweis. Die nicht-negative Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert nach Voraussetzung, und sie ist eine Majorante von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nach dem Satz 5.5 mit $b_k = |a_k|$ beschließen wir, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und die Ungleichung (5.13) gilt. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}$$

wobei $\{c_k\}$ eine beliebige beschränkte Folge von komplexen Zahlen (zum Beispiel, $c_k = i^k$ oder $c_k = (-1)^k$). Wir behaupten, dass diese Reihe absolut konvergiert. Sei C eine obere Schranke der Folge $\{|c_k|\}$. Da

$$\left|\frac{c_k}{k^2}\right| \leq \frac{C}{k^2}$$

und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k^2} = C \sum \frac{1}{k^2}$ konvergent ist, so erhalten wir nach dem Satz 5.5 dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}$ absolut konvergent (und somit auch konvergent) ist.

Beispiel. Es gibt die Reihen, die konvergent aber nicht absolut konvergent sind, zum Beispiel, die *Leibniz-Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Wir beweisen unterhalb, dass diese Reihe konvergiert. Allerdings ist diese Reihe nicht absolut konvergent da die Reihe von den Beträgen die harmonische Reihe ist, die divergiert.

5.4 Quotientenkriterium

Satz 5.7 (Quotientenkriterium, d'Alembert-Kriterium) *Sei* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine komplexwertige Folge mit* $a_n \neq 0$ *für alle* n. *Gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent. Gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Nehmen wir an, dass die Folge $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ konvergiert und $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$. Dann erhalten wir folgendes: gilt $r < 1$ so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent; ist $r > 1$ so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Im Fall $r = 1$ kann man keinen Beschluss über Konvergenz oder Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ fassen (siehe ein Beispiel unterhalb).

Beweis. Bezeichnen wir

$$r_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{und} \quad r = \limsup_{n\to\infty} r_n.$$

Nach Definition von lim sup gilt

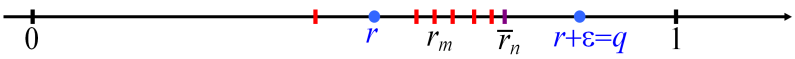
$$\limsup_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \overline{r}_n \ ,$$

wobei

$$\overline{r}_n = \sup\left\{r_m : m \geq n\right\}. \tag{5.14}$$

Da $\lim \overline{r}_n = r$, so gilt folgendes: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\overline{r}_n < r + \varepsilon =: q \quad \text{für alle } n \geq N.$$



Da $r < 1$, so wählen wir ein $0 < \varepsilon < 1 - r$ so dass $q < 1$. Es folgt aus (5.14), dass $r_n \leq \overline{r}_n$ und somit

$$r_n < q \ \text{ für alle } n \geq N$$

und somit

$$|a_{n+1}| \leq q\,|a_n| \ \text{ für alle } n \geq N.$$

Zum Beispiel, wir haben

$$a_{N+1} \leq qa_N, \quad a_{N+2} \leq qa_{N+1} \leq q^2 a_N, \quad a_{N+3} \leq qa_{N+2} \leq q^3 a_N, \ \ldots$$

Beweisen wir per Induktion nach k, dass

$$|a_{N+k}| \leq q^k\,|a_N| \quad \text{für alle } k \geq 0. \tag{5.15}$$

Induktionsanfang für $k = 0$ ist trivial. Induktionsschritt von k nach $k+1$:

$$|a_{N+k+1}| \leq q\,|a_{N+k}| \leq qq^k\,|a_N| = q^{k+1}\,|a_N|\,.$$

Da $0 < q < 1$, so erhalten wir nach dem Satz 5.2 aus (5.15)

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k\,|a_N| = |a_N|\,\frac{1}{1-q} < \infty.$$

Folglich ist die Restreihe $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ konvergent. Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ auch konvergent (Satz 5.4(a)), und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

Setzen wir

$$s = \liminf_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \inf \{r_m : m \geq n\} .$$

Dann gilt folgendes: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\inf \{r_m : m \geq n\} > s - \varepsilon \ \text{ für alle } n \geq N,$$

so dass auch

$$r_n > s - \varepsilon \ \text{ für alle } n \geq N.$$

Ist $s > 1$ so wählen wir $\varepsilon = s - 1$ so dass $r_n > 1$ alle $n \geq N$. Es folgt, dass für alle $n \geq N$

$$|a_{n+1}| \geq |a_n| ,$$

so dass $a_n \not\to 0$. Nach dem Trivialkriterium (Satz 5.4(b)) ist die Reihe $\sum a_n$ divergent. ∎

Beispiel. Betrachten wir wieder die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \tag{5.16}$$

wobei $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $a_n = \frac{x^n}{n^2}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)^2 \, x^n} \right| = |x| .$$

Folglich ist die Reihe (5.16) absolut konvergent für $|x| < 1$, und divergent für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ ist die Reihe (5.16) auch absolut konvergent da $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ und die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Betrachten wir auch eine ähnliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

In diesem Fall gilt es auch

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| ,$$

und das Quotientenkriterium ergibt: im Fall $|x| < 1$ ist die Reihe absolut konvergent, und im Fall $|x| > 1$ ist sie divergent. Allerdings ist der Fall $|x| = 1$ unterschiedlich. Für $x = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

die bestimmt divergent ist. Im Fall $x = -1$ erhalten wir die Leibniz-Reihe, die konvergent ist aber nicht absolut (siehe Section 5.9).

5.5 Exponentialreihe und die Zahl e

Definition. Sei $x \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

heißt die *Exponentialreihe.*

Behauptung. *Die Exponentialreihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Für $x = 0$ ist die Konvergenz offensichtlich. Sei $x \neq 0$. Setzen wir $a_n = \frac{x^n}{n!}$ und erhalten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

und die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium des Satzes 5.7. ■

Definition. Die Summe der Exponentialreihe heißt die *Exponentialfunktion* von $x \in \mathbb{C}$ und wird wie folgt bezeichnet:

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}. \tag{5.17}$$

Ist x reell, dann ist $\exp(x)$ auch reell, was man aus (5.17) sieht. Zum Beispiel, $\exp(0) = 1$.

Die Zahl $\exp(1)$ wird auch als e bezeichnet. Die Zahl e heißt die *Eulersche Zahl.* Es folgt aus (5.17), dass

$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}.$$

Man erhält Annäherungen von e indem man die Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$$

für großen Werten von N berechnet. Zum Beispiel, es gilt

$$S_{20} = \sum_{n=0}^{20} \frac{1}{n!} = 2,71828182845904523533\ldots$$

In der Tat gilt

$$e = 2,718\,281828\,4590452354\ldots$$

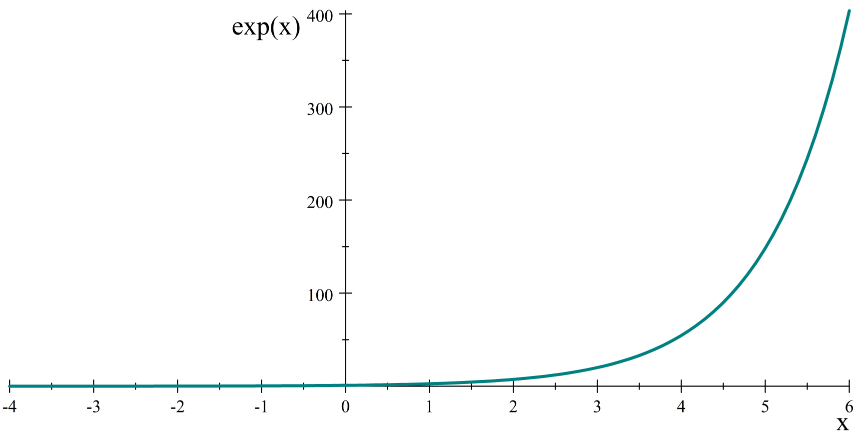
Numerische Berechnung mit Hilfe von (5.17) ergibt folgendes:

$$\begin{aligned}
\exp(2) &= 7,389056098930\,65... \\
\exp(3) &= 20,085536\,9231877... \\
\exp(4) &= 54,598150033144\,2... \\
\exp(5) &= 148,\ 413159102577... \\
\exp(6) &= 403,428793492735...
\end{aligned}$$

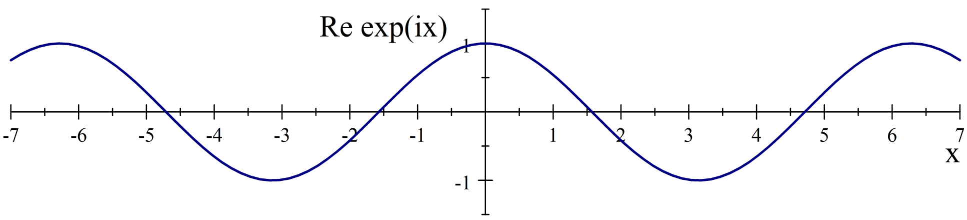
usw. Es folgt aus (5.17), dass die Funktion $\exp(x)$ für $x > 0$ positiv und monoton steigend ist. Später beweisen wir, dass diese Eigenschaften auch für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Zum Beispiel, es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(-1) &= 0,3678794411714\,42... \\
\exp(-2) &= 0,135335283236\,613... \\
\exp(-3) &= 0,004978706836786...
\end{aligned}$$

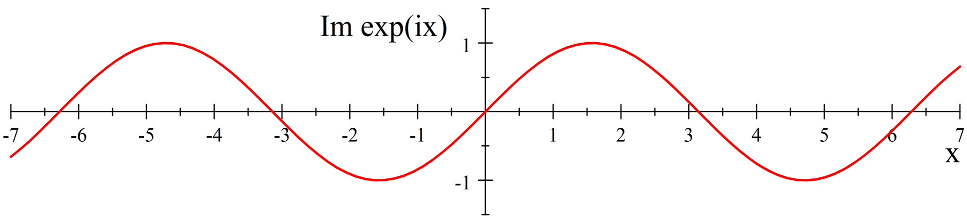
usw. Der Graph der Funktion $f(x) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ sieht wie folgt aus:



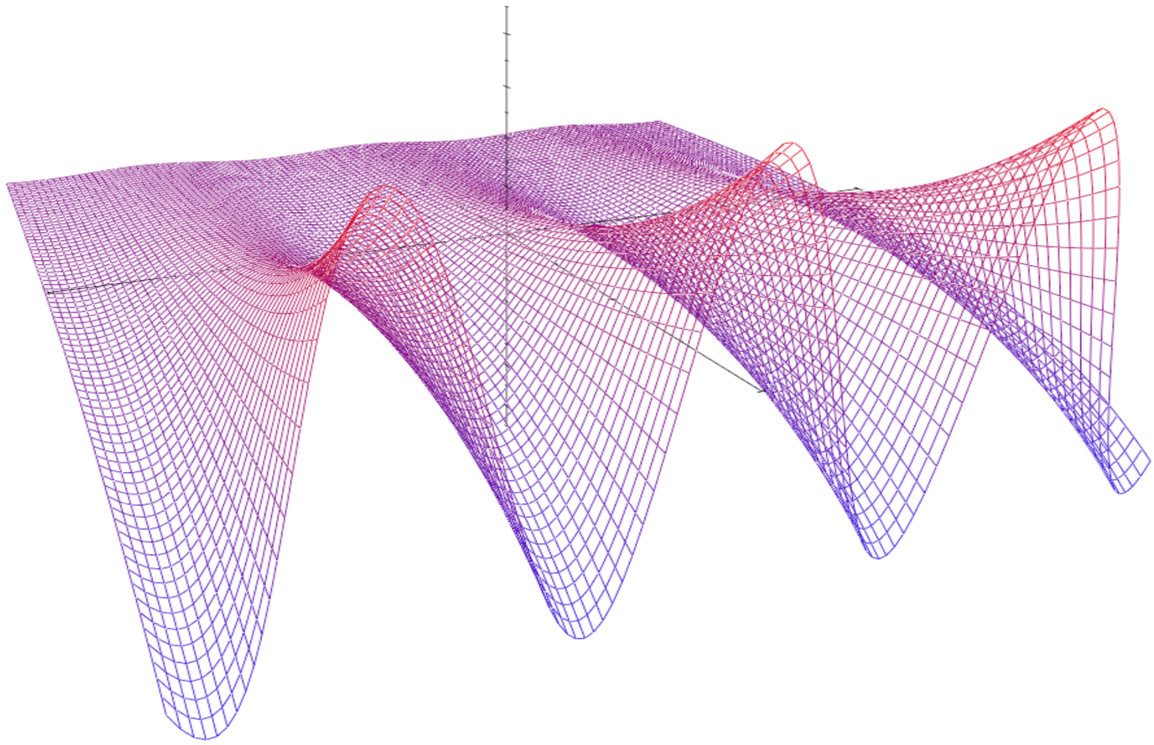
Betrachten wir jetzt die Funktion $f(x) = \exp(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$, so dass das Argument der Exponentialfunktion imaginär ist. Der Graph des Realteiles $\operatorname{Re}\exp(ix)$ ist wie folgt:



Der Graph des Imaginärteiles $\operatorname{Im}\exp(ix)$ ist wie folgt:



Der Graph der Funktion $\operatorname{Re}\exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ ist wie folgt:



08.01.2025 **Vorlesung 21**

5.6 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Die Haupteigenschaft der Exponentialfunktion ist wie folgt.

Hauptsatz 5.8 *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt die Identität*

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}. \tag{5.18}$$

Beweis. Bezeichnen wir mit A_n, B_n und C_n die Partialsummen der Reihen für $\exp(x)$, $\exp(y)$ und $\exp(x+y)$, d.h.

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad B_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{y^l}{l!}, \qquad C_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(x+y)^m}{m!}.$$

Da $A_n \to \exp(x)$, $B_n \to \exp(y)$ und $C_n \to \exp(x+y)$ für $n \to \infty$, so reicht es zu beweisen, dass

$$A_n B_n - C_n \to 0 \;\text{ für } n \to \infty,$$

woraus (5.18) folgen wird. Wir haben

$$A_n B_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{n} \frac{y^l}{l!} \right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \frac{x^k y^l}{k!l!} = \sum_{k,l \in \{0,\dots,n\}} \frac{x^k y^l}{k!l!}. \tag{5.19}$$

Die letzte Summe in (5.19) lässt sich wie folgt in zwei Teilen aufteilen:

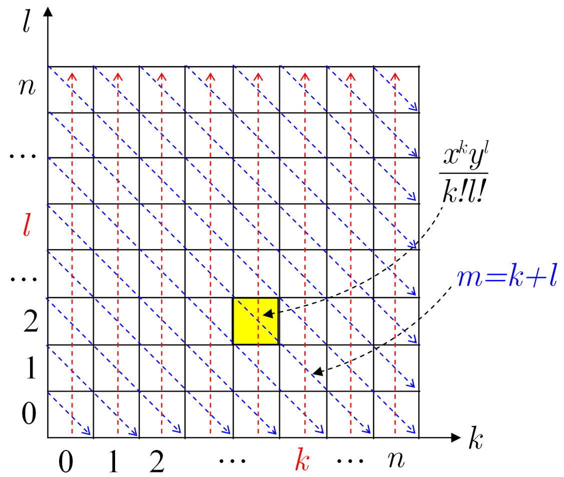
$$A_n B_n = \sum_{\substack{k,l \in \{0,\dots,n\} \\ k+l \le n}} \frac{x^k y^l}{k!l!} + \sum_{\substack{k,l \in \{0,\dots,n\} \\ k+l > n}} \frac{x^k y^l}{k!l!}, \tag{5.20}$$

d.h. die erste Summe in (5.20) enthält alle Summanden $\frac{x^k y^l}{k!l!}$ mit $k + l \le n$, und die zweite Summe – mit $k + l > n$.

In der ersten Summe in (5.20) wählen wir die Reihenfolge von summieren wie folgt:

(*i*) fixieren wir zunächst ein $m \in \{0, \dots, n\}$ und summieren alle Glieder in der ersten Summe in (5.20) mit $k + l = m$, wobei der Index k sich von $k = 0$ bis $k = m$ ändert, und $l = m - k$ (hier muss k kleiner gleich m sein um $l \ge 0$ zu sichern);

(*ii*) danach summieren wir die Summen aus (*i*) von $m = 0$ bis $m = n$.



Zwei Methoden von summieren in (5.19): entlang der Spalten (mit fixiertem k) und entlang der Diagonalen (mit fixiertem $m = k + l$).

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k,l\in\{0,...,n\}\\ k+l\leq n}} \frac{x^k y^l}{k!l!} &= \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k y^{m-k}}{k!(m-k)!} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} x^k y^{m-k} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(x+y)^m}{m!} = C_n,
\end{aligned}$$

wobei wir den binomischen Lehrsatz verwendet haben. Die erste Summe in (5.20) ist somit gleich C_n, woraus folgt dass

$$A_n B_n - C_n = \sum_{\substack{k,l\in\{0,...,n\}\\ k+l>n}} \frac{x^k y^l}{k!l!}. \tag{5.21}$$

Jetzt beweisen wir, dass die Summe in (5.21) gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$. Da $k, l \leq n$ so haben wir

$$\left|x^k y^l\right| \leq (1+|x|)^k (1+|y|)^l \leq (1+|x|)^n (1+|y|)^n \leq M^n,$$

wobei $M = (1+|x|)(1+|y|)$.

Es folgt aus $k+l>n$ dass $k+l \geq n+1$ und somit

$$k \geq \frac{n+1}{2} \quad \text{oder} \quad l \geq \frac{n+1}{2}.$$

Setzen wir $p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ so dass

$$p \leq \frac{n+1}{2} < p+1,$$

und erhalten dass $k \geq p$ oder $l \geq p$. Daraus folgt dass

$$k!l! \geq p!$$

und somit

$$\left|\frac{x^k y^l}{k!l!}\right| \leq \frac{M^n}{p!} \leq \frac{M^{2p}}{p!},$$

wobei wir benutzt haben dass $n+1 < 2p+2$ und somit $n \leq 2p$.

Die Anzahl von den Gliedern in der Summe (5.21) ist auf jeden Fall von $(n+1)^2 \leq (2p+1)^2$ beschränkt, da die Anzahl von Paaren (k,l) mit $k,l \in \{0,...,n\}$ gleich $(n+1)^2$ ist. Somit erhalten wir

$$|A_n B_n - C_n| \leq (2p+1)^2 \frac{M^{2p}}{p!}.$$

Bemerken wir, dass

$$(2p+1)^2 \frac{M^{2p}}{p!} \to 0 \quad \text{für } p \to \infty,$$

da die Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p+1)^2 M^{2p}}{p!}$ nach dem Quotientenkriterium des Satzes 5.7 konvergiert: für $p \to \infty$ gilt

$$\frac{(2(p+1)+1)^2 \frac{M^{2(p+1)}}{(p+1)!}}{(2p+1)^2 \frac{M^{2p}}{p!}} = \left(\frac{2p+3}{2p+1}\right)^2 \frac{M^2}{p+1} \to 0 < 1.$$

Wir beschließen, dass auch $|A_n B_n - C_n| \to 0$ für $n \to \infty$ was zu beweisen war. ■

Die weiteren Eigenschaften der Exponentialfunktion, die aus (5.18) folgen, werden im folgenden Satz dargestellt.

Satz 5.9 *(a) Für jedes $x \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(x) \neq 0$.*
(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x)$ reell und positiv.
(c) Für reelle $x > y$ gilt $\exp(x) > \exp(y)$ (d.h. die Funktion $\exp(x)$ ist streng monoton steigend)
(d) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(k) = e^k$ wobei $e = \exp(1)$.
(e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(ix)| = 1$.

Beweis. (a) Die Identität (5.18) ergibt für $y = -x$,

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1, \tag{5.22}$$

woraus $\exp(x) \neq 0$ folgt.
(b) Ist $x \in \mathbb{R}$ dann gilt $\exp(x) \in \mathbb{R}$ nach Definition

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots . \tag{5.23}$$

Ist $x \geq 0$ so folgt es aus (5.23)

$$\exp(x) \geq 1 > 0,$$

da alle Glieder in (5.23) nicht negative sind und das Glied mit $k = 0$ gleich 1 ist. Ist $x < 0$ dann $-x > 0$ und $\exp(-x) > 0$ was zusammen mit (5.22) ergibt

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

(c) Wir haben

$$\exp(x) = \exp(x - y + y) = \exp(x - y)\exp(y) > \exp(y)$$

da für $t = x - y > 0$ erhalten wir aus (5.23) $\exp(t) > 1$.
(d) Zunächst beweisen wir die Identität

$$\exp(k) = e^k \tag{5.24}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ per Induktion nach k. Für $k = 1$ gilt (5.24) nach Definition von e. Induktionsschritt: gilt (5.24) für ein $k \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir nach (5.18)

$$\exp(k+1) = \exp(k)\exp(1) = e^k e = e^{k+1}.$$

Für $k = 0$ haben wir $\exp(0) = 1 = e^0$. Für negative $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir $n = -k \in \mathbb{N}$ und erhalten nach (5.22)

$$\exp(k) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n} = e^k.$$

(e) Wir benutzen die Identität

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}),$$

was direkt aus der Exponentialreihe folgt (siehe Aufgabe 88). Somit erhalten wir

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\,\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1,$$

was zu beweisen war. ■

Die Identität (5.24) motiviert die folgende Definition der Potenz e^x.

Definition. Für alle $x \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$\boxed{e^x := \exp(x)}.$$

Insbesondere erhalten wir $e^{x+y} = e^x e^y$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$. Zum Beispiel, es gilt $e^{1/2} = \sqrt{e}$ da $e^{1/2}e^{1/2} = e^{1/2+1/2} = e$ und somit erfüllt $e^{1/2}$ die Definition von $\sqrt{e}$. Analog erfüllt $e^{1/n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\left(e^{1/n}\right)^n = e$, so dass man $e^{1/n}$ als Definition von $\sqrt[n]{e}$ annehmen kann.

Später definieren wir die Potenz a^x für alle reelle $a > 0$ and $x \in \mathbb{C}$.

Bemerkung. Man kann beweisen dass

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Insbesondere gilt

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

5.7 Hyperbelfunktionen

Definition. Die Hyperbelfunktionen *Kosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* werden für alle $x \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

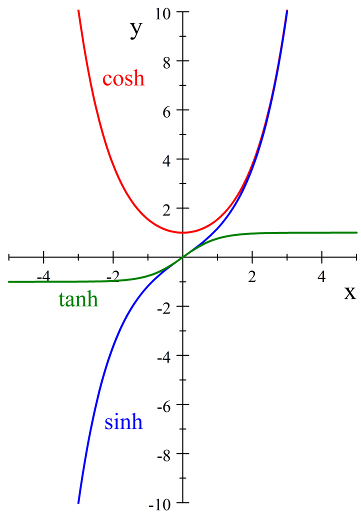
$$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}.$$

Die Funktion $\cosh x$ ist offensichtlich gerade, d.h. $\cosh(-x) = \cosh x$, und $\sinh x$ ist ungerade, d.h. $\sinh(-x) = -\sinh x$. Für $x \in \mathbb{R}$ sind $\cosh x$ und $\sinh x$ offensichtlich reell.

Man definiert auch *Tangens hyperbolicus* und *Kotangens hyperbolicus* wie folgt:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{und} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}.$$

Die Graphen von $\cosh x$, $\sinh x$ und $\tanh x$ für $x \in \mathbb{R}$ sehen wie folgt aus:



Satz 5.10 *Die Hyperbelfunktionen erfüllen die folgenden Identitäten für alle $x, y \in \mathbb{C}$.*

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

(b) *Additionstheoreme:*

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

(c) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ *und* $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Insbesondere sind $\cosh x$ und $\sinh x$ reell wenn $x \in \mathbb{R}$.
Beweis in Aufgabe 89.

10.01.2025 **Vorlesung 22**

5.8 Trigonometrische Funktionen

Definition. Die trigonometrische Funktionen *Kosinus* und *Sinus* werden für alle $x \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}, \tag{5.25}$$

wobei i die imaginäre Einheit ist.

Bemerken wir, dass sogar für reelle x benutzt die Definition (5.25) von $\sin x$ und $\cos x$ die Werte von $\exp(z)$ im komplexen Bereich.

Auch definieren wir Tangens und Kotangens mit

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

in den Bereichen, wo die Quotienten wohldefiniert sind.

Zum Beispiel, für $x = 0$ erhalten wir aus (5.25), dass

$$\cos 0 = 1 \quad \text{und} \quad \sin 0 = 0.$$

Es folgt aus (5.25), dass für alle $x \in \mathbb{C}$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin x,$$

d.h. $\cos x$ eine *gerade Funktion* ist und $\sin x$ eine *ungerade Funktion* ist.

Mit Hilfe von (5.25) erhalten wir

$$\cos x + i \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = e^{ix}$$

so dass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}. \tag{5.26}$$

Diese Identität heißt die *Eulerformel.*

Satz 5.11 *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Identitäten.*

(a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

(b) *Additionstheoreme:*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{5.27}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{5.28}$$

(c) *Kosinusreihe und Sinusreihe:*

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots} \tag{5.29}$$

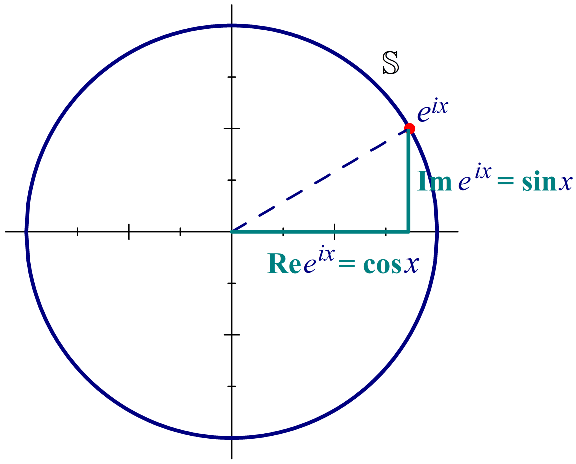
$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots} \tag{5.30}$$

Insbesondere sind $\cos x$ und $\sin x$ reell sind für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Eulerformel (5.26) ergibt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} \quad \text{und} \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}.} \tag{5.31}$$

Da $|e^{ix}| = 1$ und somit $e^{ix} \in \mathbb{S}$, so stimmt (5.31) mit der geometrischen Definition von cos und sin als die X- und Y-Koordinaten der Punkte am Einheitskreis überein.



Der Punkt e^{ix} auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}$ lässt sich als ein Winkel betrachten, wobei die reelle Zahl x das *Bogenmaß* dieses Winkels ist. Z.B. für $x=0$ haben wir $e^{ix}=1$ und $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

Beweis. (a) Wir haben für alle $x, y \in \mathbb{C}$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = e^{ix} e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1.$$

(b) Wir haben für alle $x, y \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\cos x \cos y - \sin x \sin y &= \frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{iy}+e^{-iy}\right) - \frac{1}{4i^2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{iy}-e^{-iy}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)}+e^{i(-x+y)}+e^{i(x-y)}+e^{-i(x+y)}\right)\\ &+ \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)}-e^{i(-x+y)}-e^{i(x-y)}+e^{-i(x+y)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}\right) = \cos(x+y),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{1}{4i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{iy}+e^{-iy}\right) + \frac{1}{4i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{iy}-e^{-iy}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{i(x+y)}-e^{i(-x+y)}+e^{i(x-y)}-e^{-i(x+y)}\right)\\ &+ \frac{1}{4i}\left(e^{i(x+y)}+e^{i(-x+y)}-e^{i(x-y)}-e^{-i(x+y)}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+y)}-e^{-i(x+y)}\right) = \sin(x+y).\end{aligned}$$

(c) Wir haben

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \qquad \text{und} \qquad e^{-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ix)^n}{n!},$$

woraus folgt

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{(ix)^n}{n!}.$$

Da

$$1+(-1)^n=\begin{cases} 2, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases}$$

so erhalten wir mit Hilfe von $i^2=-1$, dass

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Analog erhalten wir

$$\sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n)\frac{(ix)^n}{n!}.$$

Da

$$1-(-1)^n=\begin{cases} 0, & n=2k \\ 2, & n=2k+1 \end{cases}$$

so gilt

$$\sin x=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Es ist offensichtlich aus (5.29) und (5.30) dass $\cos x$ und $\sin x$ reell für $x\in\mathbb{R}$ sind.

(b) noch einmal. Hier geben wir den zweiten Beweis von (b) im Fall von reellen x,y. Wir haben

$$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$$

und somit

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)}&=e^{ix}e^{iy}=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\ &=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\cos x\sin y+\sin x\cos y). \end{aligned}$$

Da x,y reell sind, es folgt aus (5.31) dass

$$\cos(x+y)=\operatorname{Re}e^{i(x+y)}=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

und

$$\sin(x+y)=\operatorname{Im}e^{i(x+y)}=\cos x\sin y+\sin x\cos y.$$

■

Die Identitäten (5.29) und (5.30) lassen sich für numerische Berechnung von $\cos x$ bzw $\sin x$ anwenden. Zum Beispiel,

$$\cos 1\approx 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{10!}=0,54030230...$$

und

$$\sin\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}-\frac{(1/2)^3}{3!}+\frac{(1/2)^5}{5!}-\frac{(1/2)^7}{7!}+\frac{(1/2)^9}{9!}=0,4794255386...$$

5.9 Bedingte Konvergenz

Definition. Eine Reihe heißt *bedingt konvergent* when die konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Zum Beispiel, wir zeigen unterhalb, dass die Leibniz-Reihe bedingt konvergent ist. Für den Beweis brauchen wir den folgenden Satz.

Satz 5.12 (Leibniz-Kriterium) *Sei $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge von nicht-negativen reellen Zahlen mit $c_k \to 0$. Dann ist die alternierende Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - ... \tag{5.32}$$

konvergent. Darüber hinaus erfüllen die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k$ die Ungleichungen

$$S_{2m-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k \leq S_{2m} \tag{5.33}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Bemerken wir, dass im Fall $c_k \not\to 0$ die Reihe (5.32) nach dem Trivialkriterium divergent ist.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} S_{n+2} - S_n &= S_{n+2} - S_{n+1} + S_{n+1} - S_n \\ &= (-1)^{n+2} c_{n+2} + (-1)^{n+1} c_{n+1}. \end{aligned}$$

Im Fall von geraden n, d.h. für $n = 2m$, erhalten wir

$$S_{n+2} - S_n = c_{n+2} - c_{n+1} \leq 0,$$

d.h. $S_{2m+2} \leq S_{2m}$. Somit ist die Folge $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ monoton fallend.

Im Fall von ungeraden n, d.h. für $n = 2m - 1$, erhalten wir

$$S_{n+2} - S_n = -c_{n+2} + c_{n+1} \geq 0,$$

d.h. $S_{2m+1} \geq S_{2m-1}$. Somit ist die Folge $\{S_{2m-1}\}_{m=1}^{\infty}$ monoton steigend. Nach dem Satz 4.4 (Monotoniekriterium) gibt es den Grenzwert

$$a := \lim_{m\to\infty} S_{2m-1} \in \overline{\mathbb{R}}$$

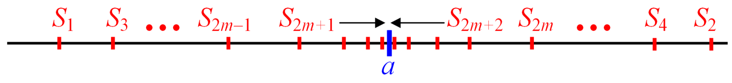
und $a \geq S_{2m-1}$. Da

$$S_{2m} = S_{2m-1} + (-1)^{2m} c_{2m} = S_{2m-1} + c_{2m} \tag{5.34}$$

so folgt es, dass

$$\lim S_{2m} = \lim S_{2m-1} + \lim c_{2m} = a.$$

Folglich gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = a$, d.h. die Summe der Reihe (5.32) ist gleich a.



Da $\{S_{2m}\}$ monoton fallend ist so gilt $a \leq S_{2m}$, und wir erhalten, dass

$$S_{2m-1} \leq a \leq S_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{5.35}$$

Es folgt aus (5.35) dass a reell ist (nicht $\pm\infty$). Somit ist die Reihe (5.32) konvergent, und (5.33) gilt nach (5.35). ■

Beispiel. Die Leibniz-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium, da die Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ monoton fallend ist und $\frac{1}{n} \to 0$. Andererseits ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, so dass die Konvergenz der Leibniz-Reihe bedingt ist.

5.10 * Äquivalente Definition der Exponentialfunktion

Satz 5.13 *Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\boxed{\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}. \tag{5.36}$$

Insbesondere erhalten wir die folgende äquivalente Definition der Zahl e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(siehe auch die Aufgabe 69).

Beweis. Setzen wir

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

und

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Da $z_n \to \exp(x)$, so reicht es zu beweisen, dass

$$z_n - y_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Nach dem binomischen Lehrsatz (Satz 2.11) gilt

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} \frac{x^k}{k!}, \tag{5.37}$$

woraus folgt, dass

$$z_n - y_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{x^k}{k!}.$$

Bemerken wir, dass

$$\frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{n^k (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k))} = \frac{\overbrace{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}^{k \text{ mal}}}{\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ mal}}} = \prod_{l=1}^{k} \frac{n-l+1}{n}. \tag{5.38}$$

Da $\frac{n-l+1}{n} \leq 1$, so folgt es , dass

$$\frac{n!}{n^k (n-k)!} \leq 1. \tag{5.39}$$

Für alle $n > N \geq 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |z_n - y_n| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left|1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right| \frac{|x|^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Die Summe $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ in (5.40) ist die Restreihe der Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ und somit konvergiert gegen 0 für $N \to \infty$. Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} < \varepsilon. \tag{5.41}$$

Jetzt bestimmen wir den Grenzwert der ersten Summe in (5.40) für $n \to \infty$ während N fixiert ist. Es folgt aus (5.38) dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^k (n-k)!} = \prod_{l=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{n-l+1}{n} = 1$$

da für jedes l gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-l+1}{n} = 1.$$

Wir beschließen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} = 0.$$

Somit gilt für fast alle n

$$\sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}\right) \frac{|x|^k}{k!} < \varepsilon. \tag{5.42}$$

Aus (5.42), (5.41) und (5.40) erhalten wir, dass $|z_n - y_n| < 2\varepsilon$ für fast alle n, woraus folgt $|z_n - y_n| \to 0$. ■

Mit Hilfe von der Identität (5.36) können wir einen anderen Beweis des Haupteigenschaftes (5.18).

Zweiter Beweis von dem Satz 5.8. Wir benutzen die offensichtliche Folgerung aus (5.37) und (5.39): für $|x| < 1$ gilt

$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{n^k (n-k)!} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}. \tag{5.43}$$

Bemerken wir auch, dass für alle $a, b \in \mathbb{C}$

$$(1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab = (1+a+b)\left(1 + \frac{ab}{1+a+b}\right). \tag{5.44}$$

Setzen wir in (5.44) $a = \frac{x}{n}$, $b = \frac{y}{n}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right) &= \left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}\right)\left(1+\frac{\frac{x}{n}\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}}\right) \\
&= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\frac{xy}{n+x+y}\right).
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$z_n = \frac{xy}{n+x+y}.$$

Mit Hilfe von der Identität (5.36) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \\
&= \exp(x+y)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu beweisen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = 1. \tag{5.45}$$

Dafür benutzen wir, dass

$$|z_n| = \left|\frac{xy}{n+x+y}\right| \to 0 \ \text{ für } n \to \infty,$$

insbesondere gilt $|z_n| < 1$ für fast alle n. Nach (5.43) erhalten wir

$$\left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n - 1\right| \leq \frac{|z_n|}{1-|z_n|} \to 0 \ \text{ für } n \to \infty,$$

woraus (5.45) folgt. ■

5.11 * Kommutativ- und Assoziativgesetze für die Reihen

Für die absolut konvergenten Reihen gelten die Kommutativ- und Assoziativgesetze, die wir ohne Beweis angeben.

Satz 5.14 *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine Reihe, die aus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch Vertauschung und Gruppierung der Glieder erhalten wird. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ auch absolut konvergent und*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Für die bedingt konvergenten Reihen gilt im Gegenteil folgendes.

Satz 5.15 *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine bedingt konvergente Reihe von reellen Zahlen. Dann für jedes $c \in \overline{\mathbb{R}}$ es gibt eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, die aus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch Vertauschung der Glieder erhalten wird und so dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = c$.*

Zum Beispiel, man kann die Glieder in der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ so vertauschen, dass die vertauschte Reihe gegen $+\infty$ divergiert.

5.12 * Cauchy-Produkt zweier Reihen

Erinnern wir uns daran, dass für das Produkt zweier endlichen Summen die folgende Identität gilt:

$$\left(\sum_{k\in I} a_k\right)\left(\sum_{l\in J} b_l\right) = \sum_{(k,l)\in I\times J} a_k b_l \tag{5.46}$$

wobei I, J die endlichen Indexmengen sind und a_k, b_l reelle oder komplexe Zahlen sind. Wir möchten eine ähnliche Identität für Produkt zweier Reihen erhalten.

Versucht man die Formel (5.46) für unendlichen Indexmengen I und J zu benutzen, so sieht man auf der rechten Seite eine Doppelreihe, was nicht bequem ist. Der Zweck der nächsten Definition ist die Doppelreihe aus (5.46) als eine übliche Reihe darzustellen.

Definition. Gegeben seien zwei komplexwertigen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Das *Cauchy-Produkt* dieser Folgen ist die Folge $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{5.47}$$

Um die Bedeutung von c_n zu verstehen, betrachten wir die folgende unendliche Tabelle mit allen Summanden $a_k b_l$ für $k, l \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{a_0b_n} & \dots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & \dots & \dots & \boxed{a_1b_{n-1}} & \dots & \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{a_kb_{n-k}} & \dots & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\
\dots & \boxed{a_{n-1}b_1} & \dots & & & & & \dots & \dots \\
\boxed{a_nb_0} & \dots & & & & & \dots & a_nb_n & \dots \\
\dots & & & & & & \dots & \dots & \dots
\end{array} \tag{5.48}$$

Die Summanden der Form $a_k b_{n-k}$ mit einem vorgegebenen Wert von n liegen auf der n-ten Diagonale der Tabelle (die Einträge in den Rahmen). Deshalb ist c_n gleich die Summe aller Summanden auf der n-ten Diagonale. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ "enthält" somit alle Summanden $a_k b_l$ aus der Tabelle, und man kann hoffen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k,l \in \mathbb{Z}_+} a_k b_l = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} b_l. \tag{5.49}$$

Aber diese Identitäten gelten nicht immer. Zum Beispiel, die Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ mit $a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ sind konvergent, aber ihr Cauchy-Produkt ist divergent. Im nächsten Satz werden die Bedingungen vorgelegt, die die Identität (5.49) garantieren.

Satz 5.16 (Satz von Mertens) *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen von komplexen Zahlen. Dann ist ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ auch absolut konvergent und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right). \tag{5.50}$$

Bemerkung. Man kann die folgende Erweiterung des Satzes 5.16 beweisen: wenn die Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent sind und mindestens eine davon absolut konvergent ist, dann ist das Cauchy-Produkt $\sum c_n$ konvergent und erfüllt (5.50). Allerdings ist die Konvergenz von $\sum c_n$ in diesem Fall nicht unbedingt absolut.

Beweis. Setzen wir

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{l=0}^{n} b_l, \quad C_n = \sum_{m=0}^{n} c_m.$$

Da

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \lim A_n \lim B_n = \lim (A_n B_n),$$

müssen wir insbesondere zeigen, dass die Folge $\{C_n\}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} (A_n B_n). \tag{5.51}$$

Bemerken wir, dass

$$C_n = \sum_{m=0}^{n} c_m = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{\{k,l \in \mathbb{Z}_+ : k+l \le n\}} a_k b_l,$$

d.h. C_n ist die Summe von allen Gliedern $a_k b_l$ aus dem Dreieck

$$\{k, l \in \mathbb{Z}_+ : k + l \le n\}.$$

Für $A_n B_n$ erhalten wir

$$A_n B_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l = \sum_{\{k,l \in \mathbb{Z}_+ : k \le n, l \le n\}} a_k b_l,$$

d.h. $A_n B_n$ ist die Summe von allen Gliedern $a_k b_l$ aus dem Quadrat

$$\{k, l \in \mathbb{Z}_+ : k \le n, l \le n\}.$$

Betrachten wir zunächst der Fall, wenn alle a_k und b_l nicht-negative reelle Zahlen sind. Für Indizen $k, l \in \mathbb{Z}_+$ haben wir die Implikation

$$k + l \le n \ \Rightarrow \ k \le n, l \le n$$

und für $m = [n/2]$,

$$k \le m, l \le m \ \Rightarrow \ k + l \le n.$$

Auf der Tabelle (5.48) bedeutet es, dass das Dreieck $\{k + l \le n\}$ zwischen zwei Rechtecken $\{k, l \le m\}$ und $\{k, l \le n\}$ liegt. Daraus folgt, dass

$$A_m B_m \le C_n \le A_n B_n.$$

Da die beiden Folgen $\{A_n B_n\}$ und $\left\{A_{[n/2]} B_{[n/2]}\right\}$ den gleichen Grenzwert haben, erhalten wir nach Satz 4.1(b), dass C_n den gleichen Grenzwert hat, d.h. (5.51). Folglich ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent. Da $c_n \ge 0$, ist diese Reihe auch absolut konvergent.

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall von komplexwertigen a_n und b_n. Nach Voraussetzung sind die Reihen $\sum |a_k|$ und $\sum |b_l|$ konvergent. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^*$ das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum |a_k|$ und $\sum |b_l|$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist die Reihe $\sum c_n^*$ konvergent. Darüber hinaus haben wir

$$|c_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, |b_{n-k}| = c_n^*.$$

Nach Majorantenkriterium von Satz 5.5 erhalten wir die absolute Konvergenz von $\sum c_n$.

Es bleibt noch die Identität (5.51) zu beweisen, d.h. $A_n B_n - C_n \to 0$. Wir haben

$$A_n B_n - C_n = \sum_{\{k,l : k \le n, l \le n\}} a_k b_l - \sum_{\{k,l : k+l \le n\}} a_k b_l = \sum_{\{k,l : k \le n. l \le n. k+l > n\}} a_k b_l.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|A_n B_n - C_n| \le \sum_{\{k,l : k \le n. l \le n. k+l > n\}} |a_k| \, |b_l|.$$

Bezeichnen wir mit A_n^*, B_n^*, C_n^* die Partialsummen der entsprechenden Reihen $\sum |a_k|$, $\sum |b_l|$, $\sum c_m^*$. Dann gilt auch

$$A_n^* B_n^* - C_n^* = \sum_{\{k,l:k\leq n.l\leq n.k+l>n\}} |a_k| \, |b_l|$$

woraus folgt

$$|A_n B_n - C_n| \leq |A_n^* B_n^* - C_n^*| \, .$$

Da nach dem ersten Teil des Beweises gilt $|A_n^* B_n^* - C_n^*| \to 0$, erhalten wir $|A_n B_n - C_n| \to 0$ und somit $A_n B_n - C_n \to 0$, was zu beweisen war. ■

Beispiel. Beweisen wir, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, 2^{-n} = 4. \tag{5.52}$$

Dafür stellen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, 2^{-n}$ dar als das Cauchy-Produkt zweier identischen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ und $\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}$. In der Tat ist das Cauchy-Produkt gleich

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} 2^{-(n-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{--n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \, 2^{-n}.$$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} = 2$, so erhalten wir (5.52).

5.13 * Zahlensystem: q-adische Darstellung reeller Zahlen

Sei $q \geq 2$ eine natürliche Zahl. Betrachten wir eine unendliche Folge$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ von q-adischen Ziffern (d.h. $a_k \in \{0, ..., q-1\}$) und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} = a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + ... \, . \tag{5.53}$$

Satz 5.17 *Für jede Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ von q-adischen Ziffern ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ konvergent und ihre Summe liegt in* $[0, 1]$.

Definition. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ heißt q-adischer *Bruch*, und die Summe $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ heißt der Wert des Bruches. Die übliche symbolische Abkürzung dieser Identität ist

$$x = (0, a_1 a_2 a_3 ...)_q \quad \text{oder} \quad x = 0, a_1 a_2 a_3 ...$$

Beweis von Satz 5.17. Da $a_k q^{-k} \geq 0$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ entweder konvergent oder bestimmt divergent. Zeigen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} < \infty.$$

Es folgt aus (5.2), dass für jedes $x \in (-1,1)$ und $m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=m}^{\infty} x^k = x^m \sum_{k=m}^{\infty} x^{k-m} = x^m \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^m}{1-x}. \tag{5.54}$$

Da $a_n \le q-1$, so erhalten wir nach (5.54)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k} \le (q-1) \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} = (q-1) \frac{q^{-1}}{1-q^{-1}} = 1. \tag{5.55}$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{-k}$ konvergent und ihre Summe liegt in $[0,1]$. ∎

Beispiel. Es folgt aus (5.55), dass

$$(0,111...)_q = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} = \frac{1}{q-1}. \tag{5.56}$$

Der nächste Satz ist die Umkehrung von dem Satz 5.17.

Satz 5.18 *Sei $q > 1$ eine natürliche Zahl. Für jedes $x \in [0,1)$ gibt es einen q-adischen Bruch mit dem Wert x.*

Beweis. Bestimmen wir die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Ziffern per Induktion nach n, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} \le x < \sum_{k=1}^{n} a_k q^{-k} + q^{-n}. \tag{5.57}$$

Induktionsanfang für $n = 1$. Die Ungleichung (5.57) für $n = 1$ ist

$$a_1 q^{-1} \le x < a_1 q^{-1} + q^{-1}, \tag{5.58}$$

was äquivalent zu

$$a_1 \le qx < a_1 + 1 \tag{5.59}$$

ist, d.h.

$$a_1 = [qx],$$

wobei $[\cdot]$ Gaußklammer ist (siehe Satz 2.9). Da $0 \le x < 1$, so erhalten wir $0 \le qx < q$ und somit $0 \le a_1 < q$. Deshalb ist a_1 eine q-adische Ziffer ist. Damit haben wir gezeigt, dass a_1 existiert.

Induktionsschritt von $< n$ nach n. Seien a_k für alle $k < n$ schon bestimmt. Wir müssen beweisen, dass es eine Ziffer a_n mit (5.57) gibt. Setzen wir

$$y = \sum_{k=1}^{n-1} a_k q^{-k}$$

und umschreiben (5.57) wie folgt:

$$y + a_n q^{-n} \le x < y + a_n q^{-n} + q^{-n}.$$

Diese Ungleichungen sind äquivalent zu

$$a_n \leq q^n (x-y) < a_n + 1,$$

was ergibt

$$a_n = [q^n (x-y)] .$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass a_n eine q-adische Ziffer ist. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir

$$y \leq x < y + q^{-(n-1)},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq x - y < q^{-n+1}, \\ 0 &\leq q^n (x-y) < q, \\ 0 &\leq [q^n (x-y)] < q \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Es folgt aus (5.57) für $n \to \infty$, dass $x = 0, a_1 a_2 ...$ ∎

Mit Hilfe von Sätzen 2.25 und 5.18 kann jedes $x \in \mathbb{R}_+$ im q-adischen Zahlensystem dargestellt werden, wie folgt. In der Tat kann jedes $x \geq 0$ eindeutig in der Form

$$x = a + b$$

zerlegt werden, wobei $a = [x] \in \mathbb{Z}_+$ der Ganzzahlanteil von x ist und $b = x - a \in [0,1)$ der *Bruchteil* von x. Manchmal benutzt man die Bezeichnung $b = \{x\}$ (x in den geschwungenen Klammern – nicht mit der Menge $\{x\}$ zu verwechseln).

Ist $a = 0$, so gilt $x \in [0,1)$ und die q-adische Darstellung von x wird von Satz 5.18 gegeben. Sei $a > 0$. Nach Satz 2.25 hat a die q-adische Darstellung

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k = (a_n a_{n-1} ... a_0)_q \ .$$

Nach Satz 5.18 hat b die Darstellung als ein q-adischer Bruch

$$b = \sum_{l=1}^{\infty} b_l q^{-l} = (0, b_1 b_2 b_3 ...)_q \ .$$

Deshalb erhalten wir die Identität

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k q^k + \sum_{l=1}^{\infty} b_l q^{-l},$$

die symbolisch abgekürzt wird wie folgt

$$x = (a_n a_{n-1} ... a_0, b_1 b_2 b_3 ...)_q \ .$$

Der Ausdruck $(a_n a_{n-1} ... a_0, b_1 b_2 b_3 ...)_q$ (wobei a_k und b_l die q-adischen Ziffern sind) heißt *q-adische Zahl*. Somit erhalten wir folgendes.

Korollar 5.19 *Jede q-adische Zahl hat einen Wert in $\mathbb{R}_+$. Für jedes $x \in \mathbb{R}_+$ existiert eine q-adische Zahl mit dem Wert x.*

Mit Hilfe von der q-adischen Darstellung der reellen Zahlen können die arithmetischen Operationen mit Zahlen durchgeführt werden, wie schriftliche Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Bemerkung. Der Satz 5.18 enthält keine Eindeutigkeitsaussage, da dies nicht immer gilt. Zum Beispiel, es folgt aus (5.56), dass für $a = q-1$

$$(0, aaa....)_q = \frac{a}{q-1} = 1,$$

wobei 1 auch die q-adische Darstellung $1 = (1)_q$ hat. Ein q-adischer Bruch $(0, b_1 b_2 ...)_q$ heißt *echt* wenn

$$\text{die Menge } \{k \in \mathbb{N} : b_k < q-1\} \text{ unendlich ist.} \tag{5.60}$$

Man kann beweisen, dass für jedes $x \in [0,1)$ es genau einen q-adischen echten Bruch mit dem Wert x gibt. Eigentlich, die Konstruktion im Beweis des Satzes 5.18 ergibt schon einen echten q-adischen Bruch. Für die Eindeutigkeit vergleicht man zwei echten Brüche $(0, b_1 b_2 ...)_q$ und $(0, b_1' b_2' ...)_q$. Sind die Folgen $\{b_k\}$ und $\{b_k'\}$ nicht identisch, so gibt es ein minimales $m \in \mathbb{N}$ mit $b_m \neq b_m'$, z.B. mit $b_m < b_m'$. Dann zeigt man, dass

$$(0, b_1 b_2 ...)_q < (0, b_1' b_2' ...)_q\,,$$

woraus die Eindeutigkeit folgt.

Als Beispiel von Anwendung des Dualsystems beweisen wir dass $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dafür betrachten wir die Menge $\mathcal{F}$ von allen Folgen $b = \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $b_k \in \{0,1\}$ (Dualziffern) und die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathcal{F} \to [0,1] \\ \varphi(b) &= (0, b_1 b_2 ...)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist surjektiv nach Satz 5.18, aber nicht injektiv, was wir oberhalb gesehen haben. Bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_e$ die Menge von den Folgen $a \in \mathcal{F}$ die echt sind, d.h. die Bedingung (5.60) erfüllen. Dann ist $\varphi|_{\mathcal{F}_e}$ eine Bijektion von $\mathcal{F}_e$ auf $[0,1)$, so dass

$$\mathcal{F}_e \sim [0,1).$$

Man kann beweisen, dass die Differenz $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_e$ abzählbar ist. Da $[0,1) \sim \mathbb{R}$ und nach dem Satz 2.22 $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_e$, so erhalten wir

$$\mathcal{F} \sim \mathbb{R}.$$

Andererseits gilt

$$\mathcal{F} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

da die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \psi &: \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ \psi(b) &= \{k \in \mathbb{N} : b_k = 0\} \end{aligned}$$

bijektiv ist. Somit haben wir, dass $\mathbb{R} \sim \mathcal{F} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, woraus $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ folgt

Nach dem Satz 2.24 gilt $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Da $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, so erhalten wir einen alternativen Beweis der Ungleichung $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ (siehe Satz 2.19).

5.14 * Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$

Here präsentieren wir kurz noch zwei Wege um die Menge $\mathbb{R}$ zu konstruieren, angenommen dass die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ schon bekannt sind (siehe Abschnitt 2.14). Alle Wege von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{R}$ sind ziemlich lang (und auch langweilig) und wir werden keine weiteren Einzelheiten geben.

Reelle Zahlen als q-adische Zahlen

Man benutzt das q-adische Zahlensystem (zum Beispiel, mit $q = 2$) um zunächst $\mathbb{R}_+$ als die Menge von q-adischen Zahlen (Folgen)

$$(b_n b_{n-1}...b_0, a_1 a_2...)_q$$

zu definieren, wobei a_k, b_l die q-adischen Ziffern sind. Man muß sowohl die Operationen $+$ und $\cdot$ als auch die Ungleichung mit Hilfe von q-adischen Darstellungen definieren und die Gültigkeit von allen Axiomen von reellen Zahlen beweisen.

Zum Beispiel, betrachten wie nur die Menge

$$M = \{0, a_1 a_2... \mid a_k \text{ sind } q\text{-adische Ziffern}\}$$

und beweisen, dass diese Menge das Vollständigkeitsaxiom erfüllt. Dafür definieren wir zunächst die Ungleichung in M wie folgt: für

$$a = 0, a_1 a_2... \quad \text{und} \quad b = 0, b_1 b_2...$$

gilt $a \leq b$ wenn entweder $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ oder es ein $n \in N$ gibt so dass

$$a_k = b_k \text{ für alle } k < n \text{ und } a_n < b_n.$$

Seien X und Y zwei nichtleere Teilmengen von M mit

$$x \leq y \;\; \forall x \in X \;\text{ und } \forall y \in Y.$$

Beweisen wir, dass es ein $c \in M$ gibt mit

$$x \leq c \leq y \quad \forall x \in X \text{ und } \forall y \in Y.$$

Zuerst wählen wir die maximale Zahl von

$$0, x_1 0000....$$

für alle $x \in X$, sei

$$\max_{x \in X} 0, x_1 000... = 0, c_1 000... \tag{5.61}$$

(das Maximum existiert da die Menge von verschiedenen Werten für x_1 endlich ist). Dann setzen wir

$$\max_{x \in X} 0, x_1 x_2 000... = 0, c_1' c_2 000...$$

und zeigen, dass $c_1' = c_2$. Offensichtlich gilt

$$0, c_1 000... \leq 0, c_1' c_2 000...$$

so dass $c_1 \leq c_1'$. Andererseits kann c_1' nicht größer als c_1 sein nach (5.61). Somit gilt $c_1 = c_2$ und

$$\max_{x\in X} 0, x_1x_2000... = 0, c_1c_2000...$$

Weiter erhalten wir

$$\max_{x\in X} 0, x_1x_2x_3 = 0, c_1c_2c_3000...$$

und so weiter. Somit erhalten wir die q-adische Zahl

$$c = 0, c_1c_2.... \in M$$

mit $x \leq c$ für alle $x \in X$. Auch gilt $c \leq y$ für alle y da für jedes n gilt für ein $x \in M$

$$0, c_1...c_n000... = 0, x_1...x_n000... \leq x,$$

woraus folgt für alle $y \in M$

$$0, c_1...c_n000... \leq y$$

und $c \leq y$.

Reelle Zahlen als Cauchy-Folgen

Sei der Körper $\mathbb{Q}$ schon definiert. Wir betrachten Folgen $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ die aus rationalen Zahlen bestehen. Man definiert die Begriffe von Grenzwert und Cauchy-Folge genau so wir im Kapitel 4 aber anstatt $\mathbb{R}$ benutzt man immer $\mathbb{Q}$. Man sagt, dass zwei Cauchy-Folgen $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ äquivalent sind wenn $x_k - y_k \to 0$ für $k \to \infty$. Die reellen Zahlen werden als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen definiert, d.h. jede Cauchy-Folge stellt eine reelle Zahl dar, und die äquivalente Cauchy-Folgen stellen die gleiche Zahl dar. Die Menge von reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Wir schreiben $x \sim \{x_k\}$ wenn die reelle Zahl x der Cauchy-Folge $\{x_k\}$ entspricht. Jede rationale Zahl a wird mit der Cauchy-Folge $\{a\}$ identifiziert so dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Man definiert die addition in $\mathbb{R}$ wie folgt: für die Zahlen $x \sim \{x_k\}$ und $y \sim \{y_k\}$ setzen wir $x + y \sim \{x_k + y_k\}$ da $\{x_k + y_k\}$ auch Cauchy-Folge ist. Analog definiert man das Produkt und Ungleichung. Man beweist danach dass $\mathbb{R}$ alle Axiome von reellen Zahlen erfüllt inklusive das Vollständigkeitsaxiom.

Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$

Es gibt verschiedene Mengen, die die Axiome von $\mathbb{R}$ erfüllen. Alle solchen Mengen heißen die *Modelle* von $\mathbb{R}$. Wir haben schon drei Modellen von $\mathbb{R}$ gesehen: die Menge von Dedekindschen Schnitten, die Menge von q-adischen Brüchen[1] und die Menge von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen.

Die Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ gilt im folgenden Sinn. Gegeben seien zwei Modellen $\mathbb{R}'$ und $\mathbb{R}''$ von $\mathbb{R}$, dann existiert eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}' \to \mathbb{R}''$ mit den Eigenschaften:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

[1] Für verschiedene Werte von q erhält man allerdings verschiedene Modelle von $\mathbb{R}$.

3. $x < y \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$.

Daraus folgt, dass auch $\varphi(0') = 0''$, $\varphi(1') = 1''$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Eine Abbildung φ mit diesen Eigenschaften heißt *Isomorphismus*, und die Modellen $\mathbb{R}'$ und $\mathbb{R}''$, für die ein Isomorphismus existiert, heißen *isomorph*. Somit sind je zwei beliebige Modellen von reellen Zahlen isomorph.

Wir müssen unbedingt betonen, dass der Beweis der Existenz von Isomorphismus das Vollständigkeitsaxiom benötigt. Zum Beispiel, $\mathbb{Q}$ erfüllt alle anderen Axiome von reellen Zahlen, aber $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht isomorph.

Chapter 6

Stetige Funktionen einer reellen Variablen

15.01.2025 **Vorlesung 23**

6.1 Grenzwert einer Funktion

Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei der Definitionsbereich J ein Intervall ist. Bezeichnen wir mit $\overline{J}$ das abgeschlossene Intervall $[\alpha, \beta]$ wobei α und β die Grenzen von J sind. Das Intervall $\overline{J}$ heißt der *Abschluss* von J.

Fixieren wir einen Punkt $a \in \overline{J}$ und stellen die Frage: was passiert mit $f(x)$ für x in der Nähe von a? Dieser Frage ist sinnvoll sowohl für alle Punkte $a \in J$ als auch wenn a ein Grenzpunkt von J ist.

Kann man besagen dass $x \approx a \Rightarrow f(x) \approx b$ für ein b? Das Zeichen $\approx$ hier ist nicht wohldefiniert, und die genaue Definition ist wir folgt.

Definition. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien a und b reelle Zahlen, $a \in \overline{J}$. Man sagt dass die Funktion $f(x)$ für $x \to a$ den Grenzwert b hat und schreibt

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{und auch} \quad f(x) \to b \text{ für } x \to a,$$

wenn

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in J \ \text{ mit } \ 0 < |x - a| < \delta \ \text{ gilt } \ |f(x) - b| < \varepsilon.} \tag{6.1}$$

Man sagt auch: $f(x)$ konvergiert gegen b für x gegen a. Manchmal schreibt man auch

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in J}} f(x) = b,$$

um den Definitionsbereich von f zu betonen. Die Definition von $\lim_{x \to a} f(x)$ in der Form (6.1) heißt die *ε-δ-Definition.*

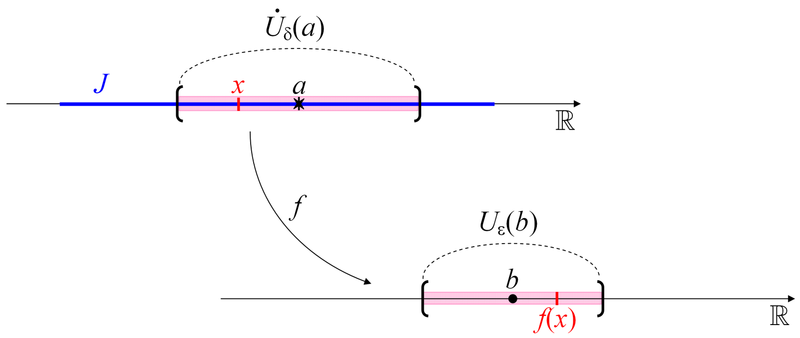
Die Bedingung (6.1) kann wie folgt verstanden werden: wenn $x \approx a$ mit Approximationsfehler $< \delta$ dann $f(x) \approx b$ mit Approximationsfehler $< \varepsilon$. Wir betonen, dass der Wert $x = a$ in (6.1) nicht berücksichtigt ist (die Funktion f muss sogar nicht an $x = a$ definiert werden).

Die Bedingung $0 < |x-a| < \delta$ bedeutet, dass

$$x \in U_\delta(a) \setminus \{a\} =: \dot{U}_\delta(a),$$

wobei die Menge $\dot{U}_\delta(a)$ die *punktierte* δ-Umgebung von a heißt. Äquivalent lässt sich (6.1) wie folgt umschreiben:

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ \forall x \in J \cap \dot{U}_\delta(a)\ \ \text{gilt}\ \ f(x) \in U_\varepsilon(b).} \tag{6.2}$$



Satz 6.1 (Äquivalente Definition von lim) *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien a und b reelle Zahlen, $a \in \overline{J}$. Dann sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

(ii) *Für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $J \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*

Kurz kann man die Bedingung (ii) so beschreiben:

$$x_n \to a\ \Rightarrow f(x_n) \to b.$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $\{x_n\}$ eine Folge aus $J \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$. Wir müssen beweisen, dass $f(x_n) \to b$, d.h. für $\forall\varepsilon > 0$ und für fast alle n gilt

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(b). \tag{6.3}$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und finden δ wie in (6.1). Da $x_n \to a$ und $x_n \neq a$ so gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in \dot{U}_\varepsilon(a).$$

Nach (6.2) erhalten wir, dass auch (6.3) für fast alle n gilt, was zu beweisen war.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir müssen beweisen, dass unter Bedingung (ii) gilt $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\lim_{x\to a} f(x) = b$ nicht gilt, d.h. (6.2) nicht gilt. Um die Negation von (6.2) zu bekommen, verwenden wir die folgenden Regeln von Negation: für beliebige Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, die von ε bzw δ abhängen können, gilt

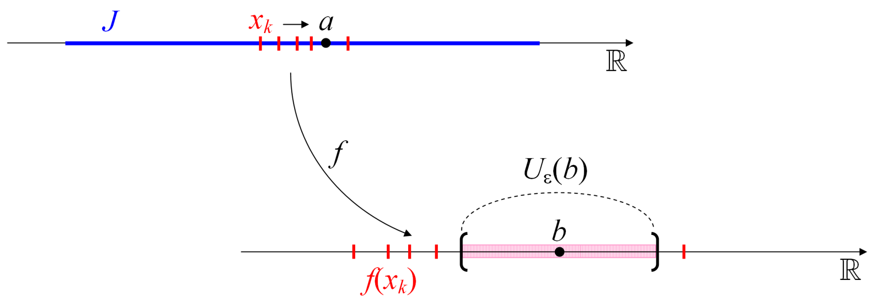
$$\neg(\forall\varepsilon\ \ \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\exists\varepsilon\ \ \neg\mathcal{A})$$
$$\neg(\exists\delta\ \ \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\forall\delta\ \ \neg\mathcal{B}).$$

D.h. die Negation von (6.2) erhält man indem man überall $\forall$ durch $\exists$ ersetzt, $\exists$ durch $\forall$ ersetzt, und die Negation auf die verbleibende Aussage anwendet. Die Negation von (6.2) ist somit wie folgt:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x \in J \cap \dot{U}_\delta(a) \text{ mit } \ f(x) \notin U_\varepsilon(b). \tag{6.4}$$

Da δ hier beliebige ist (während ε fixiert), so verwenden wir (6.4) mit $\delta = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $\delta = \frac{1}{k}$ erhalten wir dann ein x_k mit

$$x_k \in J \cap \dot{U}_{1/k}(a) \ \text{ und } \ f(x_k) \notin U_\varepsilon(b).$$



Es folgt $x_k \to a$ für $k \to \infty$, aber nicht $f(x_k) \to b$, was im Widerspruch zur Bedingung (ii) steht. ∎

Beispiel. Betrachten wir die folgende Funktion auf $J = \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

wobei c eine beliebige reelle Zahl ist, und bestimmen $\lim_{x\to 0} f(x)$. Für jede Folge $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$ haben wir

$$|f(x_n)| = \left| x_n \sin \frac{1}{x_n} \right| \le |x_n|$$

da $|\sin z| \le 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$ (da $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$). Da $|x_n| \to 0$, so erhalten wir $f(x_n) \to 0$ und somit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Die obige Definition des Grenzwertes lässt sich auf den Fall $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ verallgemeinern.

Definition. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $a \in \overline{J}$ und $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Man sagt dass die Funktion $f(x)$ für $x \to a$ den Grenzwert b hat und schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{oder} \quad f(x) \to b \text{ für } x \to a,$$

wenn

$$\boxed{\forall V(b) \ \ \exists U(a) \ \ \forall x \in J \cap \dot{U}(a) \text{ gilt } f(x) \in V(b),} \tag{6.5}$$

wobei $U(a)$ und $V(b)$ Umgebungen von a und b bezeichnen.

Im Fall $b \in \mathbb{R}$ sagt man auch, dass $f(x)$ gegen b konvergiert für x gegen a, und im Fall $b = \pm\infty$ sagt man, dass $f(x)$ gegen b divergiert.

Der Satz 6.1 bleibt gültig auch im Fall, wenn $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, mit dem gleichen Beweis.

Für zwei beliebige Funktionen $f, g : J \to \mathbb{R}$ definieren wir die arithmetischen Operationen wie folgt:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)\, g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

wobei im Fall der Division vorausgesetzt ist, dass $g \neq 0$ in J.

Satz 6.2 (Rechenregeln für lim) *Seien $f, g : J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf einem Intervall J und sei $a \in \overline{J}$. Nehmen wir an dass*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \ \ \text{und} \ \ \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

wobei $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Es gelten die Identitäten

$$\lim_{x\to a} (f \pm g) = b \pm c, \quad \lim_{x\to a} (fg) = bc, \quad \lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{b}{c} \tag{6.6}$$

vorausgesetzt, dass die Ausdrücke in den rechten Seiten bestimmt sind (und $g \neq 0$ im Fall der Division).

(b) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in J$, so gilt auch $b \leq c$.

(c) Seien f, g, h drei Funktionen auf J mit $f \leq h \leq g$ und

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Beweis. Nach dem Satz 6.1 gelten für jede Folge $x_n \to x$, $x_n \in J \setminus \{a\}$ die Bedingungen $f(x_n) \to b$ und $g(x_n) \to c$. Nach dem Satz 4.10 erhalten wir

$$(f \pm g)(x_n) = f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c, \quad (fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to bc, \quad \frac{f}{g}(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{b}{c},$$

woraus (6.6) folgt. Analog beweist man (b) und (c) mit Hilfe von dem Satz 4.1. ∎

Beispiel. 1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ da für jede Folge $x_n \to +\infty$ gilt $\sqrt{x_n} \to \infty$ (für jedes $E > 0$ gilt $\sqrt{x_n} > E$ für fast alle n weil $x_n > E^2$ für fast alle n).

2. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ da für $x > 0$ gilt $e^x > x$ und $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

3. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ da für jede Folge $x_n \to -\infty$ gilt $-x_n \to +\infty$ und somit

$$e^{x_n} = \frac{1}{e^{-x_n}} \to \frac{1}{+\infty} = 0.$$

4. Bestimmen wir den Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$. Wir haben

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x^2-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{(x^2-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = (x+1)\left(\sqrt{x}+1\right).$$

Für jede Folge $x_n \to 1$ haben wir $\sqrt{x_n} \to 1$ (Aufgabe 59), woraus folgt $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$ und und somit

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) \lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x}+1\right) = 4.$$

Z.B., für $x = 1.01$ gilt $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = 4.030...$

6.2 Stetige Funktionen

Definition. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *stetig* an einer Stelle $a \in J$ wenn

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{6.7}$$

Sonst heißt f *unstetig* an a. Ist f stetig an allen $a \in J$, so heißt f stetig auf J (oder einfach stetig).

Satz 6.3 (Äquivalente Definition von Stetigkeit) *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in J$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig an a;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in J \cap U_\delta(a)$ *gilt* $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$;

(iii) *für jede Folge* $\{x_n\} \subset J$ *mit* $x_n \to a$ *gilt* $f(x_n) \to f(a)$.

Bemerken wir, dass x in (ii) und x_n in (iii) gleich a sein dürfen.

17.01.2025 Vorlesung 24

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Da $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$, so gilt nach Definition des Limes

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in J \cap U_\delta(a) \setminus \{a\}\ \text{ gilt }\ f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

Wenn $x = a$ so gilt auch

$$f(x) = f(a) \in U_\varepsilon(f(a)),$$

woraus (ii) folgt.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Um zu beweisen, dass $f(x_n) \to f(a)$, wir müssen zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(f(a)) \ \text{ für fast alle } n. \tag{6.8}$$

Gegeben sei $\varepsilon > 0$, wählen δ wie in (ii). Da $x_n \to a$, so gilt

$$x_n \in U_\delta(a) \text{ für fast alle } n,$$

und (6.8) folgt aus (ii).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Da auch für jede Folge $\{x_n\} \subset J \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$ so erhalten wir nach dem Satz 6.1 dass $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, was zu beweisen war. ∎

Beispiel. 1. Es ist offensichtlich, dass die folgenden Funktionen $f(x) = \text{const}$ und $f(x) = x$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind.

2. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0, \infty)$, da nach Aufgabe 59 für jede konvergente Folge $\{x_n\}$ von nichtnegative reellen Zahlen mit $x_n \to a$ gilt $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

3. Die Funktion $f(x) = e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ da nach Aufgabe 90 für jede konvergente Folge $\{x_n\}$ von reellen (und auch komplexen) Zahlen mit $x_n \to a$ gilt $e^{x_n} \to e^a$.

4. Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von reellen Zahlen mit $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Dann haben wir $ix_n \to ia$ und somit auch $e^{ix_n} \to e^{ia}$ (wieder nach Aufgabe 90). Es folgt nach dem Satz 4.11 dass

$$\cos x_n = \operatorname{Re} e^{ix_n} \to \operatorname{Re} e^{ia} = \cos a$$

und analog

$$\sin x_n = \operatorname{Im} e^{ix_n} \to \operatorname{Im} e^{ia} = \sin a,$$

so dass $\cos x$ und $\sin x$ stetig sind.

5. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

ist unstetig an $a = 0$, da für die Folge $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ gilt $f(x_n) \to 1 \neq f(0)$.

Satz 6.4 (Operationen mit stetigen Funktionen) *Seien $f, g : J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Sind f und g stetig an der Stelle $a \in J$, so sind auch die Funktionen $f + g$, $f - g$, fg, f/g stetig an a (im Fall f/g vorausgesetzt $g \neq 0$).*

Sind f, g stetig auf J, so sind $f + g$, $f - g$, fg, f/g auch stetig auf J (im Fall f/g vorausgesetzt $g \neq 0$).

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Satz 6.2. Zum Beispiel für die Summe $f + g$ erhalten wir

$$\lim_{x\to a} (f + g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

woraus die Stetigkeit von $f + g$ an a folgt. Analog behandelt man die Funktionen $f - g$, fg und f/g.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage. ∎

Beispiel. 1. Da die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \text{const}$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind, so folgt es, dass jede Funktion $h(x) = cx^n$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist, für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass jedes *Polynom*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist (wobei $c_k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

2. Betrachten wir eine *rationale* Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ wobei P und Q zwei Polynome sind. Dann ist R definiert und stetig auf jedem Intervall J wo $Q \neq 0$.

3. Die Funktionen $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ da e^x und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ stetig sind.

6.3 Zusammengesetzte Funktion

Satz 6.5 (Grenzwert einer Komposition) *Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die auf den Intervallen A und B definiert sind. Nehmen wir an, dass $f(A) \subset B$ so dass die Komposition $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definiert ist, Nehmen wir auch an, dass für einige $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ gelten*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \textit{und} \quad \lim_{y\to b} g(y) = c.$$

Im Fall $b \in B$ nehmen wir auch an, dass g an b stetig ist, d.h. $g(b) = c$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c. \tag{6.9}$$

Man kann die Identität (6.9) wie folgt umschreiben:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y)$$

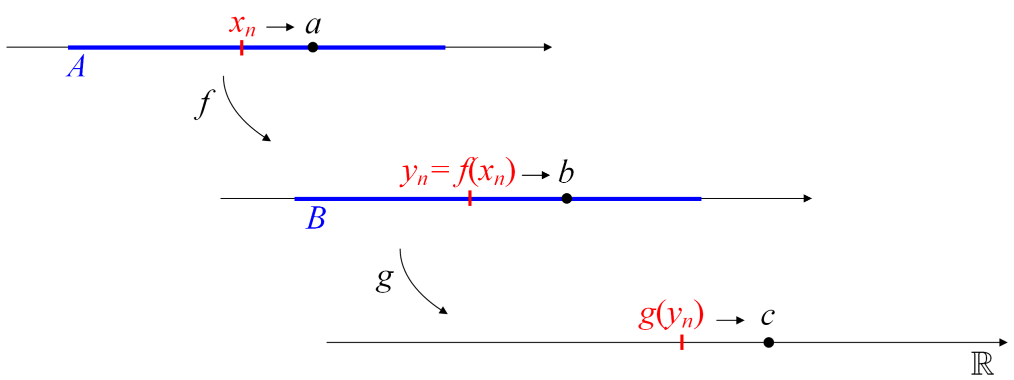
und betrachten sie als Wechsel von Variable $y = f(x)$ im Limes.

Beweis. Nach dem Satz 6.1 reicht es folgendes zu beweisen: für jede Folge $\{x_n\}$ aus $A \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt

$$g(f(x_n)) \to c.$$

Betrachten wir die Folge $y_n = f(x_n)$. Nach der Voraussetzung $f(A) \subset B$ gilt $y_n \in B$ und nach der Voraussetzung $\lim_{x\to a} f(x) = b$ gilt $y_n = f(x_n) \to b$ d.h.

$$y_n \in B \quad \text{und} \quad y_n \to b.$$



Beweisen wir, dass

$$g(f(x_n)) = g(y_n) \to c.$$

Fall 1. Ist $b \notin B$, so liegt die Folge $\{y_n\}$ in $B \setminus \{b\} = B$, und nach der Voraussetzung $\lim_{y\to b} g(y) = c$ gilt $g(y_n) \to c$.

Fall 2. Ist $b \in B$, so ist g stetig an b. Da $y_n \to b$, so gilt $g(y_n) \to g(b) = c$ nach dem Satz 6.3. ∎

Satz 6.6 (Komposition von stetigen Funktionen) *Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei $A, B \subset \mathbb{R}$. Sei die Komposition $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ wohldefiniert (d.h. $f(A) \subset B$). Ist f stetig an $a \in A$ und g stetig an $b = f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig an a.*

Ist f stetig auf A und g – auf B, so ist $g \circ f$ stetig auf A.

Beweis. Da $f(x) \to b$ für $x \to a$ und $g(y) \to g(b)$ für $y \to b$, so erhalten wir nach dem Satz 6.5

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to b} g(y) = g(b) = g(f(a)),$$

woraus die Stetigkeit von $g(f(x))$ an a folgt.

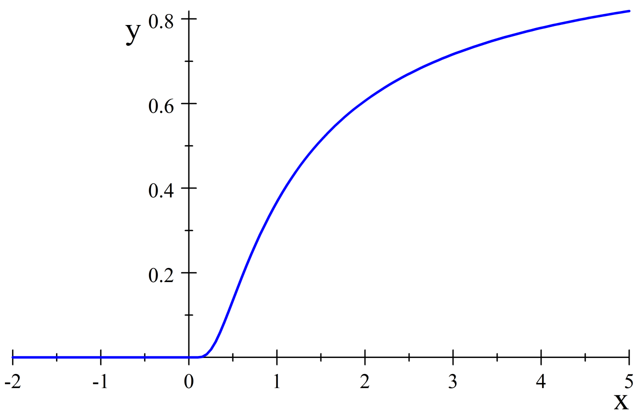
Ist f stetig auf A und g – auf B, so ist g stetig an $b = f(a)$ für jedes $a \in A$, da $f(A) \subset B$. Daraus folgt, dass $g \circ f$ stetig an a für jedes $a \in A$ ist, und somit stetig auf A. ■

Beispiel. Für jede rationale Funktion $R(x)$ sind die Funktionen $e^{R(x)}$ und $R(e^x)$ stetig im Definitionsbereich. Die Funktionen $e^{\sin x}$ und $\sin(e^x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \tag{6.10}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Aufgabe 104).



Der Graph der Funktion (6.10)

6.4 Zwischenwertsatz

Hauptsatz 6.7 *(Zwischenwertsatz) Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Gelten $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.*

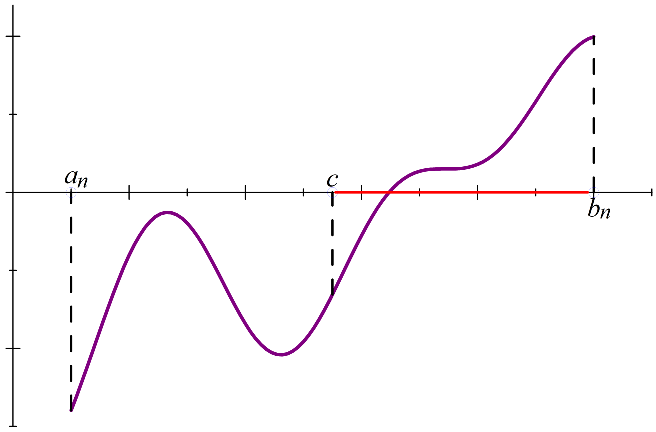
Beweis. Definieren wir per Induktion nach n eine Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $[a_1, b_1] = [a, b]$;

2. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
3. $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
4. $f(a_n) \leq 0,\ f(b_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang ist offensichtlich: $[a_1, b_1] = [a, b]$ da nach der Voraussetzung gilt $f(a_1) < 0$ und $f(b_1) > 0$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Ist $[a_n, b_n]$ schon bekannt, so betrachten wir den Mittelpunkt $c = \frac{a_n + b_n}{2}$. Gilt $f(c) \leq 0$, so setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c, b_n]$.



If Fall $f(c) \leq 0$ setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c, b_n]$

Gilt $f(c) > 0$ so setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c]$. In den beiden Fällen erhalten wir alle Eigenschaften 2-4. Somit ist $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ eine Intervallschachtelung. Nach den Intervallschachtelungsprinzip (Satz 4.13) gibt es ein

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n],$$

d.h. $a_n \leq x \leq b_n$ für alle n. Da $b_n - a_n = 2^{-(n-1)}(b - a) \to 0$, so gilt $a_n \to x$ und $b_n \to x$ für $n \to \infty$. Nach der Stetigkeit der Funktion f gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n \to \infty} f(b_n).$$

Da $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$, so folgt es, dass $f(x) \leq 0$ und $f(x) \geq 0$, woraus folgt $f(x) = 0$. Es bleibt nur zu bemerken, dass $x \in (a, b)$ da $f(a)$ und $f(b)$ nicht Null sind. ■

22.01.2025 Vorlesung 25

Beispiel. Sei $P(x)$ ein Polynom von Grad n mit reellen Koeffizienten der Form

$$P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_n,$$

wobei $c_k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen wir die folgende Aussage: ist n ungerade, so existiert eine reelle Nullstelle von P, d.h. ein $x \in \mathbb{R}$ mit $P(x) = 0$. Bemerken wir zuerst, dass

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} x^n \left(1 + \frac{c_1}{x} + ... + \frac{c_n}{x^n}\right) = (+\infty)^n \cdot 1 = +\infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(1+\frac{c_1}{x}+...+\frac{c_n}{x^n}\right) = (-\infty)^n \cdot 1 = -\infty,$$

wobei wir verwendet haben dass n ungerade ist. Somit existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $P(a) < 0$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $P(b) > 0$. Da P stetig ist, so existiert nach dem Satz 6.7 ein $x \in \mathbb{R}$ mit $P(x) = 0$.

Mit Hilfe des Satzes 6.7 beschreiben wir für jede stetige Funktion f auf J die Bildmenge

$$f(J) = \{f(x) : x \in J\}.$$

Setzen wir

$$\sup f = \sup_J f := \sup f(J)$$

und

$$\inf f = \inf_J f := \inf f(J).$$

Satz 6.8 (Bildmenge stetiger Funktionen) *Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Dann ist das Bild $f(J)$ ein Intervall und zwar mit den Grenzen* $\inf f$ *und* $\sup f$.

Man kann kurz sagen: stetiges Bild eines Intervalles ist ein Intervall.

Beweis. Nach Definition haben wir

$$f(J) \subset [\inf f, \sup f].$$

Wir werden beweisen, dass

$$\boxed{f(J) \supset (\inf f, \sup f)}, \tag{6.11}$$

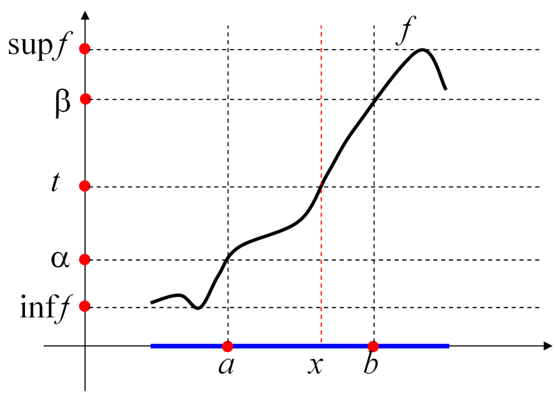
was implizieren wird, dass $f(J)$ ein Intervall mit den Grenzen $\inf f$, $\sup f$ ist.

Um die Inklusion (6.11) zu beweisen, zeigen wir dass

$$\forall t \in (\inf f, \sup f) \quad \exists x \in J \text{ mit } t = f(x) \quad (\text{d.h. } t \in f(J)).$$

Da $t > \inf f$ so ist t keine untere Schranke von $f(J)$. Somit $\exists \alpha \in f(J)$ mit $\alpha < t$; sei $\alpha = f(a)$ für ein $a \in J$.

Da $t < \sup f$, so ist t keine obere Schranke von $f(J)$. Somit $\exists \beta \in f(J)$ mit $\beta > t$; sei $\beta = f(b)$ für ein $b \in J$. Es folgt dass $f(a) < t < f(b)$.



Nehmen wir an, dass $a < b$ (der Fall $a > b$ ist analog). Betrachten wir auf dem Intervall $[a, b] \subset J$ die Funktion

$$g(x) = f(x) - t,$$

die stetig in J ist und erfüllt

$$g(a) = f(a) - t < 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - t > 0.$$

Nach dem Satz 6.7 existiert ein $x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$ woraus $f(x) = t$ folgt. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^n$ auf $J = [0, +\infty)$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen wir, dass

$$f(J) = [0, +\infty). \tag{6.12}$$

Es ist klar dass

$$f(J) \subset [0, +\infty).$$

Da $\inf f = 0$ und $\sup f = +\infty$ so erhalten wir nach dem Satz 6.8

$$f(J) \supset (0, +\infty).$$

Da offensichtlich auch $0 \in f(J)$, so erhalten wir $f(J) \supset [0, +\infty)$, woraus (6.12) folgt.

Beispiel. Beweisen wir, dass

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty). \tag{6.13}$$

Nach dem Satz 5.9 haben wir

$$\exp(\mathbb{R}) \subset (0, +\infty) \tag{6.14}$$

Da

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0,$$

so erhalten wir

$$\sup \exp = +\infty \quad \text{und} \quad \inf \exp = 0.$$

Nach dem Satz 6.8 gilt $\exp(\mathbb{R}) \supset (0, +\infty)$, was zusammen mit (6.14) ergibt (6.13).

6.5 Monotone Funktionen und inverse Funktion

Ist $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei beliebigen Mengen A und B. Nach dem Satz 1.7, die inverse Abbildung $f^{-1} : B \to A$ existiert genau dann, wenn f bijektiv ist. Existiert f^{-1} so gilt die Äquivalenz

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \forall x \in A \text{ und } \forall y \in B.$$

Sind A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so heißt f^{-1} auch die *inverse Funktion*.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$
$$f(x) = x^2$$

Da die Bedingung $y = x^2$ für nichtnegative x und y äquivalent zu $x = \sqrt{y}$ ist, so sehen wir, dass die inverse Funktion f^{-1} existiert und $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Für die Funktion

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ist die Bedingung $y = \frac{1}{x}$ äquivalent zu $x = \frac{1}{y}$. Deshalb erhalten wir $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.

Hier geben wir eine hinreichende Bedingung für Existenz der inversen Funktion an.

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf einem Intervall J heißt *monoton steigend* wenn für alle $x, y \in J$

$$x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y).$$

Die Funktion heißt *streng* monoton steigend wenn für alle $x, y \in J$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Analog ist f *monoton fallend* wenn für alle $x, y \in J$

$$x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$$

und streng monoton fallend wenn für alle $x, y \in J$

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Bemerkung. Ist f monoton steigend (bzw fallend), so ist $-f$ monoton fallend (bzw steigend). Auch $\frac{1}{f}$ ist monoton fallend (bzw steigend) vorausgesetzt $f > 0$.

Bemerkung. Ist $f : J \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw fallend), so ist f injektiv da

$$x \ne y \Rightarrow x < y \text{ oder } x > y \Rightarrow f(x) < f(y) \text{ oder } f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \ne f(y).$$

Hauptsatz 6.9 (Existenz der inversen Funktion) *Sei f eine stetige streng monoton steigende (bzw fallende) Funktion auf einem Intervall J. Dann ist die Bildmenge $I = f(J)$ auch ein Intervall und die inverse Funktion $f^{-1} : I \to J$ existiert, ist stetig und streng monoton steigend (bzw fallend).*

Beispiel. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) ist stetig und streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$. Da ihre Bildmenge ist $[0, +\infty)$, so existiert die inverse Funktion f^{-1} auf $[0, +\infty)$. Diese Funktion heißt die n-te Wurzel und wird mit $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ bezeichnet, so dass

$$y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} \quad \forall x, y \ge 0.$$

Die Funktion $\sqrt[n]{y}$ ist somit stetig und streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$.

Beweis. Das Bild $I = f(J)$ ein Intervall nach dem Satz 6.8. Sei f streng monoton steigend (der Fall von einer fallenden Funktion ist analog). Die Abbildung $f : J \to I$ ist surjektiv nach der Definition von I und injektiv nach der streng Monotonie von f. Somit ist f bijektiv und es gibt die inverse Funktion $f^{-1} : I \to J$ nach dem Satz 1.7.

Beweisen wir, dass f^{-1} streng monotone steigend ist. Dafür zeigen wir, dass für alle $y_1 < y_2$ aus I gilt

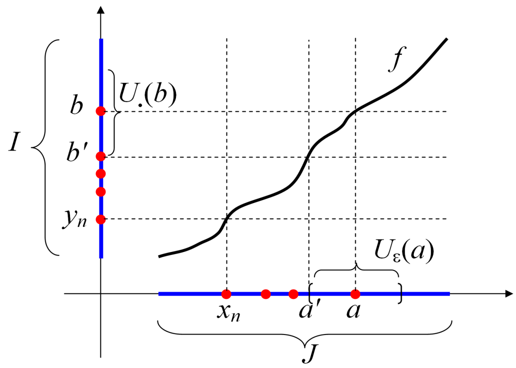
$$x_1 := f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) =: x_2.$$

In der Tat, gilt $x_1 \geq x_2$, so erhalten wir nach der Monotonie von f, dass $f(x_1) \geq f(x_2)$ und somit $y_1 \geq y_2$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $y_1 < y_2$ steht.

Beweisen wir jetzt, dass f^{-1} stetig auf I ist, d.h. für jedes $b \in I$ und für jede Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus I gilt die Implikation

$$y_n \to b \Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b).$$

Bezeichnen wir $x_n = f^{-1}(y_n)$, $a = f^{-1}(b)$ und beweisen, dass $x_n \to a$.



Dafür zeigen wir, dass für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle x_n in $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen. Setzen wir $a' = a - \varepsilon$, $b' = f(a')$ und bemerken, dass

$$x_n \leq a' \Leftrightarrow y_n \leq b'.$$

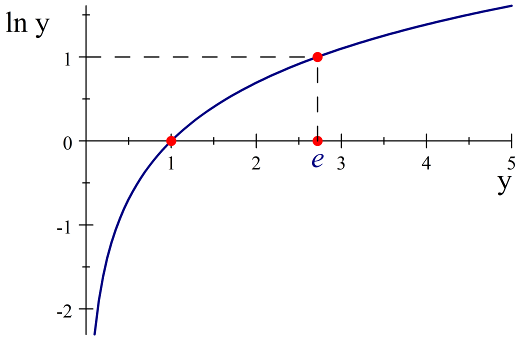
Da $b' < b$, so ist die Menge $\{n : y_n \leq b'\}$ endlich, da fast alle y_n in jeder Umgebung von b liegen. Daraus folgt dass auch die Menge $\{n : x_n \leq a'\}$ endlich ist. Genauso ist endlich die Menge $\{n : x_n \geq a + \varepsilon\}$, woraus folgt, dass fast alle x_n in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen, was zu beweisen war. ■

6.6 Logarithmische Funktion

Mit Hilfe von dem Satz 6.9 bestimmen wir die inverse Funktion der Exponentialfunktion. Die Funktion e^x ist stetig, streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$, und die Bildmenge von e^x ist $(0, +\infty)$. Nach dem Satz 6.9 mit $J = \mathbb{R}$ und $I = (0, +\infty)$ hat e^x die inverse Funktion mit dem Definitionsbereich $(0, +\infty)$ und Bildmenge $\mathbb{R}$.

Definition. Die inverse Funktion von e^x mit dem Definitionsbereich $(0, +\infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit ln bezeichnet.

Nach dem Satz 6.9 ist die Funktion $y \mapsto \ln y$ stetig und streng monoton steigend auf $(0, +\infty)$. Die Bildmenge von ln ist $\mathbb{R}$.



Der Graph der Funktion $y \mapsto \ln y$

Nach der Definition von inverser Funktion gelten die folgende Äquivalenz

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in (0, +\infty) \tag{6.15}$$

und die Identitäten:

$$\ln e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad e^{\ln y} = y \;\; \forall y \in (0, +\infty)\,.$$

Insbesondere gelten $\ln 1 = 0$ und $\ln e = 1$. Nach der Monotonie von ln erhalten wir $\ln y > 0$ für $y > 1$ und $\ln y < 0$ für $y < 1$.

Die Funktion ln erfüllt für alle $u, v > 0$ die Identität

$$\boxed{\ln (uv) = \ln u + \ln v}, \tag{6.16}$$

da

$$e^{\ln u + \ln v} = e^{\ln u} e^{\ln v} = uv = e^{\ln (uv)}.$$

Insbesondere erhalten wir für $v = \frac{1}{u}$ dass

$$\ln \frac{1}{u} = - \ln u.$$

Definition. Für jede reelle Zahl $a > 0$ und jedes $x \in \mathbb{C}$ definieren wir die Potenz a^x wie folgt:

$$\boxed{a^x := e^{x \ln a}}. \tag{6.17}$$

Die Funktion $f(x) = a^x$ heißt die *Exponentialfunktion* zur Basis a.

Die Funktion a^x hat die folgenden Eigenschaften:

1. $a^0 = 1$ (da $e^0 = 1$) und $a^1 = a$ (da $e^{\ln a} = a$).

2. $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$ da
$$a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}. \tag{6.18}$$

3. Für $x = n \in \mathbb{Z}$ stimmt die neue Definition (6.17) von a^x mit der früheren Definition von a^n für $n \in \mathbb{Z}$ überein (wie im Beweis von dem Satz 5.9(d)).

4. Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion a^x reell, positive und stetig (als Komposition zweier stetigen Funktionen $x \mapsto x \ln a$ und exp).

5. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\ln a^x = x \ln a$ (was aus (6.17) folgt).

6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}, \tag{6.19}$$
da
$$\ln\left((a^x)^y\right) = y \ln(a^x) = xy \ln a = \ln(a^{xy}).$$

Insbesondere folgt es aus (6.19), dass für jedes $n \in \mathbb{N}$
$$\left(a^{1/n}\right)^n = a,$$
was ergibt $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Im Fall $a = 1$ folgt es aus (6.17) dass $1^x \equiv 1$. Sei $a \neq 1$ (und $a > 0$ wie immer). Bestimmen wir die inverse Funktion von a^x, $x \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $y = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (0, +\infty)$ ist äquivalent zu $y = e^{x \ln a}$ und somit zu $\ln y = x \ln a$, d.h.
$$y = a^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}.$$
Somit ist $\frac{\ln y}{\ln a}$ die inverse Funktion von a^x.

Definition. Die inverse Funktion von a^x heißt *der Logarithmus zur Basis* a und wird mit $\log_a y$ bezeichnet, d.h.
$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}. \tag{6.20}$$

Die Funktion $\log_a y$ hat den Definitionsbereich $(0, +\infty)$ und die Bildmenge $\mathbb{R}$, wie $\ln y$.

24.01.2025 **Vorlesung 26**

6.7 Die Zahl π und die Periodizität von sin und cos

Hier definieren wir die Zahl π und beweisen, dass die trigonometrischen Funktionen 2π-periodisch sind.

Erinnern wir uns zunächst daran, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$|\cos x| \leq 1 \text{ und } \quad |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
da nach dem Satz 5.11
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{6.21}$$
Wir wissen auch dass $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.

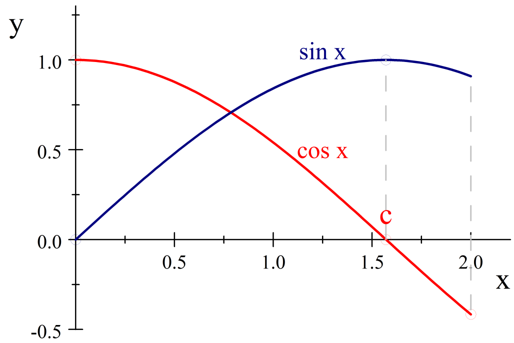
Satz 6.10 *Die Funktionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *haben die folgenden Eigenschaften.*

(a) $\sin x > 0$ *für alle* $x \in (0, 2]$.

(*b*) $\cos x$ *hat in* $(0, 2)$ *genau eine Nullstelle* c.
Darüber hinaus gilt $\cos x > 0$ *für alle* $x \in [0, c)$ *und* $\cos x < 0$ *für alle* $x \in (c, 2]$.

(*c*) $c > \frac{3}{2}$.

Bemerkung. Nach (b) ist c die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$. Es folgt aus (6.21) und (a) dass $\sin c = 1$.



Die Graphen von $\sin x$ und $\cos x$ für $x \in [0, 2]$

Beweis von Satz 6.10. Wir verwenden das Leibniz-Kriterium (Satz 5.12): ist $\{c_k\}$ eine monoton fallende Folge von nicht-negativen reellen Zahlen mit $c_k \to 0$ so gilt für die Summe $S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$ der alternierenden Reihe die Ungleichungen

$$S_{2m-1} \leq S \leq S_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{6.22}$$

wobei $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k$ die Partialsumme ist.

(a) We haben

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + S,$$

wobei

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Zeigen wir, dass diese Reihe die Bedingungen von Leibniz-Kriterium erfüllt. Die Folge $\left\{\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\}$ ist nichtnegative und konvergiert gegen 0 nach dem Trivialkriterium da die Sinusreihe konvergiert. Um die Monotonie zu beweisen, zeigen wir, dass für alle $0 < x \leq 2$ und $k \geq 1$ gilt

$$\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \leq \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$x^2 \leq \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = (2k+2)(2k+3),$$

was gilt da $x^2 \leq 4$ und $(2k+2)(2k+3) \geq 4 \cdot 5 = 20$. Nach (6.22) erhalten wir

$$\sin x = x + S \geq x + S_1 = x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) > 0,$$

da $x^2 \leq 4$.

(b) Da $\cos 0 = 1 > 0$, so reicht es zu beweisen, dass $\cos 2 < 0$, woraus die Existenz einer Nullstelle von $\cos x$ im $(0,2)$ aus dem Zwischenwertsatz (Satz 6.7) folgen wird. Wir haben

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + S,$$

wobei

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Beweisen wir, dass die Folge der Glieder dieser Reihe monoton fallend ist: für alle $0 < x \leq 2$ und $k \geq 1$ gilt

$$\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$x^2 \leq \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = (2k+1)(2k+2),$$

was gilt da $x^2 \leq 4$ und $(2k+1)(2k+2) \geq 3 \cdot 4 = 12$. Nach (6.22) erhalten wir

$$\cos x = 1 + S \leq 1 + S_2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Insbesondere gilt für $x = 2$ dass

$$\cos 2 \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = 1 - 2 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0,$$

was zu beweisen war.

Beweisen wir jetzt die Eindeutigkeit der Nullstelle von $\cos x$ in $(0,2)$. Seien x, y zwei verschiedene Nullstellen von cos in $(0,2)$, und $x > y$. Nach Additionstheoreme von dem Satz 5.11 gilt

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0,$$

da $\cos x = \cos y = 0$. Andererseits, da $0 < x - y < 2$, so gilt nach (a) dass $\sin(x-y) > 0$, was zum Widerspruch führt.

Bezeichnen wir mit c die einzige Nullstelle von cos in $(0,2)$. Dann gilt $\cos x > 0$ für alle $x \in [0,c)$ da im Fall $\cos x \leq 0$ eine weitere Nullstelle von cos in $[0,x]$ liegt. Genau so gilt $\cos x < 0$ für alle $x \in (c, 2]$.

(c) Um zu beweisen, dass $c > \frac{3}{2}$, reicht es zu beweisen, dass $\cos \frac{3}{2} > 0$. Dafür verwenden wir wieder (6.22) für die Kosinusreihe und erhalten

$$\cos x = 1 + S \geq 1 + S_3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

Für $x = \frac{3}{2}$ gilt es somit

$$\cos\frac{3}{2} \geq 1 - \frac{(3/2)^2}{2} + \frac{(3/2)^4}{24} - \frac{(3/2)^6}{720} = \frac{359}{5120} \approx 0,07... > 0,$$

was zu beweisen war. ■

Definition. Definieren wir die π-Zahl (die *Kreiszahl*) mit

$$\boxed{\pi := 2c},$$

wobei c die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ ist, die nach dem Satz 6.10 existiert.

Da nach dem Satz 6.10 gilt $\frac{3}{2} < c < 2$, so folgt es dass $3 < \pi < 4$. Numerische Berechnung ergibt

$$\pi = 3,14159265358979...$$

Es ist bekannt, dass π eine irrationale und sogar transzendente Zahl ist.

Es folgt aus dem Satz 6.10, dass $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und dass $\cos x$ und $\sin x$ positiv im Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sind.

Satz 6.11 *(a) Es gelten die Identitäten*

$$\boxed{e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \qquad e^{\pi i} = -1, \qquad e^{2\pi i} = 1.}$$

(b) Die Funktion e^z ist $2\pi i$ periodisch auf $\mathbb{C}$, d.h.

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{6.23}$$

(c) Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind 2π periodisch auf $\mathbb{C}$, d.h.

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \textit{und} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Beweis. (a) Nach der Eulerformel erhalten wir

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i.$$

Es folgt, dass

$$e^{\pi i} = e^{\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{\pi}{2}i} = i \cdot i = -1,$$

und

$$e^{2\pi i} = e^{\pi i}e^{\pi i} = (-1)^2 = 1. \tag{6.24}$$

(b) Mit Hilfe von (6.24) und der Haupteigenschaft der Exponentialfunktion erhalten wir

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

(c) Mit Hilfe von (5.25) und (6.23) erhalten wir

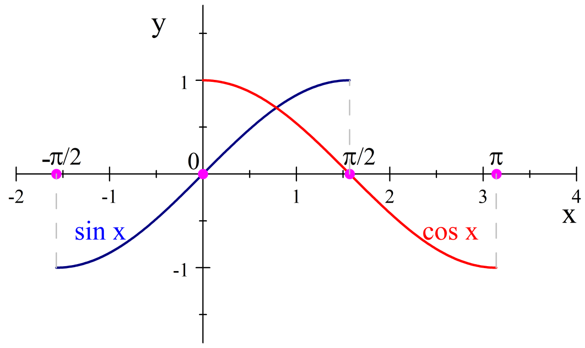
$$\sin(x + 2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix+2\pi i} - e^{-ix-2\pi i}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin x,$$

und das gleiche Argument funktioniert für $\cos x$. ■

6.8 Inverse trigonometrische Funktionen

Hier bestimmen wir die inversen Funktionen zu $\sin x$ und $\cos x$ für reelles x.

Satz 6.12 *(a) Die Funktion* $\sin x$ *ist streng monoton steigend in* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
(b) Die Funktion $\cos x$ *ist streng monoton fallend in* $[0, \pi]$.



Beweis. (a) Wir haben $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin 0 = 0$ und $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt $0 < \sin x < 1$ und für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ gilt $\sin x = -\sin(-x)$ und somit $-1 < \sin x < 0$. So reicht es zu beweisen, dass $\sin x$ streng monoton steigend in $(0, \frac{\pi}{2})$ ist, d.h. für alle $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$x > y \Rightarrow \sin x > \sin y.$$

Setzen wir $t = x - y$ so dass $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Nach dem Additionstheorem von dem Satz 5.11 gilt

$$\begin{aligned}\sin x - \sin y &= \sin x - \sin(x - t) \\ &= \sin x - (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \\ &= \sin x (1 - \cos t) + \cos x \sin t > 0,\end{aligned}$$

da alle Zahlen $\sin x$, $1 - \cos t$, $\cos x$, $\sin t$ positiv sind.

(b) Da $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, so erhalten wir aus dem Additionstheorem dass

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2} = -\cos x.$$

Für $x \in [0, \pi]$ gilt $x - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ so dass die Funktion $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ in $[0, \pi]$ streng monoton steigend ist, und $\cos x$ ist somit streng monoton fallend. ■

Betrachten wir $f(x) = \sin x$ auf $J = [-\pi/2, \pi/2]$. Diese Funktion ist stetig und streng monoton steigend, die Bildmenge ist $I = f(J) = [-1, 1]$. Nach dem Satz 6.9 existiert die inverse Funktion f^{-1} mit dem Definitionsbereich $I = [-1, 1]$ und der Bildmenge $J = [-\pi/2, \pi/2]$.

Definition. Die inverse Funktion von sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$ heißt *Arkussinus* wird mit arcsin bezeichnet.

Die Funktion arcsin ist somit auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert, stetig und monoton steigend, mit der Bildmenge $[-\pi/2, \pi/2]$. Es gilt

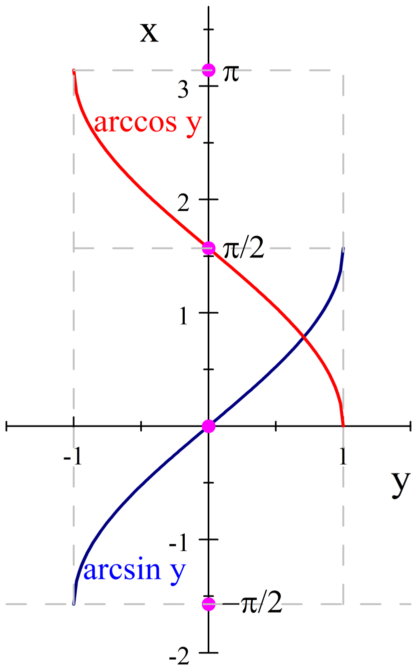
$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \; y \in [-1, 1].$$

Analog betrachten wir die Funktion $f(x) = \cos x$ auf dem Intervall $J = [0, \pi]$. Diese Funktion ist stetig und streng monoton fallend, die Bildmenge ist $I = f(J) = [-1, 1]$. Nach dem Satz 6.9 existiert die inverse Funktion f^{-1} mit dem Definitionsbereich $[-1, 1]$ und der Bildmenge $[0, \pi]$.

Definition. Die inverse Funktion von cos auf $[0, \pi]$ heißt *Arkuscosinus* und wird mit arccos bezeichnet.

Die Funktion arccos ist somit auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert, stetig und monoton fallend, mit der Bildmenge $[0, \pi]$. Es gilt

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y \quad \forall x \in [0, \pi], \ y \in [-1, 1].$$



Funktionen arcsin und arccos

6.9 Extremwertsatz

Sei f eine reellwertige Funktion auf einem Intervall J. Definieren wir das Maximum von f und das Minimum von f wie folgt

$$\max f = \max_J f := \max f(J) \quad \text{und} \quad \min f = \min_J f := \min f(J),$$

vorausgesetzt, dass $\max f(J)$ bzw $\min f(J)$ existiert. Der folgende Satz gibt eine hinreichende Bedingung für Existenz von $\max f$ und $\min f$.

Hauptsatz 6.13 (Extremwertsatz oder Satz vom Minimum und Maximum) *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall J. Dann existieren auf J die beiden Werte $\max f$ und $\min f$.*

Beweis. Sei $J = [a, b]$. Setzen wir

$$c := \sup f = \sup f(J) \in \overline{\mathbb{R}}$$

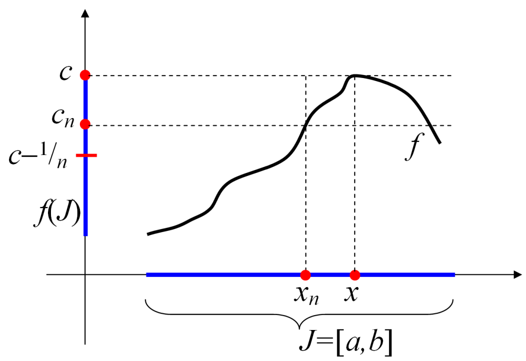
und beweisen dass c ein Maximum von f ist, was äquivalent zu $c \in f(J)$ ist. Zuerst finden wir eine Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen von $f(J)$ mit

$$c_n \to c \text{ für } n \to \infty. \tag{6.25}$$

Im Fall $c \in \mathbb{R}$ wählen wir c_n als ein beliebiges Element von $f(J)$ mit $c_n > c - \frac{1}{n}$ das existiert da $c - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(J)$ ist. Da auch $c_n \leq c$ so gilt (6.25). Im Fall $c = +\infty$ wählen wir c_n als ein beliebiges Element von $f(J)$ mit $c_n > n$ so dass (6.25) auch gilt.

Da $c_n \in f(J)$, so gibt es ein $x_n \in J$ mit $f(x_n) = c_n$, so dass

$$f(x_n) \to c \text{ für } n \to \infty. \tag{6.26}$$



Die Folge $\{x_n\}$ liegt in J und ist deshalb beschränkt. Somit enthält sie nach dem Satz 4.8 (Satz von Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Sei $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Da $a \leq x_n \leq b$, so folgt es, dass auch $a \leq x \leq b$, d.h. $x \in [a, b]$. Da f stetig ist, so erhalten wir, dass

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \text{ für } k \to \infty. \tag{6.27}$$

Das Vergleichen von (6.26) und (6.27) ergibt $c = f(x)$. Somit liegt c in $f(J)$ und deshalb $\max f(J) = c$. Analog beweist man die Existenz des Minimums von $f(J)$. ■

Korollar 6.14 *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall J. Dann ist das Bild $f(J)$ auch ein abgeschlossenes beschränktes Intervall; darüber hinaus gilt*

$$f(J) = [\min f, \max f].$$

Die abgeschlossene und beschränkte Intervalle heißt auch *kompakt*. Man kann kurz sagen: stetiges Bild eines kompakten Intervalls ist auch ein kompaktes Intervall.

Beweis. Nach dem Satz 6.13 existieren

$$\alpha = \min f(J) \quad \text{und} \quad \beta = \max f(J).$$

Nach den Satz 6.8 ist $f(J)$ ein Intervall mit den Grenzen α und β. Da α und β Elemente von $f(J)$ sind, so gilt $f(J) = [\alpha, \beta]$, was zu beweisen war. ■

6.10 * Weitere Eigenschaften von sin und cos

Korollar 6.15 *Die Funktionen* sin *und* cos *haben die folgenden Eigenschaften.*

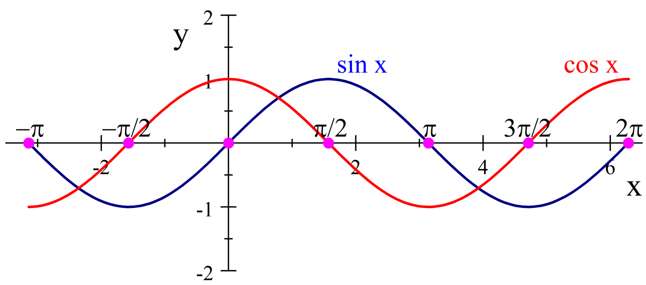
(a) $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *und* $\sin(x+\pi) = -\sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ *und* $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$

(c) *Für* $\sin x$ *in* $[-\pi,\pi]$ *gilt folgendes:* $\sin x > 0$ *in* $(0,\pi)$, $\sin x < 0$ *in* $(-\pi,0)$, *und* $\sin\pi = \sin(-\pi) = \sin 0 = 0$.

(d) *Für* $\cos x$ *in* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ *gilt folgendes:* $\cos x > 0$ *in* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x < 0$ *in* $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, *und* $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

Somit bekommen wir das folgende Bild für die Graphen von $\sin x$ und $\cos x$.Auf diesem Bild werden die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ insbesondere auf den Intervallen $[-\pi,\pi]$ und $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ gezeigt. Da diese Intervalle die Länge 2π haben, so lassen sich die Graphen von $\sin x$ und $\cos x$ weiter auf $\mathbb{R}$ mit Hilfe von der 2π-Periodizität fortsetzen.



Beweis. Wir verwenden die Additionstheoreme von dem Satz 5.11:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned} \tag{6.28}$$

(a) Es folgt aus $e^{\pi i} = -1$, dass $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ und somit aus (6.28)

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \quad \text{und} \quad \cos(x+\pi) = -\cos x.$$

(b) Da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, so erhalten wir aus (6.28) dass

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{und} \quad \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

(c) Für $x \in (0,\frac{\pi}{2}]$ gilt $\sin x > 0$ nach dem Satz 6.10. Für $x \in [\frac{\pi}{2},\pi)$ gilt $\pi - x \in (0,\frac{\pi}{2}]$ und $\sin x = \sin(\pi - x) > 0$. Somit gilt $\sin x > 0$ für alle $x \in (0,\pi)$. Da sin ungerade ist so gilt $\sin x < 0$ für $x \in (-\pi,0)$.

(d) Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ gilt $x+\frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$ und somit $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Für $x \in \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ gilt $x - \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$ und $\cos x = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) < 0$. ■

In den nächsten Beispielen berechnen wir die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ für einige x.

Beispiel. Berechnen wir $\sin\frac{\pi}{4}$. Es gilt

$$\sin\tfrac{\pi}{4} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\tfrac{\pi}{4},$$

sodass $x = \sin\frac{\pi}{4}$ die Gleichung $x^2 + x^2 = 1$ erfüllt. Es folgt, dass $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Das Vorzeichen muss $+$ sein da $\sin\frac{\pi}{4} > 0$. Somit erhalten wir $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Beispiel. Berechnen wir $\sin\frac{\pi}{6}$. Wir haben

$$\sin\tfrac{\pi}{6} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\tfrac{\pi}{3} = \cos 2\tfrac{\pi}{6} = \cos^2\tfrac{\pi}{6} - \sin^2\tfrac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\tfrac{\pi}{6}.$$

Somit erfüllt $x = \sin\frac{\pi}{6}$ die Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$, woraus folgt $x = -1$ oder $x = \frac{1}{2}$. Da $\sin\frac{\pi}{6} > 0$, so erhalten wir $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ und somit auch

$$\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Es folgt

$$\cos\tfrac{\pi}{3} = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\tfrac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\tfrac{\pi}{3} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{3}\right) = \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

$e^{0i} = e^{2\pi i} = 1$

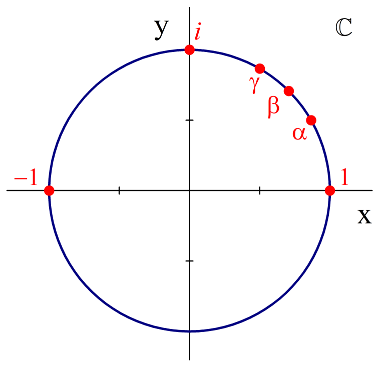
$e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i =: \alpha$

$e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i =: \beta$

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i =: \gamma$

$e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

$e^{\pi i} = -1$



6.11 * Trigonometrische Form komplexer Zahlen

Satz 6.16 *Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich in der folgenden Form eindeutig darstellen:*

$$z = re^{i\theta} = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \tag{6.29}$$

wobei $r \in (0, +\infty)$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Wir werden im Beweis sehen, dass $r = |z|$, d.h. r der Betrag von z ist. Die Zahl r heißt auch der *Polarradius* von z. Die Zahl θ heißt der *Polarwinkel* von z; auch heißt sie das *Argument* von z und wird $\arg z$ bezeichnet. Zusammen r und θ heißen die *Polarkoordinaten* for z.

Der Ausdruck $r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ heißt die *trigonometrische* Form von z, im Gegensatz zur *algebraischen* Form $z = x + yi$. Der Ausdruck $re^{i\theta}$ heißt die *exponentielle Form* (oder *Polarform*) von z.

Obwohl θ im Intervall $(-\pi, \pi]$ eindeutig bestimmt ist, häufig erlaubt man θ (und $\arg z$) beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen. Da $\cos\theta$ und $\sin\theta$ 2π-periodisch sind, so lässt sich θ in (6.29) durch $\theta + 2\pi k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ersetzen. So, für $\theta \in \mathbb{R}$ fehlt die Eindeutigkeit der Darstellung (6.29), aber trotzdem ist θ *bis zur additiven Konstante* $2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ bestimmt.

Beweis. Sei $z = x + yi$. Wir betrachten die Identität (6.29) als eine Gleichung mit unbekannten r und θ. Aus (6.29) erhalten wir $|z| = |r| \left|e^{i\theta}\right| = r$ so dass

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Vergleichen von (6.29) mit der algebraischen Darstellung $z = x + iy$ ergibt uns zwei Gleichungen für θ:

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad \text{und} \quad y = r\sin\theta}, \tag{6.30}$$

d.h.

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}. \tag{6.31}$$

Beweisen wir, dass die Gleichungen (6.31) eine eindeutige Lösung $\theta \in (-\pi, \pi]$ haben.

Fall 1: sei $y \geq 0$. Dann gilt $\sin\theta \geq 0$ und somit $\theta \in [0, \pi]$. Die Gleichung $\cos\theta = \frac{x}{r}$ im Bereich $\theta \in [0, \pi]$ ist äquivalent zu $\theta = \arccos\frac{x}{r}$ (bemerken wir, dass $\frac{x}{r} \in [-1, 1]$ so dass $\frac{x}{r}$ im Definitionsbereich von arccos liegt). Insbesondere ist θ eindeutig bestimmt. Für $\theta = \arccos\frac{x}{r}$ gilt offensichtlich $\cos\theta = \frac{x}{r}$ und

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{y}{r},$$

da $\sin\theta$ und y nichtnegativ sind. Somit erfüllt $\theta = \arccos\frac{x}{r}$ die beiden Gleichungen (6.31).

Fall 2: sei $y < 0$. Die Gleichungen (6.31) sind äquivalent zu

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} \quad \text{und} \quad \sin(-\theta) = -\frac{y}{r} > 0,$$

woraus folgt $-\theta \in (0, \pi)$ und somit $\theta = -\arccos\frac{x}{r}$. Dieses θ erfüllt die beiden Gleichungen in (6.31) wie im Fall 1. ■

Aus dem Beweis erhalten wir die folgenden Formeln für die Polarkoordinaten

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{6.32}$$

und

$$\boxed{\theta = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r}, & y \geq 0, \\ -\arccos\frac{x}{r}, & y < 0. \end{cases}} \tag{6.33}$$

Umgekehrt, aus den Polarkoordinaten r, θ erhält man die *Kartesischen* Koordinaten x, y mit Hilfe von (6.30). Da sind einige Beispiele dafür.

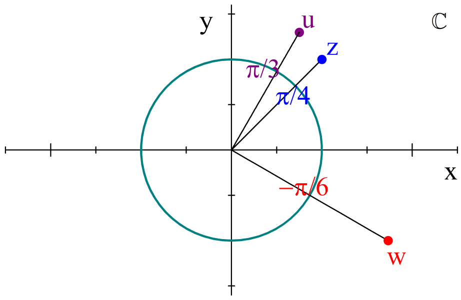
Beispiel. Für $z = 1 + i$ haben wir nach (6.32) und (6.33) $r = |z| = \sqrt{2}$ und

$$\theta = \arg z = \arccos\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\pi}{4}$$

so dass $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Für $w = \sqrt{3} - i$ haben wir $r = |w| = 2$ und

$$\theta = \arg w = -\arccos\tfrac{\sqrt{3}}{2} = -\tfrac{\pi}{6}$$

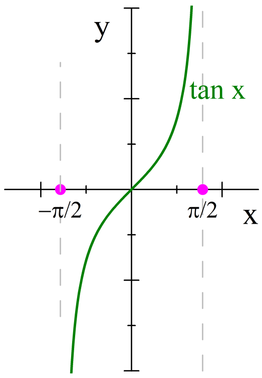
so dass $w = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$.



Für $u = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ erhalten wir nach (6.30) $x = \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ und $y = \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, so dass $u = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

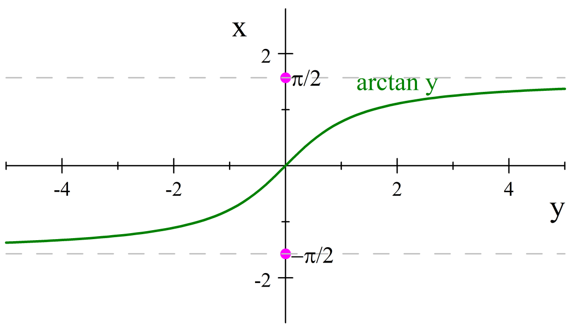
6.12 * Arkustangens

Man kann beweisen, dass die Funktion $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton steigend ist und die Bildmenge von tan gleich $(-\infty, +\infty)$ ist. Somit existiert die inverse Funktion von $\tan x$.



Definition. Die inverse Funktion von tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$ heißt *Arkustangens* und wird mit arctan bezeichnet.

Die Funktion arctan ist somit auf dem Intervall $(-\infty, +\infty)$ definiert, stetig und monoton steigend. Die Bildmenge von arctan ist $(-\pi/2, \pi/2)$.



6.13 * Numerische Berechnung von π

Man kann die erste positive Nullstelle c von $\cos x$ (und somit die Zahl π) numerisch mit Hilfe von einem Taschenrechner mit Funktion cos berechnen. Wir wissen, dass $c \in (a, b)$ wobei $a = 1,5$ und $b = 2$. Hier führen wir sechs Schritte des Verfahrens im Beweis des Satzes 6.7 durch und erhalten die folgende Intervallschachtelung.

k	a_k	$\frac{a_k+b_k}{2}$	b_k
1	$1,5$ $\cos 1,5 \approx 0,07 > 0$	$1,75$ $\cos 1,75 \approx -0.178 < 0$	2 $\cos 2 \approx -0,41 < 0$
2	$1,5$ $\cos 1,5 \approx 0,07 > 0$	$1,625$ $\cos 1,625 \approx -0,054 < 0$	$1,75$ $\cos 1,75 \approx -0.178 < 0$
3	$1,5$ $\cos 1,5 \approx 0,07 > 0$	$1,562\,5$ $\cos 1,562\,5 \approx 0,0082 > 0$	$1,625$ $\cos 1,625 \approx -0,054 < 0$
4	$1,562\,5$ $\cos 1,562\,5 \approx 0,0082 > 0$	$1,59375$ $\cos 1,593\,75 \approx -0.0229 < 0$	$1,625$ $\cos 1,625 \approx -0,054 < 0$
5	$1,562\,5$ $\cos 1,562\,5 \approx 0,0082 > 0$	$1,578\,125$ $\cos 1,578\,125 \approx -0.0073 < 0$	$1,59375$ $\cos 1,593\,75 \approx -0.0229 < 0$
6	$1,562\,5$ $\cos 1,562\,5 \approx 0,0082 > 0$	$1,570\,312\,5$ $\cos 1,578\,125 \approx 0.00048 > 0$	$1,578\,125$ $\cos 1,578\,125 \approx -0.0073 < 0$

Aus dem letzten Schritt folgt es, dass c zwischen $1,570\,312\,5$ und $1,578\,125$ liegt. Somit gelten $c \approx 1,57$ und $\pi = 2c \approx 3,14$.

Eine bessere Methode für Berechnung von π basiert auf der Identität

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$$

und auf einer Reihendarstellung von arctan:

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

die für alle $|x| < 1$ gilt. Zum Beispiel, für die Partialsumme

$$S_7(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13}$$

erhält man

$$\pi \approx 16 S_7(\frac{1}{5}) - 4 S_7(\frac{1}{239}) \approx 3,141\,592\,653\ldots$$

mit 9 richtigen Nachkommastellen.

Moderne Rechenverfahren erlauben es, die Zahl π mit Billionen von Nachkommastellen zu berechnen.

Chapter 7

Differentialrechnung

29.01.2025 **Vorlesung 27**

7.1 Ableitung

Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall J.

Definition. Die *Ableitung* der Funktion f an einer Stelle $x \in J$ ist der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Ist der Grenzwert endlich, so heißt f *differenzierbar* in $x \in J$ (sonst ist f in x nicht differenzierbar). Ist f an allen Stellen $x \in J$ differenzierbar, so sagt man, dass f im Intervall J differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Ableitung f' auch eine Funktion auf J.

Der Ausdruck $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ heißt *Differenzenquotient*. Die Differenz $y - x$ heißt das *Argumentinkrement* und wird auch als Δx bezeichnet. Die Differenz $f(y) - f(x)$ heißt das *Funktionsinkrement* und wird auch als Δf bezeichnet.

Einsetzen $h = y - x$ ergibt eine äquivalente Definition der Ableitung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{7.1}$$

Eine von Aufgaben der Differentialrechnung ist Bestimmung von Ableitungen.

Beispiel. Berechnen wir die Ableitungen der folgenden Funktionen.

1. Für die lineare Funktion $f(x) = \alpha x + \beta$ gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\alpha(x+h) + \beta - (\alpha x + \beta)}{h} = \frac{\alpha h}{h} = \alpha$$

woraus folgt $f'(x) = \alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit gilt

$$(\alpha x + \beta)' = \alpha.$$

Im Fall $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ gilt

$$(x)' = 1,$$

und im Fall $\alpha = 0$ d.h. $f(x) = \text{const}$, gilt

$$(\text{const})' = 0.$$

2. Für $f(x) = x^2$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x,$$

daher

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

3. Für $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)\,x} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)\,x} = -\frac{1}{x^2},$$

so dass

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{7.2}$$

Satz 7.1 *Es gelten die folgenden Identitäten: für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}, \tag{7.3}$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x},$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x},$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Beweis. Für $f(x) = x^n$ erhalten wir mit Hilfe von dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k - x^n\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(nx^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}h^k\right) \\ &= nx^{n-1}, \end{aligned}$$

da $\frac{h^k}{h} = h^{k-1} \to 0$ für alle $k \geq 2$.

Insbesondere für $n = 1, 2$ erhalten wir $(x)' = 1$ und $\left(x^2\right)' = 2x$ wie wir es schon gesehen haben. Später beweisen wir, dass die Identität (7.3) auch für alle negativen ganzen Zahlen n gilt. Zum Beispiel, für $n = -1$ erhalten wir $\left(x^{-1}\right)' = -x^{-2}$ was mit (7.2) übereinstimmt.

Sei $f(x) = e^x$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

da nach Aufgabe 102 gilt[1]

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{7.4}$$

Für $f(x) = \sin x$ haben wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 103 gelten die Identitäten[2]

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0, \tag{7.5}$$

woraus folgt $(\sin x)' = \cos x$.

Analog erhalten wir für $f(x) = \cos x$, dass

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= -\sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\sin x, \end{aligned}$$

so dass $(\cos x)' = -\sin x$. ■

Satz 7.2 *Ist die Funktion f differenzierbar an x, so ist f stetig an x.*

---

[1] In der Tat, (7.4) lässt sich wie folgt beweisen. Mit Hilfe von Exponentialreihe erhalten wir für $|h| < 1$

$$\left|\frac{e^h - 1}{h} - 1\right| = \left|\frac{e^h - 1 - h}{h}\right| = \left|\frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots\right| \le |h| + |h|^2 + \dots = \frac{|h|}{1 - |h|} \to 0 \ \text{ für } h \to 0,$$

woraus (7.4) folgt.

[2] Die Identitäten (7.5) lassen sich wie folgt beweisen. Mit Hilfe von der Sinusreihe haben wir für $|h| < 1$

$$\left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| = \left|-\frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} - \frac{h^6}{7!} + \dots\right| \le |h|^2 + |h|^4 + |h|^6 + \dots = \frac{|h|^2}{1 - |h|^2},$$

woraus die erste Identität in (7.5) folgt. Die Kosinusreihe ergibt analog

$$\left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| = \left|-\frac{h}{2!} + \frac{h^3}{4!} - \frac{h^5}{6!} + \dots\right| \le |h| + |h|^3 + |h|^5 + \dots = \frac{|h|}{1 - |h|^2}$$

woraus die zweite Identität in (7.5) folgt.

Beweis. Wir haben

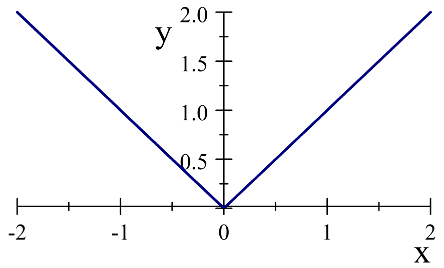
$$\lim_{y\to x}\left(f\left(y\right)-f\left(x\right)\right)=\lim_{y\to x}\frac{f\left(y\right)-f\left(x\right)}{y-x}\left(y-x\right)=f'\left(x\right)\lim_{y\to x}\left(y-x\right)=0,$$

woraus folgt

$$\lim_{y\to x}f\left(y\right)=f\left(x\right).$$

Somit ist f stetig an x. ■

Beispiel. Allerdings reicht die Stetigkeit für die Differenzierbarkeit nicht. Die Funktion $f\left(x\right)=\left|x\right|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Aufgabe 104) aber an der Stelle $x=0$ ist sie nicht differenzierbar.



Die Funktion $f\left(x\right)=\left|x\right|$ ist in $x=0$ nicht differenzierbar.

In der Tat, für jedes $y>0$ haben wir $\left|y\right|=y$ und somit

$$\frac{f\left(y\right)-f\left(0\right)}{y-0}=1,$$

während für $y<0$ gilt $\left|y\right|=-y$ und somit

$$\frac{f\left(y\right)-f\left(0\right)}{y-0}=-1.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{y\to 0}\frac{f\left(y\right)-f\left(0\right)}{y-0}$$

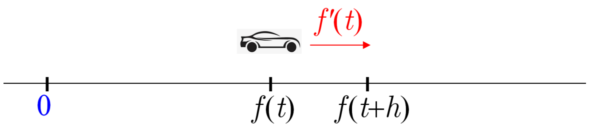
nicht existiert und f an $x=0$ nicht differenzierbar ist.

7.2 Physikalische und geometrische Bedeutung der Ableitung

Sei $f\left(t\right)$ die Position (=Koordinate) eines bewegenden Körpers an der Zahlengerade am Zeitpunkt t. Dann gilt für den Differenzenquotient

$$\begin{aligned}\frac{f\left(t+h\right)-f\left(t\right)}{h}&=\frac{\text{zurückgelegte Strecke}}{\text{Zeitintervall}}\\&=\text{durchschnittliche Geschwindigkeit in }\left[t,t+h\right]\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ erhalten wir, dass die Ableitung $f'(t)$ gleich *unmittelbare* Geschwindigkeit vom Körper am Zeitpunkt t ist. Zum Beispiel, im Auto wird $f'(t)$ am Tachometer an jedem Zeitpunkt t angezeigt.



Das Gleiche gilt für beliebige zeitabhängige Variable $f(t)$: die Ableitung $f'(t)$ ist immer die unmittelbare Geschwindigkeit von Änderung der Variablen.

Eine andere Bedeutung der Ableitung gibt es in Geometrie. Betrachten wir in $\mathbb{R}^2$ den Graph G einer linearen Funktion

$$l(x) = \alpha x + \beta,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Der Graph G linearer Funktion heißt *Gerade*, und die Zahl α heißt die *Steigung* der Gerade. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt offensichtlich die Identität

$$l(x) = \alpha (x - a) + l(a).$$

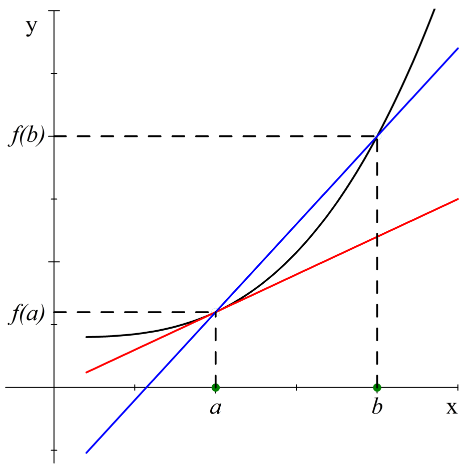
Insbesondere, für beliebige $a \neq b$ lässt sich die Steigung wie folgt bestimmen:

$$\alpha = \frac{l(b) - l(a)}{b - a}.$$

Betrachten wir jetzt den Graph einer Funktion $y = f(x)$ auf einem Intervall. Die Gerade durch zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ auf dem Graph von f heißt die *Sekante*. Da $l(a) = f(a)$ und $l(b) = f(b)$, so ist die Gleichung der Sekante wie folgt

$$l(x) = \alpha (x - a) + f(a),$$

mit der Steigung $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Für $b \to a$ erhalten wir $\alpha \to f'(a)$, vorausgesetzt dass f an a differenzierbar ist.



Funktion f (schwarz), Sekante (blau) und Tangente (rot)

Definition. Die Gerade mit der Gleichung

$$\boxed{l(x) = f'(a)(x-a) + f(a)} \tag{7.6}$$

heißt die *Tangente* zum Graph von $f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$.

Die Steigung der Tangente in $(a, f(a))$ stimmt somit mit der Ableitung $f'(a)$ überein, und die Sekante konvergiert gegen die Tangente für $b \to a$.

Beispiel. Für $f(x) = x^3$ erhalten wir aus (7.6) die Gleichung der Tangente im Punkt (a, a^3):

$$l(x) = 3a^2(x-a) + a^3.$$

Zum Beispiel, die Gleichung der Tangente im Punkt $(1, 1)$ (entspricht zu $a = 1$) ist $y = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$.

7.3 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 7.3 *Seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, die differenzierbar in $x \in J$ sind. Dann sind die Funktionen $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ auch differenzierbar in x (im Fall von f/g vorausgesetzt $g \neq 0$) und die folgenden Identitäten gelten at der Stelle x:*

(a) Summenregel:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'.} \tag{7.7}$$

(b) Produktregel oder Leibnizregel:

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'.} \tag{7.8}$$

(c) Quotientenregel:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.} \tag{7.9}$$

Sind f und g in J differenzierbar so gelten diese Identitäten auch in J.

Es folgt aus (7.8) mit $g(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ dass

$$\boxed{(cf)' = cf'},$$

und aus (7.9) mit $f(x) \equiv 1$ dass

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}} \tag{7.10}$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion $x^2 \sin x$. Wir haben

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Nach der Quotientenregel haben wir

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

d.h.

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} = 1 + \tan^2 x.$$

Analog beweist man, dass für

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

gilt

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

7.4 Kettenregel

Satz 7.4 (Kettenregel) *Seien f eine Funktion auf einem Intervall A und g eine Funktion auf einem Intervall B, so dass die Verkettung $g \circ f$ definiert ist (d.h. $f(A) \subset B$). Sei f differenzierbar in einem $x \in A$ und g differenzierbar in $y = f(x) \in B$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x und es gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(y) f'(x)} = g'(f(x)) f'(x). \tag{7.11}$$

Man wenden die Kettenregel (7.11) an um die Ableitungen von komplizierteren Funktionen zu berechnen. Man stellt eine gegebene Funktion $F(x)$ in der Form einer Verkettung $F(x) = g(f(x))$ dar, d.h.

$$F(x) = g(y) \text{ mit } y = f(x),$$

was sich als eine Substitution $y = g(x)$ betrachten lässt. Dann gilt

$$F'(x) = g'(y) f'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion e^{cx} wobei $c \in \mathbb{R}$. Wir diese Funktion als eine Verkettung dar:

$$e^{cx} = e^y \quad \text{mit} \quad y = cx.$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$(e^{cx})' = (e^y)' (cx)' = e^y c = ce^{cx}.$$

31.01.2025 Vorlesung 28

Insbesondere, für $a > 0$, haben wir $a^x = e^{x \ln a}$ und somit

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitungen von den Hyperbelfunktionen. Wir haben

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x,$$

und analog gilt

$$(\sinh x)' = \cosh x.$$

Mit Hilfe von den Quotientenregel erhält man

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Die Kettenregel lässt sich für Komposition von mehreren Funktionen verallgemeinern wie folgt. Sei

$$F = h \circ g \circ f,$$

d.h.

$$F(x) = h(z) \text{ mit } z = g(y) \text{ und } y = f(x).$$

Dann gilt

$$\boxed{F'(x) = h'(z)\, g'(y)\, f'(x)} = h'(g(f(x)))\, g'(f(x))\, f'(x), \tag{7.12}$$

da $F = h \circ (g \circ f)$, d.h.

$$F(x) = h(z) \quad \text{mit } z = g \circ f,$$

woraus folgt

$$F'(x) = h'(z)\,(g \circ f)'(x) = h'(z)\, g'(y)\, f'(x).$$

Ähnliche Regel gilt für Verkettung von mehreren Funktionen.

Beispiel. Die Funktion $e^{\sin x^2}$ist eine Verkettung dreier Funktionen:

$$e^{\sin x^2} = e^z \text{ mit } z = \sin y \text{ und } y = x^2.$$

Somit erhalten wir

$$e^{\sin x^2} = (e^z)'(\sin y)'\left(x^2\right)' = e^z(\cos y)(2x) = 2xe^{\sin x^2}\cos x^2.$$

7.5 Ableitung der inversen Funktion

Sei f eine stetige streng monotone steigende (bzw fallende) Funktion auf einem Intervall J. Der Satz 6.9 besagt folgendes: die Bildmenge $I = f(J)$ ein Intervall und die inverse Funktion $f^{-1} : I \to J$ existiert, ist streng monoton steigend (bzw fallend) und stetig.

Satz 7.5 (Ableitung der inversen Funktion) *Sei f eine stetige streng monotone Funktion auf einem Intervall J, so dass die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$ definiert ist. Nehmen wir an, dass f differenzierbar in einem $x \in J$ ist und dass $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $y = f(x)$ und es gilt*

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}. \tag{7.13}$$

Die Identität (7.13) lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

und

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

da $y = f(x)$ und somit $x = f^{-1}(y)$.

Bemerkung. Die Tangente zum Graph $y = f(x)$ der Funktion f am Punkt (a, b) hat die Gleichung

$$y - b = \alpha (x - a),$$

wobei $\alpha = f'(a)$ die Steigung ist. Für die inverse Funktion werden die Rollen von x und y vertauscht, so dass der Graph von f^{-1} die Gleichung $x = f^{-1}(y)$ hat und die Gleichung der Tangente von f^{-1} ist

$$x - a = \frac{1}{\alpha}(y - b),$$

vorausgesetzt $\alpha \neq 0$. Somit ist die Steigung der Tangente gleich $\frac{1}{\alpha}$, was die Identität (7.13) erklärt.

Beispiel. Sei $f(x) = e^x$ auf $J = \mathbb{R}$. Die inverse Funktion von e^x ist $\ln y$ auf $I = (0, +\infty)$. Nach (7.13) erhalten wir für $y = e^x$

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y},$$

d.h.

$$\boxed{(\ln y)' = \frac{1}{y}}.$$

Ersetzen y durch x ergibt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

7.6 Weitere Beispiele von Berechnung der Ableitung

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Potenzfunktion x^a im Definitionsbereich $x \in (0, +\infty)$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Wir haben nach Definition

$$x^a = e^{a \ln x} = e^{ay} \text{ mit } y = \ln x.$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$(x^a)' = (e^{ay})' (\ln x)' = a e^{ay} \frac{1}{x} = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1},$$

d.h.

$$\boxed{(x^a)' = a x^{a-1}.}$$

Für $a \in \mathbb{N}$ haben wir diese Identität schon früher bewiesen. Für $a = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

und für $\alpha = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

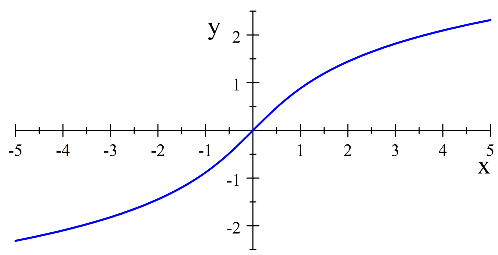
Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung von $\sqrt{x^2+1}$. Wir haben

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y} \text{ mit } y = x^2 + 1,$$

woraus folgt

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left(\sqrt{y}\right)' \left(x^2+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ ("der lange Logarithmus").



Funktion $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Wir haben

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln y \quad \text{mit } y = x + \sqrt{x^2+1}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' &= (\ln y)'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{1}{y}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\end{aligned}$$

d.h.

$$\boxed{\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}.$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$. Da

$$x^x = e^{x\ln x} = e^y \text{ mit } y = x\ln x,$$

so erhalten wir

$$(x^x)' = (e^y)'(x\ln x)' = e^y\left((x)'\ln x + x(\ln x)'\right) = e^{x\ln x}(\ln x+1) = x^x(\ln x+1).$$

Beispiel. Betrachten wir $f(x) = \sin x$ auf $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ so dass $f^{-1}(y) = \arcsin y$ mit $y \in [-1,1]$. Es folgt, dass für $y = \sin x$ gilt

$$(\arcsin y)' = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Da auf $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ gilt $\cos x > 0$ (insbesondere $\cos x \neq 0$) und

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2},$$

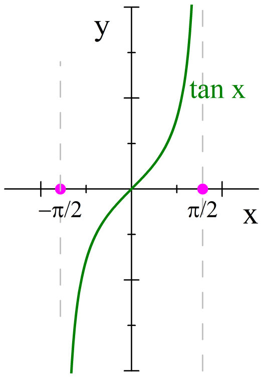
so folgt es, dass für $y \in (-1,1)$

$$\boxed{(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

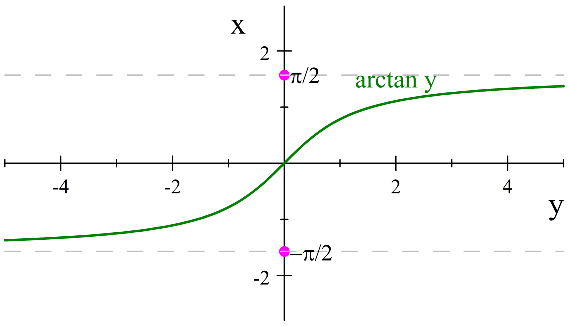
Analog beweist man, dass

$$\boxed{(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ im Definitionsbereich $J = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ wo $\cos x \neq 0$ und somit $\tan x$ wohldefiniert ist. Da $\sin x$ und $\cos x$ positiv in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ sind, $\sin x$ streng monoton steigend in diesem Intervall, und $\cos x$ streng monoton fallend ist, so ist $\tan x$ positive und streng monoton steigend in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Da $\tan x$ offensichtlich ungerade ist, so ist $\tan x$ streng monoton steigend auf in J.



Somit existiert die inverse Funktion von $\tan x$, die *Arkustangens* heißt und mit arctan bezeichnet wird. Da $\cos x \to 0$ und $\sin x \to 1$ für $x \to \frac{\pi}{2}$ so erhalten wir dass $\sup \tan = +\infty$ und analog $\inf \tan = -\infty$. Somit hat arctan den Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$ und die Bildmenge $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Wir haben oberhalb gesehen, dass

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$$

Es folgt aus (7.13) dass

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

d.h.

$$\boxed{(\arctan y)' = \frac{1}{1 + y^2}.}$$

Beispiel. Die Funktion $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ da die beiden Funktion e^x und $-e^{-x}$ streng monoton steigend ist. Da sinh stetig ist und

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty,$$

so ist die Bildmenge von sinh gleich $\mathbb{R}$. Somit existiert die inverse Funktion $\sinh^{-1} y$ mit dem Definitionsbereich $y \in \mathbb{R}$ und Bildmenge $\mathbb{R}$. Da

$$(\sinh x)' = \cosh x > 0,$$

so erhält man nach dem Satz 7.5 dass

$$\left(\sinh^{-1} y\right)' = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

Wir haben oberhalb gesehen, dass auch

$$\left(\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Die Übereinstimmung von den Ableitungen von $\sinh^{-1} y$ und $\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ ist kein Zufall, da diese zwei Funktionen identisch gleich sind.

Beispiel. Die Funktion $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist $[0, +\infty)$ streng monoton steigend da

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und jedes Glied x^{2k} streng monotone steigend auf $[0, +\infty)$ ist. Da $\cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so liegt die Bildmenge von cosh im Intervall $[1, +\infty)$. Da $\cosh 0 = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh x = +\infty$, so erhalten wir das die Bildmenge von cosh gleich $[1, +\infty)$ ist.

Somit ist die inverse Funktion $\cosh^{-1}$ auf $[1, +\infty)$ definiert, und ihre Bildmenge ist $[0, +\infty)$. Da für $x > 0$ gilt

$$(\cosh x)' = \sinh x > 0$$

so erhält man, dass für $y > 1$

$$\left(\cosh^{-1} y\right)' = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Man kann zeigen dass

$$\cosh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Beispiel. (*Logarithmische Ableitung*) Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J und sei $f(x) > 0$ für alle $x \in J$. Dann ist auch die Funktion $\ln f(x)$ wohldefiniert, und mit Hilfe von der Kettenregel und der Substitution $y = f(x)$ erhalten wir

$$(\ln f(x))' = (\ln y)' f'(x) = \frac{1}{y} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

woraus folgt

$$\boxed{f'(x) = f(x)(\ln f(x))'}. \tag{7.14}$$

Die Funktion $(\ln f(x))'$ heißt die *logarithmische Ableitung* der Funktion f. Häufig ist es einfacher $(\ln f)'$ zu bestimmen als f'. Danach bestimmt man auch f' mit Hilfe von (7.14).

Zum Beispiel, betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \tag{7.15}$$

für $x \in (0, +\infty)$. Die Funktion (7.15) ist eine Approximation von $n!$: es ist bekannt dass $n! \approx f(n)$ für große n und sogar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{f(n)} = 1.$$

Diese Identität heißt die *Stirling-Formel.* Zum Beispiel, für $n = 20$ gilt $n! \approx 2\,432\ \times 10^{15}$ und $f(n) \approx 2\,423 \times 10^{15}$ so dass

$$\frac{n!}{f(n)} \approx 1,004\,.$$

Bestimmen wir die Ableitung von f mit Hilfe von (7.14). Wir haben

$$\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln (2\pi x) + x \ln \frac{x}{e} = \frac{1}{2} \ln (2\pi) + \frac{1}{2} \ln x + x \ln x - x.$$

und somit

$$\begin{aligned}
(\ln f(x))' &= \frac{1}{2} (\ln x)' + (x \ln x)' - (x)' \\
&= \frac{1}{2x} + \big((x)' \ln x + x (\ln x)'\big) - 1 \\
&= \frac{1}{2x} + \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) - 1 = \frac{1}{2x} + \ln x,
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{2x} + \ln x\right) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(\frac{1}{2x} + \ln x\right).$$