Blatt 10 - Abgabe bis 20.06.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

98. Beweisen Sie dass für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$\int_0^1 (\ln x)\, x^n dx = -\frac{1}{(n+1)^2}. \tag{36}$$

99. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

(i) $\int_0^\infty x e^{-ax} dx \quad (a > 0)$ (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (iii) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ (iv) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4}$

100. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. In (i) und (ii) bestimmen Sie für welche Werte von dem reellen Parameter p die Integrale konvergent sind:

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ (ii) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ (iii) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin x\, dx \quad (a > 0)$ (iv) $\int_0^{\pi/2} \tan x$

101. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (ii) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (iii) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$ (iv) $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln \cos x\, dx$

102. * Mit Hilfe von einer passenden Substitution beweisen Sie die Identität

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

ohne die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ zu benutzen.

103. * Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x\, dx = \frac{1}{2}.$$

(b) Für alle $n \geq 2$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^n dx = \frac{(n-1)}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{n-2} dx.$$

(c) Für alle $k \in \mathbb{Z}_+$

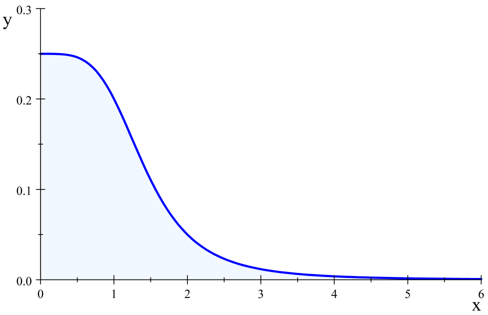
$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2k+1} dx = \frac{k!}{2}.$$

104. ** Betrachten wir auf dem Intervall $[0,\infty)$ die folgende Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^4+4}.$$

Beweisen Sie, dass $F(U_f) = \frac{\pi}{8}$.

Hinweis. Verwenden Sie die Aufgabe 69.



$\frac{1}{x^4+4}$

105. ** Betrachten wir eine parametrisierte Kurve (K,φ) wobei $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist und

$$\varphi_1'(t) > 0, \quad \varphi_2(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in (\alpha,\beta).$$

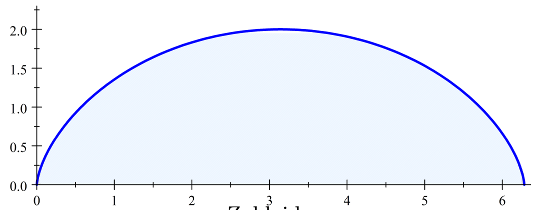
Nehmen wir an dass K mit dem Graph einer Funktion $f(x)$ übereinstimmt. Beweisen Sie, dass

$$F(U_f) = \int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\varphi_1'(t)dt. \tag{37}$$

Mit Hilfe von (37) bestimmen Sie den Flächeninhalt unter den folgenden Kurven.

(i) Die Zykloide mit der Parametrisierung

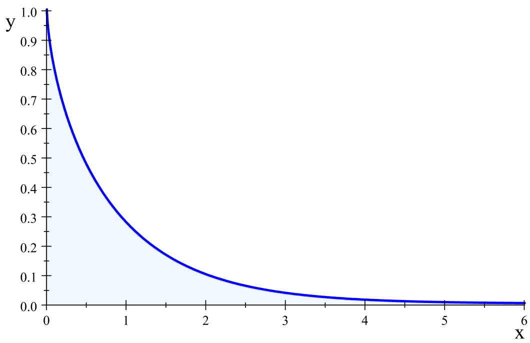
$$\varphi(t) = (t - \sin t,\ 1-\cos t), \quad t \in [0,2\pi].$$



Zykloide

(ii) Die Traktrix mit der Parametrisierung

$$\varphi(t) = \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right), \quad t \in [0,+\infty).$$



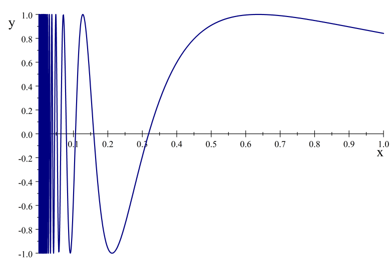
Traktrix

106. ** Sei f eine beschränkte Funktion auf einem kompakten Intervall $[a,b]$. Sei f lokal integrierbar auf (a,b). Beweisen Sie, dass f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$ ist.

Beschließen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar auf $[0,t]$ für jedes $t > 0$ ist.



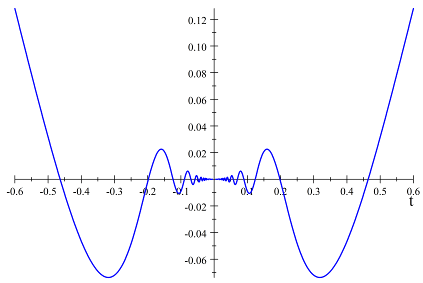
$\sin\frac{1}{x}$

Bemerkung. Die Funktion $f(x)$ ist offensichtlich unstetig in 0.

107. ** Betrachten wir die folgende Funktion

$$F(t) = \int_0^t \sin \frac{1}{x}\, dx$$

die nach der Aufgabe 106 für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.



$F(t)$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion $F(t)$ ist differenzierbar in allen $t \in \mathbb{R}$ und

$$F'(t) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist die Ableitung $F'(t)$ unstetig in $t = 0$.

(b) $F\left(\frac{1}{\pi}\right) < 0.$

Hinweis. Verwenden Sie die Substitution $y = \frac{1}{x}$.

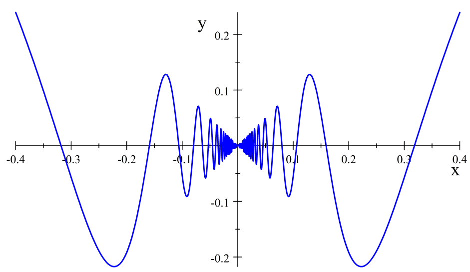
Bemerkung. In der Tat gilt es $F\left(\frac{1}{\pi}\right) = \int_0^{1/\pi} \sin \frac{1}{x}\, dx \approx -0.07$.

108. ** Beweisen Sie folgendes.

(a) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$ aber nicht differenzierbar in 0.

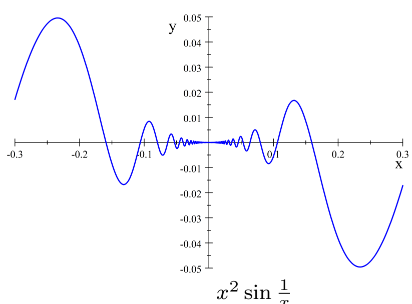


$x \sin \frac{1}{x}$

(b) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ aber $f'(x)$ ist unstetig in 0.



$x^2 \sin \frac{1}{x}$

109. **Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion f ist auf $[a, b]$ lokal integrierbar.

(b) Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ist stetig auf $[a, b]$.

(c) Es gelten die Identitäten

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+}^b f(x)\, dx. \tag{38}$$

110. ** Sei f eine integrierbare Funktion auf einem Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie, dass $|f|$ auch auf $[a, b]$ integrierbar ist und dass

$$\left|\int_a^b f dx\right| \le \int_a^b |f|\, dx. \tag{39}$$

Bemerkung. Für stetige Funktionen f wurde (39) in Vorlesungen bewiesen.

111. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Riemann-Integrierbarkeit auf einem kompakten Intervall J.

(a) Ist f eine integrierbare Funktion auf J so ist f^2 auch auf J integrierbar.
Hinweis. Benutzen Sie die Darboux-Integrierbarkeit.

(b) Sind Funktionen f und g auf J integrierbar, so ist fg auch auf J integrierbar.
Hinweis: Verwenden Sie (a) und die Identität

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

112. ** Sei f eine integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall J.

(a) Sei φ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $[\alpha, \beta] \supset f(J)$. Beweisen Sie, dass die Komposition $\varphi \circ f$ auf J integrierbar ist.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Ungleichung

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \le C\, |t - s|,$$

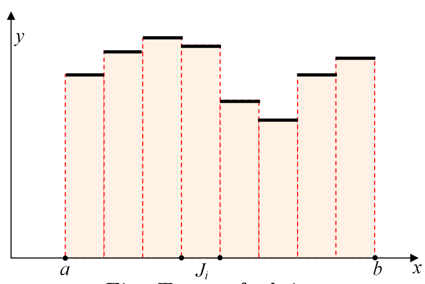
für alle $t, s \in [\alpha, \beta]$ wobei $C = \sup_{[\alpha,\beta]} |\varphi'| < \infty$.

(b) Angenommen $f \ge 0$ auf J, beweisen Sie, dass $\sqrt{f}$ auch auf J integrierbar.
Warnung: Die Aussage (a) kann für die Funktion $\varphi(x) = \sqrt{x}$ nicht verwendet werden da $\sqrt{x}$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, während f den Wert 0 annehmen kann.

113. ** Bezeichnen wir mit $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ d.h.

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Eine *Treppenfunktion* auf einem Intervall $[a, b]$ ist eine Funktion der Form $\sum_{i=1}^N c_i \mathbf{1}_{J_i}$, wobei J_i Teilintervalle von $[a, b]$ sind, $c_i \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.



Eine Treppenfunktion

(a) Jede Indikatorfunktion $\mathbf{1}_J$ eines Intervalls $J \subset [a,b]$ ist auf $[a,b]$ integrierbar.

(b) Jede Treppenfunktion auf $[a,b]$ ist integrierbar.

(c) Für jede integrierbare Funktion f auf $[a,b]$ gibt es eine Folge $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen so dass

$$\int_a^b |f - g_n|\, dx \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{40}$$

Man sagt in diesem Fall: die Folge $\{g_n\}$ konvergiert gegen f *im Mittel,* und man schreibt: $g_n \xrightarrow{L^1} f$.

Hinweis. Benutzen Sie Riemann- und Darboux-Summen von f um g_n zu konstruieren.

(d) Für jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ gibt es eine Folge $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen so dass

$$\sup_{[a,b]} |f - g_n| \to 0 \ \text{ für } n \to \infty. \tag{41}$$

Man sagt in diesem Fall: die Folge $\{g_n\}$ konvergiert gegen f *gleichmäßig*, und man schreibt $g_n \rightrightarrows f$.

Hinweis. Benutzen Sie die gleichmäßige Stetigkeit von f auf $[a,b]$.

114. ** *(Lemma von Riemann)* Beweisen Sie, dass für jede integrierbare Funktion f auf $[a,b]$ gilt

$$\int_a^b f(x) \sin nx\, dx \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{42}$$

Hinweis. Beweisen Sie (42) zuerst für eine Indikatorfunktion eines Intervalls, dann für eine Treppenfunktion, und danach für beliebige integrierbare Funktion f mit Hilfe von Aufgabe 113.