Prof. A. Grigoryan, Analysis 2 SS 2021

Blatt 0 - Keine Abgabe

1. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

   (a) Mit Hilfe von den Rechenregeln:

   (i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$ (ii) $x^3\sqrt[3]{x^2}+x^7\sqrt[3]{x}$ (iii) $\dfrac{3x+1}{5x+2}$ (iv) $(x+1)(x+2)^3$

   (v) $\dfrac{x}{1+x^2}$ (vi) $x\ln x$ (vii) $\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x$ (viii) $\left(1-x^2\right)\arccos x$

   (b) Mit Hilfe von der Kettenregel:

   (i) e^{-x^2} (ii) $\sin^2 x$ (iii) $\ln\tan x$ (iv) $\sqrt{1-x^2}$ (v) $\sin\left(\cos^2 x\right)$

   (vi) $\ln\ln x$ (vii) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (viii) $\arctan\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

2. Mit Hilfe von der Regel von l'Hôspital bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\arccos x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cosh x-\cos x}{x^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

   (iv) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$ (v) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x^2}$ (vii) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ wobei $a,b>0$

3. Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J.

   (a) Gilt $f'(a)<0$ und $f'(b)>0$ für einige $a,b\in J$, so gibt es ein $c\in J$ mit $f'(c)=0$.
   Vorsicht: Die Ableitung f' ist nicht unbedingt stetig, so dass der Zwischenwertsatz nicht benutzbar ist. Verwenden Sie stattdessen den Satz von Fermat.

   (b) Gilt $f'(x)\neq0$ für alle $x\in J$ so ist f streng monoton auf J. Beschließen Sie: die inverse Funktion f^{-1} existiert und ist differenzierbar im Definitionsbereich $I=f(J)=J$.

4. Untersuchen Sie jede von den gegebenen Funktionen $f(x)$ mit Hilfe von Ableitung und skizzieren ihren Graph. Dafür bestimmen Sie alle kritischen Punkte, Intervalle von Monotonie und lokale Extremumstellen.

   (a) $f(x)=x^2e^{-x}$ auf $(1,3)$.

   (b) $f(x)=x\ln^2 x$ auf $(0,e)$.

5. Beweisen Sie mit Hilfe von dem Vergleichstest die folgenden Ungleichungen:

   (a) $x\geq\sin x$ für alle $x\geq0$.

   (b) $\cos x\geq1-\frac{x^2}{2}$ für alle $x\in\mathbb{R}$

   (c) $\sin x\geq x-\frac{x^3}{6}$ für alle $x>0$

6. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab:

(i) $(x+1)\tan x$ (ii) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (iii) $\sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

(iv) $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$ (v) $e^x\left(1 + \cot\dfrac{x}{2}\right)$ (vi) $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

(vii) $\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (viii) $\arcsin(\sin x - \cos x)$

7. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereichen der folgenden Funktionen und leiten sie ab:

(i) $\ln|x|$ (ii) $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ (iii) $\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$

8. Mit Hilfe von der Regel von l'Hôspital bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 - 10x + 9}{x^2 - 4x + 3}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\arccos x}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sinh x}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

9. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei f stetig auf einem Intervall J und differenzierbar auf $J\setminus\{a\}$ für ein $a \in J$. Nehmen wir an, dass

$$\lim_{x\to a} f'(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Dann ist f auch in a differenzierbar und es gilt $f'(a) = c$.

(b) Die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar.

10. Für jede Funktion bestimmen Sie die maximalen Intervallen von Monotonie, die Definitionsbereiche von inversen Funktionen und leiten die inversen Funktionen ab.

(i) $f(x) = x + \ln x$ (ii) $f(x) = 2x^2 - x^4$ (iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (iv) $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin x$

11. Untersuchen Sie jede von den gegebenen Funktionen $f(x)$ mit Hilfe von Ableitung und skizzieren ihren Graph. Dafür bestimmen Sie alle kritischen Punkte, Intervalle von Monotonie und lokale Extremumstellen. Für Berechnung der Werte von f dürfen Sie einen Rechner benutzen.

(a) $f(x) = x^x, \quad x \in (0, +\infty)$

(b) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x, \quad x \in (-\pi, \pi)$.

12. Mit Hilfe von dem Vergleichstest beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a) $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ für alle $x \geq 0$.

(c) $x \geq e \ln x$ für alle $x > 0$.

(d) $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ für alle $x \geq 0$.