Blatt 10 - Abgabe bis 25.06.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

79. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) Für alle $x \in (-1,1)$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots .$$

Beschließen Sie, dass

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^k (2k+1)} \tag{13}$$

Hinweis. Verwenden Sie die Potenzreihe der Ableitung $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

(b) Für alle $x \in (-1,1)$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!\,(2k+1)} x^{2k+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots , \tag{14}$$

wobei $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ und $(-1)!! = 1$. Beschließen Sie, dass

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1} k!\,(2k+1)}. \tag{15}$$

Hinweis. Verwenden Sie die binomische Reihe der Ableitung $(\arcsin x)' = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$.
Bemerkung. Mit Hilfe von den Identitäten (13) bzw (15) kann man die Zahl π effizient berechnen.

80. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ für alle $x \in (-1,1)$.
Hinweis. Verwenden Sie die Taylorreihe von $\ln(1+x)$.

(b) $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ für alle $x \in (-1,1)$.
Hinweis. Verwenden Sie die Identität $\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ und die binomische Reihe für $\left(x^2+1\right)^{-1/2}$.

(c) $\int_0^x e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis. Verwenden Sie die Exponentialreihe.

81. * Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\int_0^1 (\ln x)\, x^n dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \ln x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2 (2n+1)!}$$

82. Sei $f = u + iv$ eine komplexwertige Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wobei u und v reellwertig sind. Die Funktion f heißt differenzierbar in $x \in I$ wenn u und v in x differenzierbar sind. In diesem Fall wird die Ableitung $f'(x)$ wie folgt definiert:

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

(a) Beweisen Sie, dass für beliebiges $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$(e^{cx})' = ce^{cx}. \tag{16}$$

(b) Beweisen Sie die Produktregel für komplexwertige differenzierbare Funktionen:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

83. Seien u and v stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Definieren wir das Integral von der komplexwertigen Funktion $f = u + iv$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

(a) Beweisen Sie: für jedes $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx. \tag{17}$$

(b) Beweisen Sie: ist F eine komplexwertige Stammfunktion von f auf $[a, b]$, d.h. $F' = f$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{18}$$

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^1 e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dafür verwenden Sie (16) mit $c = \alpha + i\beta$, (18) und die Identität

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos x + ie^{\alpha x} \sin \beta x.$$

84. * Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Riemann-Integrierbarkeit auf einem kompakten Intervall I.

(a) Ist f eine integrierbare Funktion auf I so ist f^2 auch auf I integrierbar.
Hinweis. Benutzen Sie die Darboux-Integrierbarkeit.

(b) Sind Funktionen f und g auf I integrierbar, so ist fg auch auf I integrierbar.
Hinweis: Verwenden Sie die Identität

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

85. * Sei f eine integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall I.

(a) Beweisen Sie, dass für jede stetig differenzierbare Funktion φ auf dem Intervall $[\alpha, \beta] \supset f(I)$, die Komposition $\varphi \circ f$ auch auf I integrierbar ist.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Ungleichung

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq C\,|t-s|,$$

für alle $t, s \in [\alpha, \beta]$ wobei $C = \sup_{[\alpha,\beta]} |\varphi'| < \infty$.

(b) Angenommen $f \geq 0$ auf I, beweisen Sie, dass $\sqrt{f}$ auch auf I integrierbar.
Warnung: Die Aussage (a) kann für die Funktion $\varphi(x) = \sqrt{x}$ nicht verwendet werden da $\sqrt{x}$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist, während f den Wert 0 annehmen kann.

86. * Sei f eine beschränkte Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Sei f auch lokal integrierbar auf (a, b). Beweisen Sie, dass f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ ist. Beschließen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

auf $[0, 1]$ integrierbar ist.