Analysis I

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

WS 2024-25

Zusammenfassung: Definitionen, Sätze, Lemmas, Korollars, Beispiele (ohne Beweise)

Contents

Chapter 1

Mengen und reelle Zahlen

1.1 Mengen und Operationen auf den Mengen

Elemente von Mengen. Eine *Menge* ist eine Sammlung von anderen Objekten, die selbst als ein Objekt betrachtet wird. Somit besteht jede Menge M aus bestimmten Objekten, die *die Elemente* von M heißen.
Ist x ein Element von M, so schreibt man

$$x \in M$$

("x ist Element von M", "x gehört zu M", "x ist in M", "x liegt in M", "M enthält x").
Ist x kein Element von M, so schreibt man

$$x \notin M.$$

Es gibt eine Menge, die keine Elemente besitzt. Diese Menge heißt die *leere Menge* und wird mit dem Zeichen $\emptyset$ bezeichnet (eine durchgestrichene Null)

Teilmengen und Inklusion. **Definition.** Zwei Mengen A und B heißen gleich oder identisch wenn

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B \ ,$$

wobei der Doppelpfeil $\Leftrightarrow$ bedeutet "äquivalent", "genau dann, wenn". In diesem Fall schreibt man $A = B$.

Definition. Menge A heißt *Teilmenge* von Menge B und wenn

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

wobei das Zeichen $\Rightarrow$ (der Pfeil) bedeutet: "impliziert", "ergibt", "aus ... folgt ...". In diesem Fall schreibt man

$$A \subset B$$

("A ist Teilmenge von B"). Die Beziehung $\subset$ zwischen zwei Mengen heißt *Inklusion.* Eine äquivalente Notation: $A \subseteq B$.

Behauptung. Die Inklusion von Mengen ist transitiv, d.h.

$$A \subset B \ \text{ und } \ B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C.$$

Durchschnitt und Vereinigung. **Definition.** Der *Durchschnitt* zweier Mengen A und B ist die folgende Menge

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

wobei das Zeichen $\wedge$ (der Keil) bedeutet "und".

Definition. Die *Vereinigung* zweier Mengen A und B ist die folgende Menge:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

wobei das Zeichen $\vee$ bedeutet "oder".

Beispiel. Es folgt aus den Definitionen, dass

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

und

$$A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Gelten die Inklusionen $A' \subset A$ und $B' \subset B$, so erhalten wir

$$A' \cap B' \subset A \cap B$$

und

$$A' \cup B' \subset A \cup B.$$

Auch gelten die Identitäten

$$A \cap A = A = A \cup A$$

und

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \emptyset = A.$$

Die Gesetze von den Operationen $\cap, \cup$.

Satz 1.1 Die Operationen $\cap$ und $\cup$ sind kommutativ und assoziativ, d.h. die folgenden Identitäten gelten für alle Mengen A, B.

(a) *(Kommutativgesetze)*

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{und} \quad A \cup B = B \cup A$$

(b) *(Assoziativgesetze)*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{und} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Satz 1.2 *(Distributivgesetze)* Es gelten die Identitäten

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1.1}$$

und

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.2}$$

Subtraktion von Mengen. **Definition.** Die Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A, B ist definiert wie folgt:

$$A \setminus B := \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\} .$$

Potenzmenge. **Definition.** Die Menge von allen Teilmengen der Menge X heißt die *Potenzmenge* von X und ist mit $\mathcal{P}(X)$ (oder 2^X) bezeichnet. d.h.

$$A \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X.$$

Beispiel. Für $X = \emptyset$ gilt $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Für $X = \{a\}$ gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}\} .$$

Für $X = \{a, b\}$ gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} .$$

Für $X = \{a, b, c\}$ gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} .$$

Komplement. **Definition.** Für jede Menge $A \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir das *Komplement* A^c durch

$$A^c = X \setminus A.$$

Satz 1.3 Die folgenden Identitäten gelten für die beliebigen Mengen $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

$$A \setminus B = A \cap B^c \tag{1.3}$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \tag{1.4}$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c. \tag{1.5}$$

Symmetrische Differenz. **Definition.** Die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ zweier Mengen A, B wird wie folgt definiert:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$

Kartesisches Produkt. **Definition.** Für je zwei Mengen A, B definieren wir *kartesisches (direktes) Produkt* $A \times B$ der Mengen A, B wie folgt: die Menge $A \times B$ besteht aus allen geordneten *Paaren* (x, y) wobei $x \in A$ und $y \in B$:

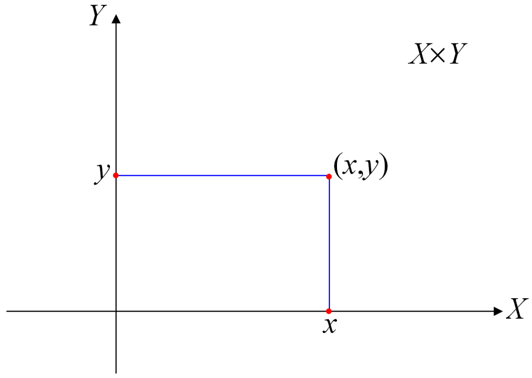
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, \quad y \in B\}.$$

Das geordnete Paar (x, y) ist ein neues Objekt, das man aus den Elementen von A und B erstellt. Zwei Paaren (x, y) und (x', y') sind gleich genau dann, wenn $x = x'$ und $y = y'$.

Beispiel. Für die Mengen $A = \{a, b\}$ und $B = \{0, 1\}$ erhalten wir nach Definition

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}.$$

Beispiel. Sei X eine waagerecht Gerade in der Ebene und Y – eine senkrechte Gerade. Dann kann das Produkt $X \times Y$ als die Ebene dargestellt werden.



1.2 Abbildungen

Gegeben seien zwei Mengen X, Y. Eine Abbildung (=Funktion) f von X nach Y ist eine Zuordnung (Vorschrift, Regel) $x \mapsto y$, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet. Die Abbildung wird wie folgt bezeichnet:

$$f : X \to Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Wenn dem Element $x \in X$ das Element $y \in Y$ zugeordnet ist (d.h. $x \mapsto y$), so heißt y der *Wert* von f an der Stelle x (oder das *Bild* von x) und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Sprachweise:

x auf y (oder auf $f(x)$) abgebildet wird.

Man bezeichnet die Abbildung auch mit

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

oder mit

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y.$$

Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* (oder *Definitionsmenge*) von f, die Menge Y – der *Wertebereich* (oder *Zielmenge*).

Jetzt besprechen wir, was genau eine Zuordnung $x \mapsto y$ bedeutet. Unterhalb benutzen wir die folgenden logischen Symbolen (*Quantoren*):

$\forall$ bedeutet "für alle", "für jedes",

$\exists$ bedeutet "es existiert", "es gibt mindestens ein", "für mindestens ein",

$\exists!$ bedeutet "es gibt genau ein", "es existiert genau ein".

Das Zeichen $\forall$ stammt aus dem umgedrehten Buchstabe "A" (*A*lle) und heißt *Allquantor*. Das Zeichen $\exists$ stammt aus dem umgedrehten "E" (*E*xistiert) und heißt *Existenzquantor*.

Definition. Eine Zuordnung $x \mapsto y$ (wobei $x \in X$ und $y \in Y$) ist eine Teilmenge G von $X \times Y$ mit der folgenden Bedingung:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \text{ mit } (x, y) \in G. \tag{1.6}$$

Jede solche Teilmenge $G \subset X \times Y$ heißt ein *Graph*.

Definition. Eine Abbildung f ist ein Tripel (X, Y, G) von dem Definitionsbereich X, Wertebereich Y und einem Graph $G \subset X \times Y$.

Beispiel. Die Abbildung $f : X \to X$ mit $f(x) = x$ heißt die *Identitätsabbildung* der Menge X. Man bezeichnet die Identitätsabbildung von X mit Id_X, so dass $\mathrm{Id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$. Der Graph von Id_X besteht aus den Paaren (x, x), die die *Diagonale* von $X \times X$ formen.

Beispiel. Betrachten wir eine beliebige Menge X und die Menge $Y = \{0, 1\}$, die aus den Symbolen $0, 1$ besteht. Sei A eine Teilmenge von X. Definition wir eine Funktion $\mathbf{1}_A : X \to Y$ mit

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

Der Graph von $\mathbf{1}_A$ besteht aus den Paaren $(x, 1)$ mit $x \in A$ und $(x, 0)$ mit $x \in A^c$. Die Funktion $\mathbf{1}_A$ heißt die *charakteristische* Funktion oder die *Indikatorfunktion* von A.

Urbild. Jede Abbildung $f : X \to Y$ induziert eine Abbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ wie folgt. Für jede Teilmenge $A \subset Y$, definieren wir das *Urbild* $f^{-1}(A)$ von A durch

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\},$$

d.h. für jedes $x \in X$ gilt

$$x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A. \tag{1.7}$$

Nach Definition ist $f^{-1}(A)$ eine Teilmenge von X, und somit bestimmt die Zuordnung

$$A \mapsto f^{-1}(A)$$

eine Abbildung von $\mathcal{P}(Y)$ nach $\mathcal{P}(X)$. Diese Abbildung

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\to \mathcal{P}(X) \\ A &\mapsto f^{-1}(A) \end{aligned}$$

heißt die *Urbildabbildung* von f.

Satz 1.4 Die Urbildabbildung $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ ist mit den Mengenoperationen $\cap, \cup, \setminus$ vertauschbar:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\ f^{-1}(A \setminus B) &= f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Komposition von Abbildungen. **Definition.** Gegeben seien zwei Abbildungen

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z,$$

die *Komposition (Verkettung, zusammengesetzte Abbildung)* von f und g ist eine Abbildung $f \circ g$ von X nach Z die wie folgt definiert ist:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Beispiel. Für jede Abbildung $g: X \to Y$ ist die Komposition $\mathrm{Id}_Y \circ g$ auch eine Abbildung von X nach Y, was aus dem folgenden Diagram klar ist:

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{\mathrm{Id}_Y} Y,$$

und es gilt

$$\mathrm{Id}_Y \circ g = g. \tag{1.8}$$

In der Tat, für jedes $x \in X$ gilt

$$(\mathrm{Id}_Y \circ g)(x) = \mathrm{Id}_Y(g(x)) = g(x),$$

woraus (1.8) folgt. Analog gilt

$$g \circ \mathrm{Id}_X = g.$$

Satz 1.5 *(Assoziativgesetz für Komposition)* Für je drei Abbildungen

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} U$$

gilt die Identität

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Satz 1.6 Gegeben seien zwei Abbildungen

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

Die folgende Identität gilt für die Urbildabbildungen:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}. \tag{1.9}$$

Inverse Abbildung. **Definition.** Eine Abbildung $g : Y \to X$ heißt die *inverse Abbildung (Umkehrabbildung, Umkehrfunktion, inverse Funktion)* von $f : X \to Y$, wenn

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Y \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_X \,.$$

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *bijektiv* wenn

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y, \tag{1.10}$$

d.h.

$$\forall y \in Y \;\; \text{gibt es genau ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *surjektiv* wenn

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y,$$

d.h.

$$\forall y \in Y \;\; \text{gibt es mindestens ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

Definition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *injektiv* wenn

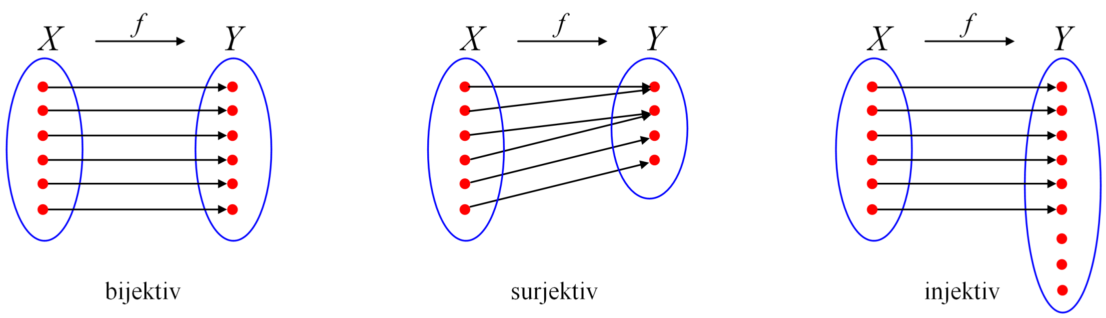
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \; f(x_1) \neq f(x_2)$$

was äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

d.h.

$$\forall y \in Y \text{ gibt es höchstens ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$



Satz 1.7 Eine Abbildung $f : X \to Y$ hat eine inverse Abbildung genau dann, wenn f bijektiv ist.

Existiert die inverse Abbildung von f, so bezeichnet man sie mit f^{-1}, d.h.

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y \text{ und } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X .$$

Warnung. Man soll die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ mit der Urbildabbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ nicht verwechseln, obwohl sie identisch bezeichnet werden.

Satz 1.8 Gegeben seien zwei bijektive Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$. Dann ist $f \circ g$ auch bijektiv und die folgende Identität gilt für die inversen Abbildungen

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}. \tag{1.11}$$

1.3 Axiomensystem von reellen Zahlen

Definition. Eine Menge $\mathbb{R}$ heißt die Menge von reellen Zahlen und ihre Elemente heißen reelle Zahlen wenn in $\mathbb{R}$ zwei Operationen Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ und eine Relation $<$ definiert sind, die die folgenden vier Gruppen von Axiomen (insgesamt vierzehn Axiome) erfüllen.

I. Axiome der Addition.

1. (Das Nullelement) Es existiert eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$
$$x + 0 = 0 + x = x.$$
2. (Das Negative) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Zahl $-x \in \mathbb{R}$ (das Negative von x), so dass
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$
3. (Assoziativgesetz für $+$) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
4. (Kommutativgesetz für $+$) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x + y = y + x.$$

II. Axiome der Multiplikation.

1. (Das Einheitselement) Es existiert eine Zahl $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$
2. (Das Inverse) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert eine Zahl $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (das Inverse von x), so dass
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. (Assoziativgesetz für $\cdot$) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,.$$
4. (Kommutativgesetz für $\cdot$) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$x \cdot y = y \cdot x.$$
5. (Distributivgesetz) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

III. Anordnungsaxiome. Die folgenden Eigenschaften gelten für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. (Vergleichbarkeit) Es gilt genau eine der folgenden Relationen: $x < y$ oder $y < x$ oder $x = y$.
2. (Transitivität)
$$x < y \ \wedge \ y < z \ \Rightarrow x < z$$
3. (Beziehung zur Addition)
$$x < y \ \Rightarrow x + z < y + z$$
4. (Beziehung zur Multiplikation)
$$0 < x \ \wedge \ 0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y.$$

IV. Vollständigkeitsaxiom. Seien A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \text{ gilt } a \leq b.$$
Dann existiert eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so dass
$$\forall a \in A \ \ \forall b \in B \ \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$
Man sagt, dass die Zahl c die Mengen A und B trennt (oder c zwischen A und B liegt).

1.4 Folgerungen aus den Körperaxiomen

Folgerungen aus den Axiomen der Addition. [1] Das Nullelement ist eindeutig bestimmt.

[2] Das Negative von $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

[3] Es gelten
$$-0 = 0$$
und
$$-(-x) = x,$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

[4] Für jede $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x + a = b$ eine eindeutige Lösung $x = b + (-a)\,.$

Definition. Die Summe $b + (-a)$ wird auch mit $b - a$ bezeichnet und heißt die *Differenz* von b und a. Die Operation $(a, b) \mapsto b - a$ heißt *Subtraktion.*

Folgerungen aus den Axiomen der Multiplikation. [5] Das Einheitselement 1 ist eindeutig bestimmt.

[6] Das Inverse von $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eindeutig bestimmt.

[7] Es gelten $1^{-1} = 1$ und $(x^{-1})^{-1} = x$, für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[8] Für jede $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $ax = b$ eine eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$ (*Aufgabe* 16 (*c*)).

Definition. Das Produkt $a^{-1}b$ heißt der *Quotient* von b und a und wird mit b/a oder $\frac{b}{a}$ bezeichnet. Die Operation $(a, b) \mapsto b/a$ heißt *Division*. Insbesondere gilt $a^{-1} = 1/a$.

Folgerungen aus dem Distributivgesetz. [9] $x0 = 0x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

[10] $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor y = 0$.

[11] $(-1)\,x = -x$

[12] $(-1)\,(-x) = x$.

[13] $-\,(x + y) = -x - y$ (*Aufgabe* 16 (*a*)).

[14] $x\,(-y) = -(xy)$

[15] $(-x)\,(-y) = xy$. Insbesondere $(-1)\,(-1) = 1$.

[16] Bezeichnen wir $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ und

$$x^2 = xx, \quad x^3 = x^2x = xxx.$$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

und

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

(*Aufgabe* 18).

1.5 Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen

[17] $x < y \ \land\ y \le z \ \Rightarrow\ x < z$ und $x \le y \ \land\ y < z \ \Rightarrow\ x < z$

[18] $x \le y \ \land\ y \le z \ \Rightarrow\ x \le z$

[19] $x \le y \ \land y \le x \ \Rightarrow\ x = y$

[20] $x \le y \ \Rightarrow\ x + z \le y + z$

[21] $x \le y \ \land\ a < b \ \Rightarrow\ x + a < y + b$

[22] $x \le y \ \land\ a \le b \ \Rightarrow x + a \le y + b$

Definition. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *positiv* wenn $x > 0$ und *negativ* wenn $x < 0$.

[23] Die Summe von positiven Zahlen ist positiv, die Summe von negativen Zahlen – negativ.

[24] Die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$x < y \ \Leftrightarrow \ \ y - x > 0 \ \Leftrightarrow \ -x > -y \tag{1.12}$$

und

$$x \leq y \ \Leftrightarrow \ \ y - x \geq 0 \ \Leftrightarrow \ -x \geq -y \ . \tag{1.13}$$

[25] Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten

$$x \text{ negativ } \Leftrightarrow -x \text{ positiv,} \tag{1.14}$$

$$x \text{ positiv } \Leftrightarrow -x \text{ negativ.} \tag{1.15}$$

[26] Sind die Zahlen x und y gleichzeitig positiv oder negativ, so ist xy positiv. Ist eine Zahl von x, y positiv und andere negativ, so ist xy negativ.

[27] Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x^2 > 0$.

[28] $1 > 0$ und $-1 < 0$.

[29] Ist $x > 0$, so ist $x^{-1} > 0$. Ist $x < 0$ so ist $x^{-1} < 0$.

[30] Sei $x < y$. Für alle $a > 0$ gilt $ax < ay$, und für alle $a < 0$ gilt $ax > ay$.

[31] Falls $0 < x < y$ und $0 < a < b$, so gilt $ax < by$.

[32] Falls $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq a \leq b$ so gilt $ax \leq by$ (*Aufgabe* 18).

[33] Für alle $x > y > 0$ gilt $0 < x^{-1} < y^{-1}$.

Definition. Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den *Betrag* von x wie folgt:

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

1.6 Teilmengen von $\mathbb{R}$

Für je zwei reelle Zahlen a, b mit $a \leq b$ definieren wir die folgenden *Intervalle*:

$$\begin{array}{ll} (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{– offenes Intervall,} \\ [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{– abgeschlossenes Intervall,} \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{– halboffenes (linksoffenes) Intervall,} \\ [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \text{– halboffenes (rechtsoffenes) Intervall.} \end{array} \tag{1.16}$$

Die Zahlen a, b heißen die *Grenzen* des Intervalls.

Satz 1.9 Jedes Intervall mit den Grenzen $a < b$ ist nichtleer.

Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *untere Schranke* von M wenn gilt $x \geq a$ für alle $x \in M$. Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke* von M wenn gilt $x \leq b$ für alle $x \in M$.

Beispiel. Für jedes Intervall I mit den Grenzen $a < b$ ist a immer eine untere Schranke und b – eine obere Schranke. Jede Zahl $a' < a$ ist auch eine untere Schranke von I, und jede Zahl $b' > b$ – eine obere Schranke von I.

Definition. Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt das *Minimum* von M (oder das *minimale Element* von M) und wird mit $\min M$ bezeichnet, wenn a das kleinste Element von M ist, d.h. $a \in M$ und $x \geq a$ für alle $x \in M$. Mit anderen Worten, $\min M$ ist eine untere Schranke von M die in M liegt.

Definition. Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt das *Maximum* von M (oder das *maximale Element* von M) und wird mit $\max M$ bezeichnet, wenn b das größte Element von M ist, d.h. $b \in M$ und $x \leq b$ für alle $x \in M$. Mit anderen Worten, $\max M$ ist eine obere Schranke von M die in M liegt.

Beispiel. Sei $a < b$. Das abgeschlossene Intervall $I = [a, b]$ hat offensichtlich $\min I = a$ und $\max I = b$.

Zeigen wir, dass das offene Intervall $I = (a, b)$ weder ein Maximum noch ein Minimum hat. Existiert $\max I =: c$, so gilt $c \in (a, b)$, insbesondere $c < b$. Das Intervall (c, b) nichtleer ist, sei $x \in (c, b)$. Dann gilt $x \in I$ und $x > c$ so dass c kein Maximum von I ist.

Analog beweist man, dass (a, b) kein Minimum hat.

Das rechtsoffene Intervall $I = [a, b)$ hat $\min I = a$ und kein Maximum, und das linksoffene Intervall $I = (a, b]$ hat $\max I = b$ und kein Minimum.

Beispiel. Für die Menge $M = \{a, b\}$ aus zwei reelle Zahlen a, b gilt

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

und

$$\min\{a, b\} = \begin{cases} b, & \text{falls } a \geq b \\ a, & \text{falls } a < b \end{cases} .$$

Man kann zeigen, dass

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \text{und} \quad \max\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

Weitere interessante Eigenschaften von $\max\{a, b\}$ und $\min\{a, b\}$ werden in Aufgabe 25 angegeben.

Definition. Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt das *Infimum* von M (oder *untere Grenze*) und wird mit $\inf M$ bezeichnet wenn a die größte untere

Schranke von M ist. Eine Zahl b heißt das *Supremum* von M (oder *obere Grenze*) und wird mit $\sup M$ bezeichnet wenn b die kleinste obere Schranke von M ist.

Beispiel. Nehmen wir an dass die Menge M das Minimum $a = \min M$ besitzt. Dann gilt auch $\inf M = a$ da a eine untere Schranke ist und für beliebige andere untere Schranke x von M die Ungleichung $x \leq a$ gilt (da $a \in M$); d.h. a ist die größte untere Schranke. Analog gilt $\sup M = \max M$ wenn $\max M$ existiert.

Satz 1.10 *Sei I ein Intervall mit den Grenzen $a < b$. Dann gilt*

$$\inf I = a \quad \text{und} \quad \sup I = b.$$

1.7 Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom

Definition. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach unten beschränkt* wenn M eine untere Schranke hat. Die Menge M heißt *nach oben beschränkt* wenn M eine obere Schranke hat. Die Menge M heißt *beschränkt* wenn M nach unten *und* nach oben beschränkt ist.

Satz 1.11 *Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist M nach unten beschränkt, so hat M das Infimum. Ist M nach oben beschränkt, so hat M das Supremum. Ist M beschränkt, so hat M das Infimum und das Supremum.*

Satz 1.12 *Für jede nichtnegative Zahl $a \geq 0$ existiert genau eine nichtnegative Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$.*

Definition. Die eindeutige nichtnegative Zahl x mit $x^2 = a$ heißt die *Quadratwurzel* aus a und wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

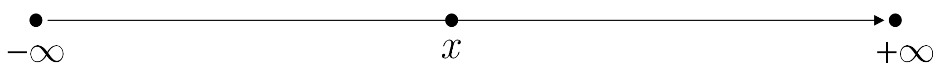
1.8 Die Zeichen $+\infty$ und $-\infty$

Definition. Die *erweiterte Menge* $\overline{\mathbb{R}}$ von reellen Zahlen ist die geordnete Menge

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

wobei $+\infty$ und $-\infty$ neue Elemente sind, und die Ungleichung $<$ wird auf $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt erweitert: für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt immer

$$-\infty < x < +\infty.$$



Die Elemente $+\infty$ und $-\infty$ heißen Unendlichkeiten oder unendliche Elemente.

Satz 1.13 *Für jede Teilmenge M von $\overline{\mathbb{R}}$ existieren $\sup M$ und $\inf M$ (als Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$).*

Chapter 2

Ganze Zahlen und vollständige Induktion

2.1 Natürliche Zahlen und Induktionsprinzip

Definition. Eine Menge $S \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv* wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt

- $1 \in S$
- $x \in S$ ergibt $x + 1 \in S$ (die Zahl $x + 1$ heißt *Nachfolger* von x).

Definition. Die Menge $\mathbb{N}$ ist der Durchschnitt von allen induktiven Mengen, d.h.

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in S \quad \forall S \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Schreibweise für den Durchschnitt:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S. \tag{2.2}$$

Die Elemente von $\mathbb{N}$ heißen *natürliche Zahlen.*

Satz 2.1 Die Menge $\mathbb{N}$ ist induktiv, d.h. $1 \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{N}$ ergibt $x + 1 \in \mathbb{N}$. Darüber hinaus ist die Menge $\mathbb{N}$ die kleinste (im Sinn von Inklusion) induktive Menge.

Beispiel. Das Intervall $[1, +\infty)$ ist offensichtlich induktiv. Es folgt aus (2.2), dass $\mathbb{N} \subset [1, +\infty)$. Insbesondere ist 1 die kleinste natürliche Zahl, d.h. $1 = \min \mathbb{N}$. Da $1 \in \mathbb{N}$, daraus folgt auch $2 = 1 + 1 \in \mathbb{N}$, $3 = 2 + 1 \in \mathbb{N}$, usw.

Satz 2.2 *(Induktionsprinzip)* Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, d.h.

$$A : \mathbb{N} \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}.$$

Nehmen wir an dass A die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(i) $A(1)$ ist wahr;

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.3 Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $n + m \in \mathbb{N}$

(b) $nm \in \mathbb{N}$.

Satz 2.4 Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$.

2.2 Summe und Produkt endlicher Folgen

Definition. Eine *endliche Folge* von n Elementen ist eine Abbildung $a : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}$. Man bezeichnet den Wert $a(k)$ auch mit a_k.

Definition. Definieren wir die Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ einer Folge $\{a_k\}$ per Induction nach n wie folgt:

(i) Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \ ;$$

(ii) Induktionsschritt von n nach $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) + a_{n+1} \ . \tag{2.3}$$

Beispiel. Beweisen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.4}$$

Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Angenommen, dass (2.4) für ein n gilt, beweisen wir die Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nach (2.3) gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

was zu beweisen war.

Definition. Definieren wir das Produkt $\prod_{k=1}^{n} a_k$ einer Folge $\{a_k\}$ per Induktion nach n wie folgt:

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1 \tag{2.5}$$

und

$$\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) a_{n+1} \ . \tag{2.6}$$

Betrachten wir die Folge $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ mit $a_k = a \in \mathbb{R}$ für alle k und definieren die *Potenzen* von a mit

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt aus (2.5) und (2.6) dass

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^{n+1} = a^n a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Im Ausdruck a^n heißt die Zahl a die *Basis* und n –der *Exponent*. Man beweist per Induktion die folgenden Identitäten:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \tag{2.8}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 33).

Beispiel. Beweisen wir die letzte Identität in (2.8) per Induktion nach n. Induktionsanfang für $n = 1$:

$$(ab)^1 = ab = a^1 b^1.$$

Induktionsschritt von n nach $n + 1$:

$$\begin{aligned}(ab)^{n+1} &= (ab)^n (ab) = (a^n b^n)(ab) \\ &= (a^n a)(b^n b) = a^{n+1} b^{n+1}.\end{aligned}$$

Beispiel. Beweisen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2, \tag{2.9}$$

d.h.

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2.$$

Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist die linke Seite von (2.9) gleich

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 = 2,$$

und die rechte Seite gleich

$$2^{1+1} - 2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 1 = 2,$$

so dass (2.9) gilt.

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Angenommen, dass (2.9) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} = \left(2^{n+1} - 2\right) + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{(n+1)+1} - 2,\end{aligned}$$

d.h. (2.9) auch für $n+1$ anstatt n gilt. Nach dem Induktionsprinzip beschließen wir, dass (2.9) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2.3 Ganze Zahlen

Definition. Die Menge $\mathbb{Z}$ von *ganzen Zahlen* wird wie folgt definiert:

$$\mathbb{Z} := \{0\} \cup \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}),$$

wobei $-\mathbb{N} := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge von den Negativen von natürlichen Zahlen ist. Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen *ganze Zahlen.*

Satz 2.5 Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ sind $x + y$, $x - y$, xy auch in $\mathbb{Z}$.

Korollar 2.6 Für $x, y \in \mathbb{Z}$ ist die Bedingung $x > y$ äquivalent zu $x \geq y + 1$. Folglich, für jedes $n \in \mathbb{Z}$ enthält das Intervall $(n, n+1)$ keine ganze Zahl.

Satz 2.7 Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Ist M nach oben beschränkt, so existiert $\max M$. Ist M nach unten beschränkt, so existiert $\min M$. Insbesondere existiert $\min M$ für jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Satz 2.8 *(Induktionsprinzip mit verschobenem Anfang)* Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{Z}$ abhängige Aussage, d.h.

$$A : \mathbb{Z} \to \{\text{wahr}, \text{falsch}\}.$$

Nehmen wir an dass A die folgenden zwei Bedingungen für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ erfüllt:

(*i*) $A(n_0)$ ist wahr *(Induktionsanfang für $n = n_0$)*

(*ii*) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ *(Induktionsschritt von n nach $n+1$).*

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$.

Definition. Setzen wir

$$a^0 := 1 \;\text{ und }\; a^{-n} := \left(a^{-1}\right)^n \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei a^{-1} das Inverse von a ist.

Behauptung. Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{-n} = (a^n)^{-1}.$$

2.4 Archimedisches Prinzip und Gaußklammer

Satz 2.9 *(Archimedisches Prinzip)* Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$n \leq x < n + 1, \tag{2.10}$$

d.h. $x \in [n, n+1)$.

2.5 Rationale Zahlen

Definition. Eine *rationale* Zahl ist ein Quotient von ganzen Zahlen, d.h. eine reelle Zahl der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Die Menge von allen rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet, so dass

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Satz 2.10 Die Menge $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.

2.6 Endliche Folgen

Definition. Eine *endliche Folge* $\{a_k\}_{k=m}^{n}$ ist eine Abbildung $a : \{m, ..., n\} \to \mathbb{R}$. Schreibweise: $a_k = a(k)$.

2.7 Binomischer Lehrsatz

Definition. Für ganze Zahlen $n \geq k \geq 0$ definieren wir den *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ ("n über k") durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \tag{2.11}$$

wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! = 1$.

Satz 2.11 *(Binomischer Lehrsatz)* Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{2.12}$$

2.8 Kardinalität von Mengen

Definition. Seien X, Y zwei nicht-leere Mengen. Die Menge X heißt *gleichmächtig* (oder *äquivalent*) zu Y wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. In diesem Fall schreibt man $X \sim Y$. Die leere Menge $\emptyset$ ist nach Definition gleichmächtig zu sich selbst, d.h. $\emptyset \sim \emptyset$.

Satz 2.12 Die Gleichmächtigkeit von Mengen hat die folgenden Eigenschaften:

- $X \sim X$ (Reflexivität)
- $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ (Symmetrie)
- $X \sim Y \ \wedge \ Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ (Transitivität).

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$\mathcal{E}_n := \{1, ..., n\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\} .$$

Setzen wir auch $\mathcal{E}_0 = \emptyset$. Es ist klar, dass $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_m$ für $n \leq m$.
Definition. Eine Menge S heißt *endlich* wenn $S \sim \mathcal{E}_n$ für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Gibt es solches n nicht, so heißt S *unendlich.*

Definition. Gilt $S \sim \mathcal{E}_n$, so sagen wir: die Anzahl von Elementen von S ist n, oder die *Kardinalzahl* von S ist n, oder die *Kardinalität* von S ist n. Man bezeichnet die Kardinalität von S mit $\operatorname{card} S$ oder mit $|S|$ (Betrag von S).

Beispiel. Für die Menge $S = \{a, b, c\}$ gilt $\operatorname{card} S = 3$, da diese Menge zu $\mathcal{E}_3 = \{1, 2, 3\}$ gleichmächtig ist.

Satz 2.13 Sind m, n natürliche Zahlen mit $m > n$, so gibt es keine injektive Abbildung $f : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$. Insbesondere sind $\mathcal{E}_m$ und $\mathcal{E}_n$ gleichmächtig genau dann, wenn $m = n$.

Korollar 2.14 Die Menge $\mathbb{N}$ ist unendlich.

Satz 2.15 Jede Teilmenge S einer endlichen Menge M ist endlich und

$$\operatorname{card} S \leq \operatorname{card} M.$$

Definition. Seien A, B zwei Mengen. Die disjunkte Vereinigung $A \sqcup B$ wird als die Vereinigung $A \cup B$ definiert, vorausgesetzt $A \cap B = \emptyset$. Im Fall $A \cap B \neq \emptyset$ wird $A \sqcup B$ nicht definiert.

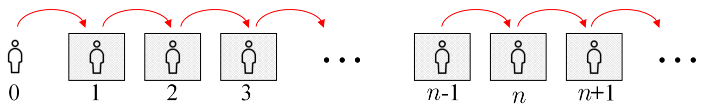
Satz 2.16 Für beliebige endliche Mengen A, B ist die Vereinigung $A \cup B$ auch endlich. Es gilt auch

$$\operatorname{card} (A \sqcup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B, \tag{2.13}$$

vorausgesetzt dass A und B disjunkt sind.

Definition. Eine Menge X heißt *abzählbar* wenn $X \sim \mathbb{N}$.

Beispiel. (*Hilberts Hotel*) Stellen wir ein Hotel mit einer abzählbaren Menge von Zimmern vor, die mit allen natürlichen Zahlen durchnummeriert sind. Seien alle Zimmer schon belegt (ein Gast in jedem Zimmer), aber es kommt noch ein Gast an. Man kann doch ein Platz für den neuen Gast befreien, indem man den Gast aus jedem Zimmer n nach Zimmer $n + 1$ versetzt. Damit wird das Zimmer 1 frei für den neuen Gast.



Bezeichnen wir den neuen Ganz mit 0 und bekommen die Gleichmächtigkeit

$$\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Außerdem kann man Platz für abzählbare Menge von neuen Gästen frei machen. Seien die neuen Gäste auch mit natürlichen Zahlen durchnummeriert. Der Gast aus jedem Zimmer n wird nach Zimmer $2n$ versetzt, und somit werden alle ungeraden Zimmer frei. Der neue Gast mit Nummer m wird dann ins Zimmer $2m - 1$ untergebracht.

Bezeichnen wir die Menge von neuen Gästen mit $\mathbb{N}'$ (die äquivalent zu $\mathbb{N}$ ist) und bekommen, dass

$$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}' \sim \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Es ist noch interessanter, dass man Platz für die neuen Gäste aus abzählbar vielen Gruppen je mit abzählbar vielen Gästen befreien kann, wie wir unterhalb sehen.

Satz 2.17 Die abzählbare Mengen gelten die folgenden Aussagen.

(a) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist entweder endlich oder abzählbar.

(b) Kartesisches Produkt zweier abzählbaren Mengen ist auch abzählbar.

(c) Für jede endliche Folge $\{X_n\}_{n=1}^m$ von abzählbaren Mengen X_n ist die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^m X_n$ abzählbar. Auch für jede unendliche Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von abzählbaren Mengen ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ abzählbar.

Korollar 2.18 Die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar, d.h. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Definition. Für Mengen X, Y schreiben wir

$$X \preceq Y$$

(gebogenes Symbol von Ungleichung) wenn X zu einer Teilmenge von Y gleichmächtig ist d.h. $X \sim Y'$ für eine Teilmenge $Y' \subset Y$.

Definition. Wir schreiben $X \prec Y$ wenn $X \preceq Y$ aber $X \not\sim Y$.

Definition. Eine Menge X heißt *überabzählbar* wenn $\mathbb{N} \prec X$.

Satz 2.19 Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, d.h. $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Chapter 3

Komplexe Zahlen

3.1 Die Menge von komplexen Zahlen

Definition. Die Menge $\mathbb{C}$ von *komplexen Zahlen* ist die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den folgenden Operationen $+$ und $\cdot$:

- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

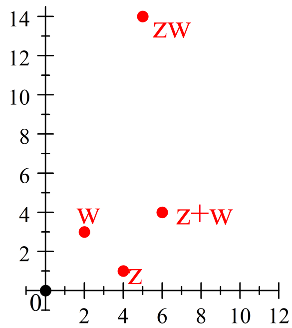
Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen komplexe Zahlen.

Beispiel. Für die komplexen Zahlen $z = (4, 1)$ und $w = (2, 3)$ berechnen wir:

$$z + w = (4, 1) + (2, 3) = (6, 4)$$

und

$$z \cdot w = (4, 1) \cdot (2, 3) = (4 \cdot 2 - 1 \cdot 3,\ 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = (5, 14)\,.$$



Satz 3.1 Die Addition von komplexen Zahlen erfüllt alle Axiome von Addition: Kommutativ- und Assoziativgesetze, Existenz von Nullelement und Negative.

Definition. Die Zahl $i = (0, 1)$ heißt die *imaginäre Einheit.*

Beispiel. Für $z = 4 + i$ und $w = 2 + 3i$ gilt

$$z + w = (4 + i) + (2 + 3i) = 6 + 4i$$

und

$$zw = (4 + i)(2 + 3i) = (4 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + (4 \cdot 3 + 1 \cdot 2)\, i = 5 + 14i.$$

3.2 Eigenschaften von Multiplikation

Satz 3.2 Multiplikation von komplexen Zahlen erfüllt die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze, d.h. für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Identitäten:

(a) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (Kommutativgesetz)

(b) $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (Assoziativgesetz)

(c) $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (Distributivgesetz)

3.3 Konjugation

Definition. Für jede komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir die *Konjugierte* $\overline{z}$ durch

$$\boxed{\overline{z} = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z}.$$

Satz 3.3 Für Konjugation gelten die folgenden Identitäten, für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$

(b) $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

(c) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *(Additivität)*

(d) $\overline{zw} = \overline{z}\, \overline{w}$ *(Multiplikativität)*

3.4 Betrag

Definition. Für jede komplexe Zahl $z = x + iy$ definieren wir den Betrag $|z|$ mit

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}}}.$$

Satz 3.4 Der Betrag hat die folgenden Eigenschaften, für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $|zw| = |z|\,|w|$ *(Multiplikativität)*

(b) $|z + w| \le |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

Definition. Für alle $a, b \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ definieren wir den *Abstand* $d(a, b)$ zwischen a und b wie folgt:

$$d(a, b) = |a - b|\,. \tag{3.1}$$

Satz 3.5 Der Abstand d hat die folgenden Eigenschaften für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$:

(i) $d(a, a) = 0$ und $d(a, b) > 0$ für $a \neq b$ *(Positivität)*;

(ii) $d(a, b) = d(b, a)$ *(Symmetrie)*;

(ii) $d(a, b) \le d(a, c) + d(c, b)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ *(Dreiecksungleichung).*

3.5 Inverse und Division

Satz 3.6 (a) Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat das Inverse wie folgt:

$$\boxed{z^{-1} = |z|^{-2}\,\overline{z}}. \tag{3.2}$$

Es gilt auch

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $aw = b$ eine eindeutige Lösung $w = a^{-1}b$, was mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet wird. Es gelten die Identitäten:

$$\boxed{\frac{b}{a} = |a|^{-2}\,\bar{a}b \quad \text{und} \quad \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}}. \tag{3.3}$$

Eine praktische Regel für Berechnung von $\frac{b}{a}$ ist wie folgt:

$$\frac{b}{a} = \frac{b\bar{a}}{a\bar{a}} = \frac{b\bar{a}}{|a|^2}, \tag{3.4}$$

d.h. den Nenner und Zähler mit der Konjugierte des Nenners zu multiplizieren. Division durch die reelle Zahl $|a|^2$ ist danach einfach.

Beispiel. Berechnen wir

$$\frac{4 - 3i}{1 + 2i}.$$

Nach (3.4) (was äquivalent zu (3.3) ist) erhalten wir

$$\frac{4 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-2 - 11i}{1^2 + 2^2} = -\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i.$$

Wir sehen auch dass $|1 + 2i|^2 = 5$ uns somit $|1 + 2i| = \sqrt{5}$.

Korollar 3.7 $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Chapter 4

Folgen und ihre Grenzwerte

4.1 Begriff des Limes

Definition. Eine (*unendliche*) *Folge* von reellen Zahlen ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Der Wert $x(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ wird auch mit x_n bezeichnet. Die ganze Folge x wird auch mit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ oder sogar $\{x_n\}$ bezeichnet. Die Werte x_n werden als *Glieder* (oder Folgenglieder) der Folge x genannt.

Definition. Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt der *Grenzwert* der Folge $\{x_n\}$ genau dann, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } n \geq N \text{ gilt } |x_n - a| < \varepsilon.$$

Äquivalent, mit Hilfe von den Quantoren, schreibt man:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |x_n - a| < \varepsilon.} \tag{4.1}$$

Hat die Folge $\{x_n\}$ einen Grenzwert, so heißt die Folge *konvergent*; sonst heißt die Folge *divergent*. Man sagt auch: die Folge *konvergiert* bzw *divergiert*.

Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so benutzt man die folgende Schreibweise:

$$x_n \to a \quad (x_n \text{ konvergiert gegen } a)$$

$$x_n \to a \text{ für } n \to \infty \quad (a_n \text{ konvergiert gegen } a \text{ für } n \text{ gegen unendlich}).$$

Um den Grenzwert der Folge $\{x_n\}$ zu bezeichnen, benutzt man die Notation $\lim x_n$, die heißt der *Limes* von x_n. Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$, so schreibt man auch

$$a = \lim x_n \quad \text{oder} \quad a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Beispiel. 1. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\frac{1}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Nach Definition müssen wir beweisen dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \text{ gilt } \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{1}{n} < \varepsilon$, d.h. zu $n > \varepsilon^{-1}$. Um dies zu sichern, reicht es zu haben $N > \varepsilon^{-1}$, und ein solches N existiert nach dem Archimedischen Prinzip, z.B. $N = [\varepsilon^{-1}] + 1$

Ebenso beweist man, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$\frac{c}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

2. Zeigen wir, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \text{ gilt } \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Die Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ ist äquivalent zu $n > \varepsilon^{-2}$. Um dies zu sichern, reicht es zu haben $N > \varepsilon^{-2}$, z.B. nehmen wir $N = [\varepsilon^{-2}] + 1$.

Definition. Man sagt, dass eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage $A(n)$ für *fast alle* n gilt, wenn $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus S$ gilt, wobei $S \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge ist.

Behauptung. Die Bedingung $a = \lim x_n$ ist äquivalent zu:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \text{gilt} \quad |x_n - a| < \varepsilon \text{ für fast alle } n.} \tag{4.2}$$

Definition. Das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ heißt die ε-*Umgebung* von a und wird mit $U_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Behauptung. Eine Zahl a ist kein Grenzwert von $\{x_n\}$ genau dann, wenn

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ so dass die Menge } \{n : x_n \notin U_\varepsilon(a)\} \text{ unendlich ist.} \tag{4.3}$$

Behauptung. Ist $\{x_n\}$ konvergent so ist der Grenzwert $\lim x_n$ eindeutig bestimmt.

Beispiel. 1. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}$ derart, dass $x_n = a$ für fast alle n gilt. Dann gilt auch $|x_n - a| = 0 < \varepsilon$ für fast alle n, woraus $x_n \to a$ folgt.

2. Zeigen wir, dass die Folge $x_n = (-1)^n$ divergiert. Der Wert $a = 1$ ist kein Grenzwert, da es außerhalb $U_1(1/2)$ unendlich viele Folgenglieder mit dem Wert -1 gibt. Analog ist $a = -1$ kein Grenzwert. Sei $a \neq 1$ und $a \neq -1$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ derart, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ weder 1 noch -1 enthält, und somit alle Glieder x_n außerhalb $U_\varepsilon(a)$ liegen. Deshalb ist a kein Grenzwert.

3. Die Folge $x_n = n$ divergiert, da für jedes $a \in \mathbb{R}$ außerhalb des Intervalles $U_1(a)$ unendlich viele Folgenglieder liegen, so dass a kein Grenzwert von x_n ist. Ebenso divergiert die Folge $x_n = cn$ für $\forall c \neq 0$.

4.2 Eigenschaften des Limes

Behauptung. Seien $A(n)$ und $B(n)$ zwei von $n \in \mathbb{N}$ abhängigen Aussagen. Gilt jede davon für fast alle n, so gilt auch $A(n) \wedge B(n)$ für fast alle n.

Satz 4.1 (a) Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Folgen. Gilt $x_n \leq y_n$ für fast alle n, so gilt auch

$$\lim x_n \leq \lim y_n.$$

Insbesondere, $x_n = y_n$ für fast alle $n \;\Rightarrow\; \lim x_n = \lim y_n$.

(b) Seien $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ drei Folgen mit $x_n \leq y_n \leq z_n$ für fast alle n. Gilt

$$\lim x_n = \lim z_n =: a,$$

so ist $\{y_n\}$ auch konvergent und $\lim y_n = a$.

(c) Jede konvergente Folge ist beschränkt d.h. es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $x_n \to a \Leftrightarrow |x_n - a| \to 0$ (insbesondere $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$).

Beispiel. Betrachten wir die Folge $x_n = a^n$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ und untersuchen wir die Konvergenz von $\{x_n\}$ abhängig von dem Wert von a. Betrachten wir verschiedene Fälle.

1. Sei $a > 1$, d.h. $a = 1 + c$ wobei $c > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung[1] (Aufgabe 30) haben wir

$$a^n = (1+c)^n \geq 1 + nc.$$

Da die Folge $\{nc\}_{n=1}^{\infty}$ nach dem Archimedischen Prinzip unbeschränkt ist, so ist die Folge $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ auch unbeschränkt und somit divergent.

2. Sei $a < -1$. Da $|x_n| = |a|^n$, so erhalten wir, dass die Folge $\{|x_n|\}$ unbeschränkt ist und somit auch $\{x_n\}$. Folglich ist $\{x_n\}$ divergent.

3. Sei $a = -1$. Die Folge $x_n = (-1)^n$ wurde schon betrachtet, und wir wissen, dass sie divergiert.

4. Sei $a = 1$. Dann $x_n = 1$ und diese Folge konvergiert gegen 1.

5. Sei $a = 0$. Dann $\{x_n\}$ ist auch eine konstante Folge, die gegen 0 konvergiert.

6. Sei $0 < a < 1$. Setzen wir $b = \frac{1}{a} > 1$. Wie oberhalb schreiben wir $b = 1 + c$ mit $c > 0$ und erhalten

$$b^n = (1+c)^n \geq 1 + nc > nc$$

woraus folgt

$$0 < a^n < \frac{1}{nc}.$$

Da $\frac{1}{nc} \to 0$, so erhalten wir nach Satz 4.1(b), dass $a_n \to 0$.

7. Sei $-1 < a < 0$. Dann gilt $0 < |a| < 1$ und $|a^n| = |a|^n \to 0$, woraus folgt $a^n \to 0$.

Somit ist die Folge $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent genau dann, wenn $-1 < a \leq 1$.

---

[1]Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Für $x \geq 0$ lässt sich diese Ungleichung mit Hilfe von dem binomischen Lehrsatz beweisen, da

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... \geq 1 + nx.$$

4.3 Rechenregeln

Satz 4.2 Seien $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Dann gelten

$$x_n + y_n \to a + b, \quad x_n - y_n \to a - b, \quad x_n y_n \to ab.$$

Falls $y_n \neq 0$ und $b \neq 0$, so gilt auch

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

Beispiel. Mit Hilfe von dem Satz 4.2 bestimmen wir den Grenzwert der Folge

$$x_n = \frac{an^2 + bn + c}{a'n^2 + b'n + c'}, \tag{4.4}$$

wobei a, b, c, a', b', c' reelle Zahlen sind mit $a' \neq 0$. Der Trick ist hier das führende Glied n^2 im Zähler und Nenner auszuklammern. Wir haben

$$x_n = \frac{n^2\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{n^2\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c}{n^2}\right)} = \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}}.$$

Wir wissen schon, dass $\frac{1}{n} \to 0$. Daraus folgt, dass auch $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{b}{n} \to 0$, $\frac{c}{n^2} \to 0$ und somit

$$\lim\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right) = a \quad \text{und} \quad \lim\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}\right) = a'.$$

Es folgt nach der Quotientenregel

$$\lim x_n = \frac{\lim\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{\lim\left(a' + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}\right)} = \frac{a}{a'}.$$

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n} - n\right).$$

Der Trick ist hier die Differenz zweier großer Ausdrücke mit ihre Summe[2] zu multiplizieren und dividieren. Wir haben

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} - n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\left(n^2+n\right) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{n} \to 0$, es folgt, dass $1 + \frac{1}{n} \to 1$ und somit auch $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1$. Es folgt, dass

$$\sqrt{n^2+n} - n \to \frac{1}{2}.$$

Z.B. für $n = 1000$ gilt $\sqrt{n^2+n} - n = 0.499\,875\ldots$

[2] Der Ausdruck $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ heißt *Konjugierte* von $\sqrt{A} - \sqrt{B}$

4.4 Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$

Definition. Für jedes $E \in \mathbb{R}$ definieren wir die Umgebung $U_E(+\infty)$ durch

$$U_E(+\infty) = (E, +\infty] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > E\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x > E\} \cup \{+\infty\}.$$

Analog definieren wir die Umgebung $U_E(-\infty)$ durch

$$U_E(-\infty) = [-\infty, E) = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < E\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x < E\} \cup \{-\infty\}.$$

Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ hat einen Grenzwert $a \in \overline{\mathbb{R}}$ wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\boxed{\text{für jede Umgebung } U \text{ von } a \text{ gilt } x_n \in U \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.} \tag{4.5}$$

Man schreibt in diesem Fall

$$\lim x_n = a \quad \text{oder} \quad x_n \to a \text{ für } n \to \infty$$

Ist a reell, so stimmt diese Definition mit der Definition des Limes in Abschnitt **??** überein. In diesem Fall sagt man, dass x_n gegen a konvergiert, und die Folge $\{x_n\}$ heißt konvergent. Ist $a = \pm\infty$, so sagt man, dass dass x_n gegen a *divergiert,* und die Folge $\{x_n\}$ heißt *bestimmt divergent.* Hat die Folge keinen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$, so heißt die Folge $\{x_n\}$ *unbestimmt divergent.*

Beispiel. 1. Die Folge $x_n = n$ divergiert gegen $+\infty$, da die Bedingung $x_n > E$ für alle $n > E$ erfüllt ist und somit für fast alle n. Analog divergiert die Folge $x_n = -n$ gegen $-\infty$. Mit gleichem Argument beweist man, dass die Folge $x_n = cn$ gegen $+\infty$ divergiert, wenn $c > 0$, und gegen $-\infty$ wenn $c < 0$.

2. Die Folge $x_n = \sqrt{n}$ auch divergiert gegen $+\infty$, da die Bedingung $x_n > E$ bedeutet, dass $\sqrt{n} > E$, was für positives E äquivalent zu $n > E^2$ ist. Somit gilt $x_n > E$ für fast alle n.

Satz 4.3 Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folgen von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Gilt $x_n \le y_n$ für fast alle n, so gilt $\lim x_n \le \lim y_n$, vorausgesetzt, dass $\lim x_n$ und $\lim y_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existieren.

(b) Gelten $x_n \le y_n \le z_n$ für fast alle n und $\lim x_n = \lim z_n =: a \in \overline{\mathbb{R}}$, so gilt auch $\lim y_n = a$.

Behauptung. Gilt $a > b$ so existieren Umgebungen A von a und B von b so dass

$$\forall x \in A \;\; \forall y \in B \;\text{ gilt } x > y. \tag{4.6}$$

Beispiel. Betrachten wir die Folge $x_n = a^n$. Wir wissen schon, dass diese Folge konvergiert genau dann, wenn $a \in (-1, 1]$. Zeigen wir, dass für $a > 1$ gilt $a^n \to +\infty$. Schreiben wir $a = 1 + c$ wobei $c > 0$ und erhalten mit Hilfe von Bernoullischer Ungleichung

$$a^n = (1 + c)^n > cn.$$

Da $cn \to +\infty$ und $cn \le a^n < +\infty$ so folgt es, dass auch $a^n \to +\infty$.

Für $a < -1$ ist die Folge $\{a^n\}$ divergent. Für gerade n liegt a^n in $U_0(+\infty)$ und für ungerade n liegt a^n in $U_0(-\infty)$. Somit enthält weder $U_0(+\infty)$ noch $U_0(-\infty)$ fast alle Glieder, und we beschließen, dass die Folge $\{a^n\}$ unbestimmt divergiert.

4.5 Monotone Folgen

Definition. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von reellen Zahlen heißt *monoton steigend* wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, and *monoton fallend* wenn $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beispiel. Die Folge $x_n = n$ ist monoton steigend, die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist monoton fallend, die konstante Folge $x_n = a$ ist gleichzeitig monoton steigend und fallend, die Folge $x_n = (-1)^n$ ist nicht monoton.

Hauptsatz 4.4 *(Monotoniekriterium)* Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge von reellen Zahlen.
Ist $\{x_n\}$ monoton steigend, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist $\{x_n\}$ monoton fallend, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Insbesondere hat jede monotone Folge immer einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ (endlich oder $\pm\infty$). Darüber hinaus konvergiert eine monotone Folge genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Beispiel. Betrachten wir die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die wie folgt induktiv definiert ist:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Die ersten Glieder der Folge sind wie folgt:

$$x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{9}{4} = 2,25, \quad x_4 = \frac{793}{324} = 2,447..., \quad x_5 = \frac{532689481}{203747076} = 2,614...$$

usw. Da offensichtlich gilt $x_{n+1} > x_n$, so ist diese Folge monoton steigend und somit hat einen Grenzwert $x = \lim x_n \in [0, +\infty]$. Sei $x < +\infty$. Es folgt aus (4.7) für $n \to \infty$, dass x die folgende Gleichung erfüllen muss:

$$x = x + \frac{1}{x^2}.$$

Da es keine reelle Zahl x gibt, die diese Gleichung erfüllt, so bleibt es nur eine Möglichkeit $x = +\infty$. Deshalb beschließen wir dass $x_n \to +\infty$.

Beispiel. Betrachten wir einen Ausdruck der aus einer unendlichen Folge von Wurzeln besteht:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$$

Rigoros wird der Wert dieses Ausdrucks als $\lim x_n$ definiert, wobei

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}.$$

In der Tat haben wir

$$x_2 = \sqrt{1}, \quad x_3 = \sqrt{1+\sqrt{1}}, \quad x_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \quad \text{usw.}$$

Man kann zeigen, dass die Folge $\{x_n\}$ monoton steigend und beschränkt ist, woraus die Konvergenz folgt (siehe Aufgabe 68). Der Grenzwert $x := \lim x_n$ lässt sich danach wie folgt bestimmen. Aus $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ erhalten wir für $n \to \infty$

$$x = \sqrt{1+x},$$

was äquivalent zu $x^2 - x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat genau eine positive Lösung $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\ldots.$

Beispiel. Die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton steigend und beschränkt (siehe Aufgabe 69). Der Grenzwert

$$e := \lim x_n = 2,718281828459045...$$

heißt die *Eulersche Zahl*, die eine wichtige Rolle in Analysis spielt.

4.6 Cauchy-Folgen

Definition. Eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamentalfolge*) wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m \geq N \;\; \text{gilt} \;\; |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Hauptsatz 4.5 *(Cauchy-Kriterium)* Eine Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen konvergiert genau dann, wenn $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.

Beispiel. Definieren wir eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per Induktion wie folgt:

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - x_n^2\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Zum Beispiel,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{8} = 0,375\,, \quad x_4 = \frac{55}{128} = 0.429\,6875, \\ x_5 &= \frac{13\,359}{32\,768} = 0,407684326171875\,, \\ x_6 &= \frac{895\,278\,943}{2147\,483\,648} = 0,416\,896\,745\,096\,892, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Beweisen wir, dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert, und danach bestimmen $\lim x_n$.

Schritt 1. Beweisen wir per Induktion nach n, dass $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktionsanfang ist offensichtlich da $x_1 = 0$. Induktionsschritt: gilt $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, so gilt $0 \leq 1 - x_n^2 \leq 1$ und es folgt aus (4.9), dass $x_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Schritt 2. Beweisen wir, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n+1} - x_{m+1}| \leq \frac{1}{2} |x_n - x_m| . \tag{4.10}$$

Wir haben nach (4.9)

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_{m+1}| &= \left| \frac{1}{2} \left(1 - x_n^2\right) - \frac{1}{2} \left(1 - x_m^2\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| x_n^2 - x_m^2 \right| \\ &= \frac{1}{2} |x_n + x_m| \cdot |x_n - x_m| \\ &\leq \frac{1}{2} |x_n - x_m| , \end{aligned}$$

da nach dem Schritt 1

$$0 \leq x_m + x_n \leq 1.$$

Schritt 3. Beweisen wir per Induktion nach $m \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \geq m$ gilt

$$|x_n - x_m| \leq 2^{-m}. \tag{4.11}$$

Induktionsanfang. Für $m = 1$ gilt

$$|x_n - x_1| \leq 2^{-1}$$

da x_n und x_1 in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ liegen.

Induktionsschritt von m nach $m + 1$. Für jedes $n \geq m + 1$ haben wir $n - 1 \geq m$ und somit nach der Induktionsvoraussetzung (4.11)

$$|x_{n-1} - x_m| \leq 2^{-m}.$$

Wenn wir diese Ungleichung zusammen mit (4.10) verwenden, erhalten wir

$$|x_n - x_{m+1}| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - x_m| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-m} = 2^{-(m+1)},$$

was zu beweisen war. Es folgt aus (4.11), dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert.

Schritt 4. Setzen wir $x = \lim x_n$. Es folgt aus (4.9), dass

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - x^2\right) ,$$

d.h.

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die einzige nichtnegative Nullstelle

$$x = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414...$$

Beispiel. Betrachten wir einen unendlichen *Kettenbruch*:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{4.12}$$

deren Wert wie folgt definiert ist. Betrachten wir die folgende induktiv definierte Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \ \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Zum Beispiel, wir haben

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0,5 \\
x_3 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0,666... \\
x_4 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} = 0,6 \\
x_5 &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8} = 0,625.
\end{aligned}$$

Man kann beweisen, dass die Folge $\{x_n\}$ die Cauchy-Bedingung erfüllt und somit konvergent ist (siehe Aufgabe 75). Man nimmt nach Definition an, dass der Wert des Kettenbruches (4.12) gleich $\lim x_n$ ist. Der Grenzwert $\lim x_n$ lässt sich aus der Gleichung (4.13) explizit bestimmen.

4.7 Teilfolgen und Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition. Seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von $\overline{\mathbb{R}}$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (d.h. die Folge $\{n_k\}$ ist *streng monoton steigend*). Dann heißt die Folge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ...\}$ eine *Teilfolge* von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel. Sei $n_k = 2k$. Dann $x_{n_k} = x_{2k}$, und die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ besteht aus allen Gliedern der Folge $\{x_n\}$ mit geraden n.

Definition. Ein $a \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $\{x_n\}$ wenn es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ gibt mit $x_{n_k} \to a$.

Lemma 4.6 Seien $\{x_n\}$ eine Folge und $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(*a*) Ist a der Grenzwert von $\{x_n\}$ so jede Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ hat den Grenzwert a. Mit anderen Worten ist a der einzige Häufungspunkt von $\{x_n\}$.

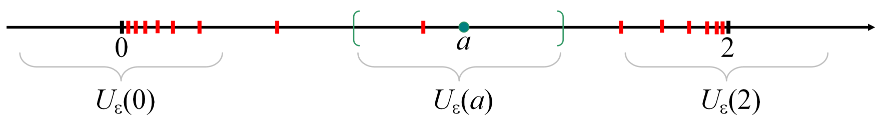
(*b*) Ist a ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$ so enthält jede Umgebung $U(a)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$.

Beispiel. Die Folge $x_n = (-1)^n$ has keine Grenzwert, aber diese Folge hat zwei Häufungspunkte: 1 und -1, da $x_{2k} \to 1$ und $x_{2k+1} \to -1$. Es gibt keine weiteren Häufungspunkte: für jede $a \notin \{-1, 1\}$ gibt es eine Umgebung $U(a)$ die weder 1 noch -1 enthält.

Beispiel. Bestimmen wir die Häufungspunkte der Folge

$$x_n = \tfrac{(-1)^n}{n} + 1 - (-1)^n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ ist gerade} \\ 2 - \frac{1}{n}, & n \text{ its ungerade.} \end{cases}$$

Da $\frac{1}{n} \to 0$ und $2 - \frac{1}{n} \to 2$, so sind 0 und 2 die Häufungspunkte der Folge. Zeigen wir, dass es keinen anderen Häufungspunkt gibt. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \in [0, 2]$, so gibt es keinen Häufungspunkt außerhalb des Intervalls $[0, 2]$. Sei $a \in (0, 2)$.



Dann gibt es ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ derart, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ disjunkt von $U_\varepsilon(0)$ und $U_\varepsilon(2)$ ist. Deshalb ist die Menge $\{n : x_n \in U_\varepsilon(a)\}$ endlich für gerade n, und auch endlich für ungerade n. Somit ist diese Menge endlich, und a ist kein Häufungspunkt.

Lemma 4.7 Wenn $\{x_n\}$ eine nach oben (bzw unten) unbeschränkte Folge so ist $+\infty$ (bzw $-\infty$) ein Häufungspunkt von $\{x_n\}$.

Hauptsatz 4.8 *(Satz von Bolzano-Weierstraß)* Jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Korollar 4.9 Jede Folge $\{x_n\}$ von reellen Zahlen besitzt eine Teilfolge, die einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ hat. Mit anderen Worten, die Menge von Häufungspunkten von $\{x_n\}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ ist immer nichtleer.

4.8 Operationen mit $+\infty$ und $-\infty$.

Satz 4.10 Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei Folgen von reellen Zahlen mit $\lim x_n = a$ und $\lim y_n = b$ wobei $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten die Rechenregeln

$$\lim (x_n + y_n) = a + b, \quad \lim (x_n - y_n) = a - b, \quad \lim (x_n y_n) = ab, \qquad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, \tag{4.14}$$

vorausgesetzt, dass die Ausdrücke $a + b$, $a - b$, ab, bzw $\frac{a}{b}$ bestimmt sind (und $y_n \neq 0$ im letzten Fall).

Beispiel. Zeigen wir, warum die Ausdrücke (**??**) unbestimmt sollen sein.

1. *Warum ist $\infty - \infty$ unbestimmt?*

Die Folgen $x_n = n + c$ und $y_n = n$ haben den Grenzwert $+\infty$ aber die Differenz $x_n - y_n = c$ hat den Grenzwert c, was eine beliebige reelle Zahl ist. Für die Folge $x_n = n + (-1)^n$ gilt auch $\lim x_n = +\infty$ aber die Differenz $x_n - y_n = (-1)^n$ überhaupt keinen Grenzwert hat. Somit lässt der Ausdruck $\infty - \infty$ sich nicht eindeutig definieren.

2. *Warum ist* $0\cdot\infty$ *unbestimmt?*

Sei $x_n = \frac{c}{n}$ und $y_n = n$. Dann gilt $x_n \to 0$ und $y_n \to +\infty$, während $x_n y_n \to c$. Da c beliebig ist, so $0\cdot\infty$ lässt sich nicht eindeutig definieren.

3. *Warum ist* $\frac{\infty}{\infty}$ *unbestimmt?*

Sei $x_n = cn$ mit $c>0$ und $y_n = n$ so dass $x_n \to +\infty$ und $y_n \to +\infty$. Dann gilt $\frac{x_n}{y_n} \to c$, so dass $\frac{\infty}{\infty}$ sich nicht eindeutig definieren lässt.

4. *Warum ist* $\frac{0}{0}$ *unbestimmt?*

Sei $x_n = \frac{c}{n}$ und $y_n = \frac{1}{n}$ so dass $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$. Dann gilt $\frac{x_n}{y_n} \to c$, so dass $\frac{0}{0}$ sich nicht eindeutig definieren lässt.

Beispiel. Mit Hilfe von dem Satz 4.10 bestimmen wir den folgenden Grenzwert:

$$\lim \frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2^n - \frac{n+1}{n}}.$$

Da $\sqrt{n} \to +\infty$, so gilt

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

und

$$\lim\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3+0 = 3.$$

Da $2^n \to +\infty$ und $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \to 1$, so gilt

$$\lim\left(2^n - \frac{n+1}{n}\right) = +\infty - 1 = +\infty.$$

Somit erhalten wir

$$\lim \frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2^n - \frac{n+1}{n}} = \frac{3}{+\infty} = 0.$$

Den Grenzwert

$$\lim \frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} \tag{4.15}$$

kann man analog nicht bestimmen, da $n+\sqrt{n} \to +\infty$ und auch $n-\sqrt{n} \to +\infty$ (da $\sqrt{n} \le \frac{n}{2}$ für $n \ge 4$ und somit $n-\sqrt{n} \ge n/2$). In diesem Fall erhalten wir den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, und man muss andere Methoden einsetzen. Den Grenzwert

$$\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \tag{4.16}$$

ist auch ein unbestimmter Ausdruck $\infty - \infty$, so ist der Satz 4.10 in diesem Fall auch nicht benutzbar. Die Grenzwerte (4.15) und (4.16) werden in Aufgabe 58 betrachtet.

4.9 Komplexwertige Folgen

Definition. Eine Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ von komplexen Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ wenn $|z_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$. Man schreibt: $\lim z_n = a$ oder $z_n \to a$ für $n \to \infty$.

Definition. Eine komplexwertige Folge $\{z_n\}$ heißt Cauchy-Folge wenn $|z_n - z_m| \to 0$ für $n, m \to \infty$.

Satz 4.11 Sei $\{z_n\}$ eine komplexwertige Folge.

(a) Die Konvergenz $z_n \to a$ für ein $a \in \mathbb{C}$ gilt genau dann, wenn $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} a$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} a$.

(b) Die Folge $\{z_n\}$ ist Cauchy-Folge genau dann, wenn $\{\operatorname{Re} z_n\}$ und $\{\operatorname{Im} z_n\}$ Cauchy-Folgen sind.

(c) (Cauchy-Kriterium) Die Folge $\{z_n\}$ ist konvergent genau dann, wenn $\{z_n\}$ Cauchy-Folge ist.

Satz 4.12 *(Rechenregeln)* Seien $\{z_n\}$ und $\{w_n\}$ zwei komplexwertige konvergente Folgen mit $z_n \to a$ und $w_n \to b$. Dann gelten

$$z_n + w_n \to a + b, \quad z_n - w_n \to a - b, \quad z_n w_n \to ab, \quad \frac{z_n}{w_n} \to \frac{a}{b}$$

wobei im letzten Teil vorausgesetzt ist, dass $w_n \neq 0$ und $b \neq 0$.

4.10 Intervallschachtelungsprinzip

Definition. Eine Folge $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen heißt eine *Intervallschachtelung* wenn $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.13 *(Intervallschachtelungsprinzip)* Sei $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Intervallschachtelung, wobei alle Intervalle I_n abgeschlossen und beschränkt sind. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nichtleer.

Chapter 5

Reihen

5.1 Reellwertige Reihen

Definition. Setzen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n,$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.

Der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist nur dann definiert wenn die Folge $\{S_n\}$ konvergent oder bestimmt divergent ist. Ist $\{S_n\}$ unbestimmt divergent, so ist der Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht definiert. Man sagt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent bzw bestimmt divergent bzw unbestimmt divergent ist, wenn gleiches für die Folge $\{S_n\}$ gilt.

Beispiel. Betrachten wir die *geometrische* Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + ...$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Für $x \neq 1$ ist die Partialsumme gleich

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \tag{5.1}$$

(Aufgabe 31). Im Fall $x \in (-1, 1)$ erhalten wir $x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, woraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - x}. \tag{5.2}$$

Im Fall $x > 1$ folgt es aus (5.1) und $x^{n+1} \to +\infty$ dass

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \to +\infty \ \text{ für } \ n \to \infty,$$

so dass $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = +\infty$. Im Fall $x = 1$ gilt (5.1) nicht, aber wir haben $S_n = n + 1$ und somit wieder $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \infty$.

Für $x \leq -1$ hat die Folge $\{x^{n+1}\}$ und somit $\{S_n\}$ keinen Grenzwert, woraus folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ unbestimmt divergiert.

Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *nichtnegativ* wenn alle Glieder a_k nichtnegative reelle Zahlen sind.

Satz 5.1 Für jede nichtnegative Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist ihre Summe immer definiert als Element von $[0, +\infty]$. Mit anderen Worten gibt es nur zwei Möglichkeiten:

1. entweder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert;
2. oder $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ und die Reihe bestimmt divergiert.

Beispiel. Betrachten wir die *harmonische* Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

und zeigen, dass sie bestimmt divergent ist, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \tag{5.3}$$

Dafür bemerken wir, dass für die Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \tag{5.4}$$

die folgende Eigenschaft gilt

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

Somit ist die Cauchy-Bedingung für die Folge $\{S_n\}$ nicht erfüllt, und die Folge $\{S_n\}$ ist nicht konvergent. Da die harmonische Reihe nicht-negative ist und somit ihre Summe definiert ist, es folgt, dass die Summe gleich $+\infty$ ist, d.h. (5.3).

Bemerken wir, dass die Folge $\{S_n\}$ von Partialsummen sehr langsam steigt, zum Beispiel

$$S_{1000} = 7,485 \ldots, \quad S_{10\,000} = 9,787 \ldots, \quad S_{100\,000} = 12,090 \ldots, \quad S_{1\,000\,000} = 14,392 \ldots$$

Beispiel. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

(siehe Aufgabe 82). In der Tat gilt es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1,644\,934...$$

Satz 5.2 Gilt $0 \le a_k \le b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

5.2 Komplexwertige Reihen

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, wenn die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ von *Partialsummen* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergent ist (sonst heißt die Reihe divergent). Der Summe (der Wert) der konvergenten Reihe wird wie folgt definiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Satz 5.3 Für $a_k, b_k, c \in \mathbb{C}$ gelten die Identitäten

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{5.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

vorausgesetzt, dass die rechten Seiten bestimmt sind.

Satz 5.4 (a) *(Restreihe-Kriterium)* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent genau dann, wenn die Restreihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent ist (für jedes $m \in \mathbb{N}$).

(b) *(Trivialkriterium)* Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim a_k = 0$.

Beispiel. Betrachten wir die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $x \in \mathbb{C}$. Genauso wie im reellen Fall erhalten wir im Fall $|x| < 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \to \frac{1}{1 - x} \quad \text{für } n \to \infty,$$

(siehe (5.1)) da $|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \to 0$. Somit gilt im Fall $|x| < 1$ die Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

Im Fall $|x| \ge 1$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ divergent, da $\left|x^k\right| = |x|^k \ge 1$ und somit $\left\{x^k\right\}$ keine Nullfolge ist.

5.3 Majorantenkriterium und absolute Konvergenz

Satz 5.5 *(Majorantenkriterium, Vergleichskriterium)* Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexwertige Reihe und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine reellwertige, nicht-negative konvergente Reihe. Gilt

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{5.7}$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch konvergent und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{5.8}$$

Definition. Eine komplexwertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Korollar 5.6 Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist sie konvergent. Es gilt auch

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{5.9}$$

Beispiel. Betrachten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}$$

wobei $\{c_k\}$ eine beliebige beschränkte Folge von komplexen Zahlen (zum Beispiel, $c_k = i^k$ oder $c_k = (-1)^k$). Wir behaupten, dass diese Reihe absolut konvergiert. Sei C eine obere Schranke der Folge $\{|c_k|\}$. Da

$$\left|\frac{c_k}{k^2}\right| \leq \frac{C}{k^2}$$

und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k^2} = C \sum \frac{1}{k^2}$ konvergent ist, so erhalten wir nach dem Satz 5.5 dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}$ absolut konvergent (und somit auch konvergent) ist.

Beispiel. Es gibt die Reihen, die konvergent aber nicht absolut konvergent sind, zum Beispiel, die *Leibniz-Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Wir beweisen unterhalb, dass diese Reihe konvergiert. Allerdings ist diese Reihe nicht absolut konvergent da die Reihe von den Beträgen die harmonische Reihe ist, die divergiert.

5.4 Quotientenkriterium

Satz 5.7 *(Quotientenkriterium, d'Alembert-Kriterium)* Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine komplexwertige Folge mit $a_n \neq 0$ für alle n. Gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beispiel. Betrachten wir wieder die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \tag{5.10}$$

wobei $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $a_n = \frac{x^n}{n^2}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)^2 x^n}\right| = |x| .$$

Folglich ist die Reihe (5.10) absolut konvergent für $|x| < 1$, und divergent für $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ ist die Reihe (5.10) auch absolut konvergent da $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ und die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Betrachten wir auch eine ähnliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

In diesem Fall gilt es auch

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| ,$$

und das Quotientenkriterium ergibt: im Fall $|x| < 1$ ist die Reihe absolut konvergent, und im Fall $|x| > 1$ ist sie divergent. Allerdings ist der Fall $|x| = 1$ unterschiedlich. Für $x = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

die bestimmt divergent ist. Im Fall $x = -1$ erhalten wir die Leibniz-Reihe, die konvergent ist aber nicht absolut (siehe Section **??**).

5.5 Exponentialreihe und die Zahl e

Definition. Sei $x \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + ...$$

heißt die *Exponentialreihe.*

Behauptung. Die Exponentialreihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{C}$.

Definition. Die Summe der Exponentialreihe heißt die *Exponentialfunktion* von $x \in \mathbb{C}$ und wird wie folgt bezeichnet:

$$\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}. \tag{5.11}$$

5.6 Eigenschaften der Exponentialfunktion

Hauptsatz 5.8 Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt die Identität

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}. \tag{5.12}$$

Satz 5.9 (a) Für jedes $x \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(x) \neq 0$.
(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x)$ reell und positiv.
(c) Für reelle $x > y$ gilt $\exp(x) > \exp(y)$ (d.h. die Funktion $\exp(x)$ ist streng monoton steigend)
(d) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(k) = e^k$ wobei $e = \exp(1)$.
(e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(ix)| = 1$.

Definition. Für alle $x \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$\boxed{e^x := \exp(x)}.$$

5.7 Hyperbelfunktionen

Definition. Die Hyperbelfunktionen *Kosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* werden für alle $x \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

$$\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}.$$

Satz 5.10 Die Hyperbelfunktionen erfüllen die folgenden Identitäten für alle $x, y \in \mathbb{C}$.
(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
(b) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,\\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.\end{aligned}$$

(c) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

5.8 Trigonometrische Funktionen

Definition. Die trigonometrische Funktionen *Kosinus* und *Sinus* werden für alle $x \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}, \tag{5.13}$$

wobei i die imaginäre Einheit ist.

Satz 5.11 Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Identitäten.
(a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
(b) Additionstheoreme:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{5.14}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{5.15}$$

(c) Kosinusreihe und Sinusreihe:

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots} \tag{5.16}$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots} \tag{5.17}$$

Insbesondere sind $\cos x$ und $\sin x$ reell sind für alle $x \in \mathbb{R}$.

5.9 Bedingte Konvergenz

Definition. Eine Reihe heißt *bedingt konvergent* when die konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Satz 5.12 (*Leibniz-Kriterium*) Sei $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge von nicht-negativen reellen Zahlen mit $c_k \to 0$. Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - ... \tag{5.18}$$

konvergent. Darüber hinaus erfüllen die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k c_k$ die Ungleichungen

$$S_{2m-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k \leq S_{2m} \tag{5.19}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beispiel. Die Leibniz-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium, da die Folge $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ monoton fallend ist und $\frac{1}{n} \to 0$. Andererseits ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, so dass die Konvergenz der Leibniz-Reihe bedingt ist.

Chapter 6

Stetige Funktionen einer reellen Variablen

6.1 Grenzwert einer Funktion

Definition. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien a und b reelle Zahlen, $a \in \overline{J}$. Man sagt dass die Funktion $f(x)$ für $x \to a$ den Grenzwert b hat und schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{und auch} \quad f(x) \to b \text{ für } x \to a,$$

wenn

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in J \quad \text{mit} \quad 0 < |x - a| < \delta \ \text{ gilt } \ |f(x) - b| < \varepsilon.} \tag{6.1}$$

Satz 6.1 *(Äquivalente Definition von* lim*)* Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien a und b reelle Zahlen, $a \in \overline{J}$. Dann sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

(*i*) $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

(*ii*) Für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $J \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Beispiel. Betrachten wir die folgende Funktion auf $J = \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

wobei c eine beliebige reelle Zahl ist, und bestimmen $\lim_{x\to 0} f(x)$. Für jede Folge $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to 0$ haben wir

$$|f(x_n)| = \left| x_n \sin \frac{1}{x_n} \right| \leq |x_n|$$

da $|\sin z| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$ (da $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$). Da $|x_n| \to 0$, so erhalten wir $f(x_n) \to 0$ und somit $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Definition. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Seien $a \in \overline{J}$ und $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Man sagt dass die Funktion $f(x)$ für $x \to a$ den Grenzwert b hat und schreibt

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{oder} \quad f(x) \to b \text{ für } x \to a,$$

wenn

$$\boxed{\forall V(b) \;\; \exists U(a) \;\; \forall x \in J \cap \dot{U}(a) \text{ gilt } f(x) \in V(b),} \tag{6.2}$$

wobei $U(a)$ und $V(b)$ Umgebungen von a und b bezeichnen.

Satz 6.2 *(Rechenregeln für* $\lim$*)* Seien $f, g : J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf einem Intervall J und sei $a \in \overline{J}$. Nehmen wir an dass

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \;\text{ und }\; \lim_{x \to a} g(x) = c,$$

wobei $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

(a) Es gelten die Identitäten

$$\lim_{x \to a} (f \pm g) = b \pm c, \quad \lim_{x \to a} (fg) = bc, \quad \lim_{x \to a} \frac{f}{g} = \frac{b}{c} \tag{6.3}$$

vorausgesetzt, dass die Ausdrücke in den rechten Seiten bestimmt sind (und $g \neq 0$ im Fall der Division).

(b) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in J$, so gilt auch $b \leq c$.

(c) Seien f, g, h drei Funktionen auf J mit $f \leq h \leq g$ und

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x \to a} h(x) = b.$$

Beispiel. 1. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ da für jede Folge $x_n \to +\infty$ gilt $\sqrt{x_n} \to \infty$ (für jedes $E > 0$ gilt $\sqrt{x_n} > E$ für fast alle n weil $x_n > E^2$ für fast alle n).

2. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ da für $x > 0$ gilt $e^x > x$ und $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

3. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ da für jede Folge $x_n \to -\infty$ gilt $-x_n \to +\infty$ und somit

$$e^{x_n} = \frac{1}{e^{-x_n}} \to \frac{1}{+\infty} = 0.$$

4. Bestimmen wir den Grenzwert $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$. Wir haben

$$\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = (x + 1)(\sqrt{x} + 1).$$

Für jede Folge $x_n \to 1$ haben wir $\sqrt{x_n} \to 1$ (Aufgabe 59), woraus folgt $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$ und und somit

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) \lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x} + 1\right) = 4.$$

Z.B., für $x = 1.01$ gilt $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = 4.030...$

6.2 Stetige Funktionen

Definition. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *stetig* an einer Stelle $a \in J$ wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{6.4}$$

Sonst heißt f *unstetig* an a. Ist f stetig an allen $a \in J$, so heißt f stetig auf J (oder einfach stetig).

Satz 6.3 *(Äquivalente Definition von Stetigkeit)* Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in J$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) f ist stetig an a;

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in J \cap U_\delta(a)$ gilt $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$;

(iii) für jede Folge $\{x_n\} \subset J$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$.

Beispiel. 1. Es ist offensichtlich, dass die folgenden Funktionen $f(x) = \text{const}$ und $f(x) = x$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind.

2. Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0, \infty)$, da nach Aufgabe 59 für jede konvergente Folge $\{x_n\}$ von nichtnegative reellen Zahlen mit $x_n \to a$ gilt $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$.

3. Die Funktion $f(x) = e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ da nach Aufgabe 90 für jede konvergente Folge $\{x_n\}$ von reellen (und auch komplexen) Zahlen mit $x_n \to a$ gilt $e^{x_n} \to e^a$.

4. Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von reellen Zahlen mit $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Dann haben wir $ix_n \to ia$ und somit auch $e^{ix_n} \to e^{ia}$ (wieder nach Aufgabe 90). Es folgt nach dem Satz 4.11 dass

$$\cos x_n = \operatorname{Re} e^{ix_n} \to \operatorname{Re} e^{ia} = \cos a$$

und analog

$$\sin x_n = \operatorname{Im} e^{ix_n} \to \operatorname{Im} e^{ia} = \sin a,$$

so dass $\cos x$ und $\sin x$ stetig sind.

5. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

ist unstetig an $a = 0$, da für die Folge $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ gilt $f(x_n) \to 1 \ne f(0)$.

Satz 6.4 *(Operationen mit stetigen Funktionen)* Seien $f, g : J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Sind f und g stetig an der Stelle $a \in J$, so sind auch die Funktionen $f + g$, $f - g$, fg, f/g stetig an a (im Fall f/g vorausgesetzt $g \ne 0$).

Sind f, g stetig auf J, so sind $f + g$, $f - g$, fg, f/g auch stetig auf J (im Fall f/g vorausgesetzt $g \ne 0$).

Beispiel. 1. Da die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \text{const}$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind, so folgt es, dass jede Funktion $h(x) = cx^n$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist, für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass jedes *Polynom*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist (wobei $c_k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

2. Betrachten wir eine *rationale* Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ wobei P und Q zwei Polynome sind. Dann ist R definiert und stetig auf jedem Intervall J wo $Q \neq 0$.

3. Die Funktionen $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ da e^x und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ stetig sind.

6.3 Zusammengesetzte Funktion

Satz 6.5 *(Grenzwert einer Komposition)* Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen die auf den Intervallen A und B definiert sind. Nehmen wir an, dass $f(A) \subset B$ so dass die Komposition $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definiert ist, Nehmen wir auch an, dass für einige $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ gelten

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{und} \quad \lim_{y \to b} g(y) = c.$$

Im Fall $b \in B$ nehmen wir auch an, dass g an b stetig ist, d.h. $g(b) = c$. Dann gilt

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = c. \tag{6.5}$$

Satz 6.6 *(Komposition von stetigen Funktionen)* Seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei $A, B \subset \mathbb{R}$. Sei die Komposition $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ wohldefiniert (d.h. $f(A) \subset B$). Ist f stetig an $a \in A$ und g stetig an $b = f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig an a.

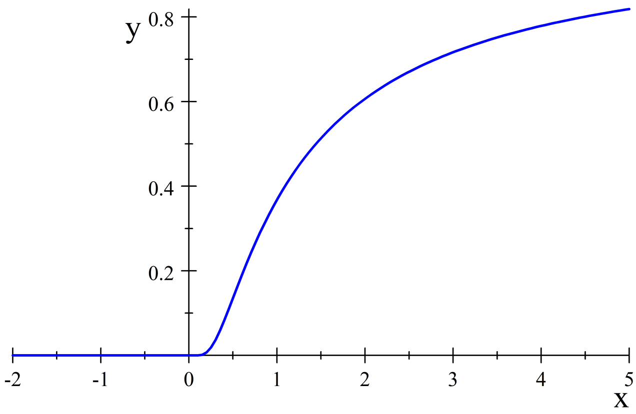
Ist f stetig auf A und g – auf B, so ist $g \circ f$ stetig auf A.

Beispiel. Für jede rationale Funktion $R(x)$ sind die Funktionen $e^{R(x)}$ und $R(e^x)$ stetig im Definitionsbereich. Die Funktionen $e^{\sin x}$ und $\sin(e^x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \tag{6.6}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Aufgabe 104).



Der Graph der Funktion (6.6)

6.4 Zwischenwertsatz

Hauptsatz 6.7 (*Zwischenwertsatz*) Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$, wobei $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Gelten $f(a)<0$ und $f(b)>0$, so existiert ein $x \in (a,b)$ mit $f(x)=0$.

Beispiel. Sei $P(x)$ ein Polynom von Grad n mit reellen Koeffizienten der Form

$$P(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_n,$$

wobei $c_k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen wir die folgende Aussage: ist n ungerade, so existiert eine reelle Nullstelle von P, d.h. ein $x \in \mathbb{R}$ mit $P(x)=0$. Bemerken wir zuerst, dass

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n \left(1 + \frac{c_1}{x} + ... + \frac{c_n}{x^n}\right) = (+\infty)^n \cdot 1 = +\infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(1 + \frac{c_1}{x} + ... + \frac{c_n}{x^n}\right) = (-\infty)^n \cdot 1 = -\infty,$$

wobei wir verwendet haben dass n ungerade ist. Somit existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $P(a)<0$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $P(b)>0$. Da P stetig ist, so existiert nach dem Satz 6.7 ein $x \in \mathbb{R}$ mit $P(x)=0$.

Satz 6.8 *(Bildmenge stetiger Funktionen)* Sei $f: J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Dann ist das Bild $f(J)$ ein Intervall und zwar mit den Grenzen $\inf f$ und $\sup f$.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x)=x^n$ auf $J=[0,+\infty)$ wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen wir, dass

$$f(J) = [0,+\infty). \tag{6.7}$$

Es ist klar dass

$$f(J) \subset [0,+\infty).$$

Da $\inf f = 0$ und $\sup f = +\infty$ so erhalten wir nach dem Satz 6.8

$$f(J) \supset (0, +\infty).$$

Da offensichtlich auch $0 \in f(J)$, so erhalten wir $f(J) \supset [0, +\infty)$, woraus (6.7) folgt.

Beispiel. Beweisen wir, dass

$$\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty). \tag{6.8}$$

Nach dem Satz 5.9 haben wir

$$\exp(\mathbb{R}) \subset (0, +\infty) \tag{6.9}$$

Da

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0,$$

so erhalten wir

$$\sup \exp = +\infty \quad \text{und} \quad \inf \exp = 0.$$

Nach dem Satz 6.8 gilt $\exp(\mathbb{R}) \supset (0, +\infty)$, was zusammen mit (6.9) ergibt (6.8).

6.5 Monotone Funktionen und inverse Funktion

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f &: [0, +\infty) \to [0, +\infty) \\ f(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Da die Bedingung $y = x^2$ für nichtnegative x und y äquivalent zu $x = \sqrt{y}$ ist, so sehen wir, dass die inverse Funktion f^{-1} existiert und $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Für die Funktion

$$\begin{aligned} f &: (0, +\infty) \to (0, +\infty) \\ f(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ist die Bedingung $y = \frac{1}{x}$ äquivalent zu $x = \frac{1}{y}$. Deshalb erhalten wir $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf einem Intervall J heißt *monoton steigend* wenn für alle $x, y \in J$

$$x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y).$$

Die Funktion heißt *streng* monoton steigend wenn für alle $x, y \in J$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Analog ist f *monoton fallend* wenn für alle $x, y \in J$

$$x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$$

und streng monoton fallend wenn für alle $x, y \in J$

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Hauptsatz 6.9 *(Existenz der inversen Funktion)* Sei f eine stetige streng monoton steigende (bzw fallende) Funktion auf einem Intervall J. Dann ist die Bildmenge $I = f(J)$ auch ein Intervall und die inverse Funktion $f^{-1} : I \to J$ existiert, ist stetig und streng monoton steigend (bzw fallend).

Beispiel. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) ist stetig und streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$. Da ihre Bildmenge ist $[0, +\infty)$, so existiert die inverse Funktion f^{-1} auf $[0, +\infty)$. Diese Funktion heißt die n-te Wurzel und wird mit $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ bezeichnet, so dass

$$y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} \quad \forall x, y \geq 0.$$

Die Funktion $\sqrt[n]{y}$ ist somit stetig und streng monoton steigend auf $[0, +\infty)$.

6.6 Logarithmische Funktion

Mit Hilfe von dem Satz 6.9 bestimmen wir die inverse Funktion der Exponentialfunktion. Die Funktion e^x ist stetig, streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$, und die Bildmenge von e^x ist $(0, +\infty)$. Nach dem Satz 6.9 mit $J = \mathbb{R}$ und $I = (0, +\infty)$ hat e^x die inverse Funktion mit dem Definitionsbereich $(0, +\infty)$ und Bildmenge $\mathbb{R}$.

Definition. Die inverse Funktion von e^x mit dem Definitionsbereich $(0, +\infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wird mit ln bezeichnet.

Definition. Für jede reelle Zahl $a > 0$ und jedes $x \in \mathbb{C}$ definieren wir die Potenz a^x wie folgt:

$$\boxed{a^x := e^{x \ln a}}. \tag{6.10}$$

Die Funktion $f(x) = a^x$ heißt die *Exponentialfunktion* zur Basis a.

Definition. Die inverse Funktion von a^x heißt *der Logarithmus zur Basis* a und wird mit $\log_a y$ bezeichnet, d.h.

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}. \tag{6.11}$$

6.7 Die Zahl π und die Periodizität von sin und cos

Satz 6.10 Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ haben die folgenden Eigenschaften.

(*a*) $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, 2]$.

(*b*) $\cos x$ hat in $(0, 2)$ genau eine Nullstelle c.
Darüber hinaus gilt $\cos x > 0$ für alle $x \in [0, c)$ und $\cos x < 0$ für alle $x \in (c, 2]$.

(*c*) $c > \frac{3}{2}$.

Definition. Definieren wir die π-Zahl (die *Kreiszahl*) mit

$$\boxed{\pi := 2c},$$

wobei c die kleinste positive Nullstelle von $\cos x$ ist, die nach dem Satz 6.10 existiert.

Satz 6.11 (a) Es gelten die Identitäten

$$\boxed{e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1.}$$

(b) Die Funktion e^z ist $2\pi i$ periodisch auf $\mathbb{C}$, d.h.

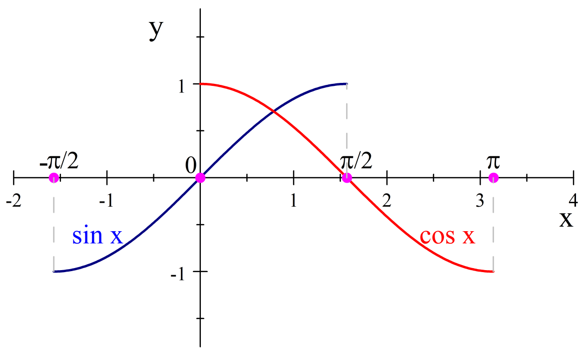
$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{6.12}$$

(c) Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind 2π periodisch auf $\mathbb{C}$, d.h.

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \ \text{ und } \ \cos(x+2\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

6.8 Inverse trigonometrische Funktionen

Satz 6.12 (a) Die Funktion $\sin x$ ist streng monoton steigend in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
(b) Die Funktion $\cos x$ ist streng monoton fallend in $[0, \pi]$.



Definition. Die inverse Funktion von sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$ heißt *Arkussinus* wird mit arcsin bezeichnet.

Definition. Die inverse Funktion von cos auf $[0, \pi]$ heißt *Arkuscosinus* und wird mit arccos bezeichnet.

6.9 Extremwertsatz

Hauptsatz 6.13 *(Extremwertsatz oder Satz vom Minimum und Maximum)* Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall J. Dann existieren auf J die beiden Werte $\max f$ und $\min f$.

Korollar 6.14 Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall J. Dann ist das Bild $f(J)$ auch ein abgeschlossenes beschränktes Intervall; darüber hinaus gilt

$$f(J) = [\min f, \max f].$$

Chapter 7

Differentialrechnung

7.1 Ableitung

Definition. Die *Ableitung* der Funktion f an einer Stelle $x \in J$ ist der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Ist der Grenzwert endlich, so heißt f *differenzierbar* in $x \in J$ (sonst ist f in x nicht differenzierbar). Ist f an allen Stellen $x \in J$ differenzierbar, so sagt man, dass f im Intervall J differenzierbar ist. In diesem Fall ist die Ableitung f' auch eine Funktion auf J.

Beispiel. Berechnen wir die Ableitungen der folgenden Funktionen.

1. Für die lineare Funktion $f(x) = \alpha x + \beta$ gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\alpha(x+h) + \beta - (\alpha x + \beta)}{h} = \frac{\alpha h}{h} = \alpha$$

woraus folgt $f'(x) = \alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit gilt

$$(\alpha x + \beta)' = \alpha.$$

Im Fall $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ gilt

$$(x)' = 1,$$

und im Fall $\alpha = 0$ d.h. $f(x) = \text{const}$, gilt

$$(\text{const})' = 0.$$

2. Für $f(x) = x^2$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x,$$

daher

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

3. Für $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)\,x} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)\,x} = -\frac{1}{x^2},$$

so dass

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{7.1}$$

Satz 7.1 Es gelten die folgenden Identitäten: für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}, \tag{7.2}$$

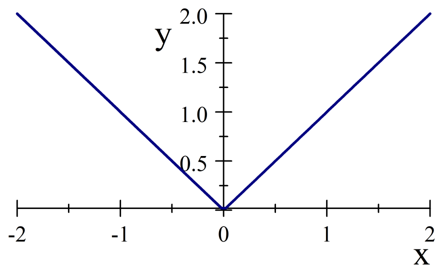
$$\boxed{(e^x)' = e^x},$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x},$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Satz 7.2 Ist die Funktion f differenzierbar an x, so ist f stetig an x.

Beispiel. Allerdings reicht die Stetigkeit für die Differenzierbarkeit nicht. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Aufgabe 104) aber an der Stelle $x = 0$ ist sie nicht differenzierbar.



Die Funktion $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

In der Tat, für jedes $y > 0$ haben wir $|y| = y$ und somit

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = 1,$$

während für $y < 0$ gilt $|y| = -y$ und somit

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = -1.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0}$$

nicht existiert und f an $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Definition. Die Gerade mit der Gleichung

$$\boxed{l(x) = f'(a)(x-a) + f(a)} \tag{7.3}$$

heißt die *Tangente* zum Graph von $f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$.

Beispiel. Für $f(x) = x^3$ erhalten wir aus (7.3) die Gleichung der Tangente im Punkt (a, a^3):

$$l(x) = 3a^2(x-a) + a^3.$$

Zum Beispiel, die Gleichung der Tangente im Punkt $(1,1)$ (entspricht zu $a = 1$) ist $y = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$.

7.2 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 7.3 Seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, die differenzierbar in $x \in J$ sind. Dann sind die Funktionen $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ auch differenzierbar in x (im Fall von f/g vorausgesetzt $g \neq 0$) und die folgenden Identitäten gelten at der Stelle x:

(a) *Summenregel:*

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'.} \tag{7.4}$$

(b) *Produktregel oder Leibnizregel:*

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'.} \tag{7.5}$$

(c) *Quotientenregel:*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.} \tag{7.6}$$

Sind f und g in J differenzierbar so gelten diese Identitäten auch in J.

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion $x^2 \sin x$. Wir haben

$$\left(x^2 \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Nach der Quotientenregel haben wir

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

d.h.

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} = 1 + \tan^2 x.$$

Analog beweist man, dass für

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

gilt

$$\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

7.3 Kettenregel

Satz 7.4 *(Kettenregel)* Seien f eine Funktion auf einem Intervall A und g eine Funktion auf einem Intervall B, so dass die Verkettung $g \circ f$ definiert ist (d.h. $f(A) \subset B$). Sei f differenzierbar in einem $x \in A$ und g differenzierbar in $y = f(x) \in B$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x und es gilt

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(y)\, f'(x)} = g'(f(x))\, f'(x)\,. \tag{7.7}$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion e^{cx} wobei $c \in \mathbb{R}$. Wir diese Funktion als eine Verkettung dar:

$$e^{cx} = e^y \quad \text{mit} \quad y = cx.$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$(e^{cx})' = (e^y)'\,(cx)' = e^y c = ce^{cx}.$$

Insbesondere, für $a > 0$, haben wir $a^x = e^{x \ln a}$ und somit

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitungen von den Hyperbelfunktionen. Wir haben

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x,$$

und analog gilt

$$(\sinh x)' = \cosh x.$$

Mit Hilfe von den Quotientenregel erhält man

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Beispiel. Die Funktion $e^{\sin x^2}$ist eine Verkettung dreier Funktionen:

$$e^{\sin x^2} = e^z \quad \text{mit} \quad z = \sin y \quad \text{und} \quad y = x^2.$$

Somit erhalten wir

$$e^{\sin x^2} = (e^z)' (\sin y)' \left(x^2\right)' = e^z (\cos y) (2x) = 2xe^{\sin x^2} \cos x^2.$$

7.4 Ableitung der inversen Funktion

Satz 7.5 *(Ableitung der inversen Funktion)* Sei f eine stetige streng monotone Funktion auf einem Intervall J, so dass die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$ definiert ist. Nehmen wir an, dass f differenzierbar in einem $x \in J$ ist und dass $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $y = f(x)$ und es gilt

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}. \tag{7.8}$$

Beispiel. Sei $f(x) = e^x$ auf $J = \mathbb{R}$. Die inverse Funktion von e^x ist $\ln y$ auf $I = (0, +\infty)$. Nach (7.8) erhalten wir für $y = e^x$

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y},$$

d.h.

$$\boxed{(\ln y)' = \frac{1}{y}}.$$

Ersetzen y durch x ergibt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

7.5 Weitere Beispiele von Berechnung der Ableitung

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Potenzfunktion x^a im Definitionsbereich $x \in (0, +\infty)$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Wir haben nach Definition

$$x^a = e^{a \ln x} = e^{ay} \text{ mit } y = \ln x.$$

Nach der Kettenregel erhalten wir

$$(x^a)' = (e^{ay})' (\ln x)' = ae^{ay}\frac{1}{x} = ax^a\frac{1}{x} = ax^{a-1},$$

d.h.

$$\boxed{(x^a)' = ax^{a-1}.}$$

Für $a \in \mathbb{N}$ haben wir diese Identität schon früher bewiesen. Für $a = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

und für $\alpha = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

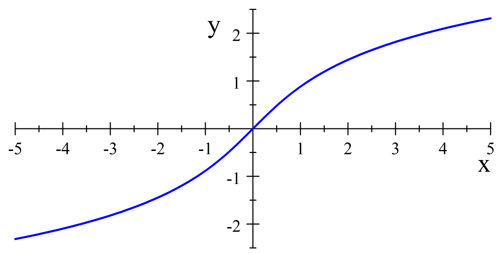
Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung von $\sqrt{x^2+1}$. Wir haben

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y} \text{ mit } y = x^2+1,$$

woraus folgt

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = (\sqrt{y})' \left(x^2+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ("der lange Logarithmus").



Funktion $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Wir haben

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \ln y \quad \text{mit } y = x+\sqrt{x^2+1}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' &= (\ln y)' \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{1}{y}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\end{aligned}$$

d.h.

$$\boxed{\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}.$$

Beispiel. Bestimmen wir die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$. Da

$$x^x = e^{x \ln x} = e^y \text{ mit } y = x \ln x,$$

so erhalten wir

$$(x^x)' = (e^y)' (x \ln x)' = e^y \left((x)' \ln x + x (\ln x)' \right) = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

Beispiel. Betrachten wir $f(x) = \sin x$ auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ so dass $f^{-1}(y) = \arcsin y$ mit $y \in [-1, 1]$. Es folgt, dass für $y = \sin x$ gilt

$$(\arcsin y)' = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Da auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt $\cos x > 0$ (insbesondere $\cos x \neq 0$) und

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2},$$

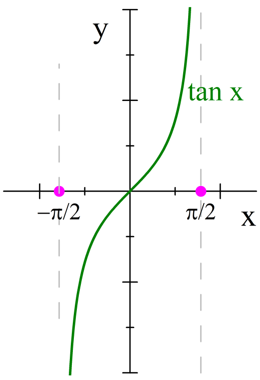
so folgt es, dass für $y \in (-1, 1)$

$$\boxed{(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}.$$

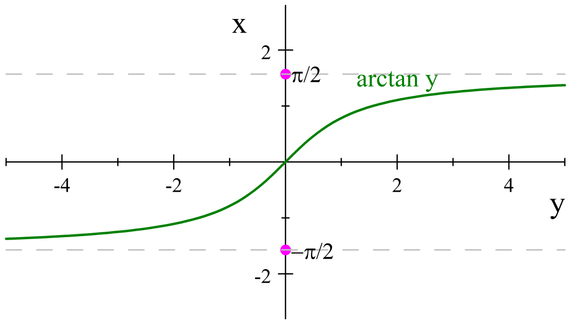
Analog beweist man, dass

$$\boxed{(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}}.$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ im Definitionsbereich $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ wo $\cos x \neq 0$ und somit $\tan x$ wohldefiniert ist. Da $\sin x$ und $\cos x$ positiv in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sind, $\sin x$ streng monoton steigend in diesem Intervall, und $\cos x$ streng monoton fallend ist, so ist $\tan x$ positive und streng monoton steigend in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Da $\tan x$ offensichtlich ungerade ist, so ist $\tan x$ streng monoton steigend auf in J.



Somit existiert die inverse Funktion von $\tan x$, die *Arkustangens* heißt und mit arctan bezeichnet wird. Da $\cos x \to 0$ und $\sin x \to 1$ für $x \to \frac{\pi}{2}$ so erhalten wir dass $\sup \tan = +\infty$ und analog $\inf \tan = -\infty$. Somit hat arctan den Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$ und die Bildmenge $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Wir haben oberhalb gesehen, dass

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$$

Es folgt aus (7.8) dass

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2},$$

d.h.

$$\boxed{(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}.}$$

Beispiel. Die Funktion $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ da die beiden Funktion e^x und $-e^{-x}$ streng monoton steigend ist. Da sinh stetig ist und

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty,$$

so ist die Bildmenge von sinh gleich $\mathbb{R}$. Somit existiert die inverse Funktion $\sinh^{-1} y$ mit dem Definitionsbereich $y \in \mathbb{R}$ und Bildmenge $\mathbb{R}$. Da

$$(\sinh x)' = \cosh x > 0,$$

so erhält man nach dem Satz 7.5 dass

$$\left(\sinh^{-1} y\right)' = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Wir haben oberhalb gesehen, dass auch

$$\left(\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Die Übereinstimmung von den Ableitungen von $\sinh^{-1} y$ und $\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ ist kein Zufall, da diese zwei Funktionen identisch gleich sind.

Beispiel. Die Funktion $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist $[0, +\infty)$ streng monoton steigend da

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und jedes Glied x^{2k} streng monotone steigend auf $[0, +\infty)$ ist. Da $\cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so liegt die Bildmenge von cosh im Intervall $[1, +\infty)$. Da $\cosh 0 = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh x = +\infty$, so erhalten wir das die Bildmenge von cosh gleich $[1, +\infty)$ ist.

Somit ist die inverse Funktion $\cosh^{-1}$ auf $[1, +\infty)$ definiert, und ihre Bildmenge ist $[0, +\infty)$. Da für $x > 0$ gilt

$$(\cosh x)' = \sinh x > 0$$

so erhält man, dass für $y > 1$

$$\left(\cosh^{-1} y\right)' = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

Man kann zeigen dass

$$\cosh^{-1} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Beispiel. (*Logarithmische Ableitung*) Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J und sei $f(x) > 0$ für alle $x \in J$. Dann ist auch die Funktion $\ln f(x)$ wohldefiniert, und mit Hilfe von der Kettenregel und der Substitution $y = f(x)$ erhalten wir

$$(\ln f(x))' = (\ln y)' f'(x) = \frac{1}{y} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

woraus folgt

$$\boxed{f'(x) = f(x)(\ln f(x))'}. \tag{7.9}$$

Die Funktion $(\ln f(x))'$ heißt die *logarithmische Ableitung* der Funktion f. Häufig ist es einfacher $(\ln f)'$ zu bestimmen als f'. Danach bestimmt man auch f' mit Hilfe von (7.9).

Zum Beispiel, betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \tag{7.10}$$

für $x \in (0, +\infty)$. Die Funktion (7.10) ist eine Approximation von $n!$: es ist bekannt dass $n! \approx f(n)$ für große n und sogar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{f(n)} = 1.$$

Diese Identität heißt die *Stirling-Formel.* Zum Beispiel, für $n = 20$ gilt $n! \approx 2\,432 \times 10^{15}$ und $f(n) \approx 2\,423 \times 10^{15}$ so dass

$$\frac{n!}{f(n)} \approx 1,004\,.$$

Bestimmen wir die Ableitung von f mit Hilfe von (7.9). Wir haben

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(2\pi x) + x \ln\frac{x}{e} = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln x + x\ln x - x.$$

und somit

$$\begin{aligned}
(\ln f(x))' &= \frac{1}{2}(\ln x)' + (x \ln x)' - (x)' \\
&= \frac{1}{2x} + \big((x)' \ln x + x (\ln x)'\big) - 1 \\
&= \frac{1}{2x} + \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) - 1 = \frac{1}{2x} + \ln x,
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{2x} + \ln x\right) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(\frac{1}{2x} + \ln x\right).$$

Ende. Fortsetzung in Analysis II