Blatt 1 - Abgabe bis 23.04.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

13. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

    (a) Mit Hilfe von der Kettenregel:

    $$\text{(i) } e^{\sin x} \qquad \text{(ii) } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{(iii) } \ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right) \qquad \text{(iv) } \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$$

    $$\text{(v) } \arcsin\left(\sin^2 x\right) \qquad \text{(vi) } \ln\sqrt[3]{\frac{e^x}{1+\cos x^2}}$$

    (b) Mit Hilfe von der logarithmischen Ableitung:

    $$\text{(i) } \frac{x^3 e^x}{\cos x} \qquad \text{(ii) } x^4 e^{x^2} \qquad \text{(iii) } (\sin x)^{\cos x}$$

14. Mit Hilfe von der Regel von l'Hôspital bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

    $$\text{(i) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \qquad \text{(ii) } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1} \qquad \text{(iii) } \lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x} \qquad \text{(iv) } \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sinh x}$$

15. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f mit Hilfe von 1^{er} und 2^{er} Ableitungen und skizzieren ihren Graphen. Dafür bestimmen Sie die kritischen Mengen von f und f', die Intervalle von Monotonie und Konvexität von f, und die Extremumstellen und Wendepunkte von f.

    (a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 40, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

    (b) $f(x) = e^x \sin x, \quad x \in (-\pi, \pi)$

16. Mit Hilfe von dem Vergleichstest beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für alle $x \geq 1$.

    (a) $x - \dfrac{1}{x} \geq 2\ln x$

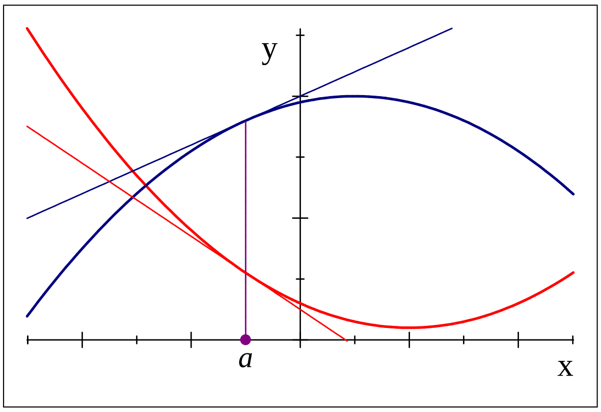
    (b) $2x + \dfrac{4}{x} \geq 5 + \dfrac{1}{x^2} + (\ln x)^2$

17. * Untersuchen Sie die folgenden Funktionen f mit Hilfe von 1^{er} und 2^{er} Ableitungen und skizzieren ihren Graphen. Dafür bestimmen Sie die kritischen Mengen von f und f', die Intervalle von Monotonie und Konvexität, die Extremumstellen und Wendepunkte. Man darf einen Taschenrechner verwenden um die Werte von f zu berechnen.

    (a) $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in (0, +\infty)$

    (b) $f(x) = x^2\ln x, \ x \in (0, +\infty)$

18. * Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall J und sei T die Tangente zum Graph G_f am Punkt $(a, f(a))$ für ein $a \in J$. Beweisen Sie: ist f auf J konvex so liegt T unterhalb des Graphes G_f; ist f auf J konkav, so liegt T oberhalb des Graphes G_f.



Konvexe und konkave Funktionen

19. * (a) Sei $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ eine Folge von verschiedenen reellen Zahlen. Betrachten wir das Polynom

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Beweisen Sie: die Ableitung $P'(x)$ hat $n - 1$ verschiedene reelle Nullstellen.

(b) Beweisen Sie: das Polynom

$$P(x) = x^3 + 9x^2 + 30x + 8$$

hat genau eine reelle Nullstelle. Skizzieren Sie den Graph von P und bestimmen die lokale Extremumstellen und Wendepunkte.