Probeklausur "Analysis I", WS 2024/25

Die Dauer der Klausur ist 120 Minuten.

Benutzung von Notizen, Büchern, Taschenrechnern, Handys usw. ist nicht erlaubt.

Jede Aufgabe beträgt 25 Punkte.

Die Note "1" $\Leftrightarrow$ mindestens 90 – 95 Punkte. Die Note "4" (Bestanden) $\Leftrightarrow$ ca. 50 Punkte.

Aufgabe 1

- (a) Geben Sie die Definition der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen an.
- (b) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}$ induktiv ist. Formulieren und beweisen Sie das Induktionssprinzip.
- (c) Beweisen Sie per Induktion Bernoullische Ungleichung:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

- (a) Definieren Sie die Begriffe der Konjugation und des Betrages von komplexen Zahlen.
- (b) Formulieren und beweisen Sie die Eigenschaften der Konjugation und des Betrages.
- (c) Führen Sie die folgenden Operationen mit komplexen Zahlen durch:

$$(i) \quad \frac{25}{3+4i} + \frac{4+2i}{3-i} \qquad (ii) \quad \frac{(3+i)^3}{|1+i|^2} - (\overline{2+i})^2$$

Aufgabe 3

- (a) Definieren Sie die Begriffe einer Folge und des Grenzwertes einer Folge.
- (b) Formulieren und beweisen Sie die Rechenregeln für Grenzwerte der Folgen.
- (c) Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}} \qquad (ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Aufgabe 4

- (a) Formulieren Sie das Vollständigkeitsaxiom.
- (b) Formulieren und beweisen Sie das Monotoniekriterium für Konvergenz einer Folge.
- (c) Definieren wir die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ per Induktion wie folgt:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend und beschränkt ist. Beschließen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Aufgabe 5

- (a) Definieren Sie die Begriffe einer Reihe und der Summe der Reihe.
- (b) Formulieren und beweisen Sie das Quotientenkriterium für Konvergenz einer Reihe.
- (c) Mit Hilfe von dem Quotientenkriterium bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergiert sind.

$$(i) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \qquad (ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}.$$