Blatt 11 - Abgabe bis 02.07.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

87. Bewiesen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Die Hölder-Ungleichung für $p = \infty$, $q = 1$: für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

   $$|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$$

   (b) $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

   (c) Für alle $\beta > \alpha \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$

   $$\|x\|_\alpha \leq n^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} \|x\|_\beta .$$

88. Sei S eine nicht-leere Menge. Für jede reellwertige Funktion f auf S definieren wir die sup-Norm $\|f\|$ von f mit

   $$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)| .$$

   Sei $B(S)$ der Vektorraum von allen beschränkten reellwertigen Funktionen auf S.

   (a) Beweisen Sie, dass die sup-Norm eine Norm in $B(S)$ ist.

   (b) Sei $\{f_n\}$ eine Folge von Funktion von $B(S)$ mit $f_n \rightrightarrows f$ auf S für $n \to \infty$. Beweisen Sie, dass $f \in B(S)$ und $\|f\| = \lim_{n \to \infty} \|f_n\|$.

   (c) Geben Sie ein Beispiel von punktweiser Konvergenz $f_n \to f$ auf $[0, 1]$ an, wobei alle f_n stetig (und somit beschränkt) auf $[0, 1]$ sind, aber f auf $[0, 1]$ unbeschränkt ist.

89. Eine Funktion $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig falls alle ihre Komponente f_i, $i = 1, ..., n$, stetig sind. In diesem Fall definieren wir $\int_\alpha^\beta f(t)\, dt$ als ein Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $\int_\alpha^\beta f_i(t)\, dt$, $i = 1, ..., n$.

   (a) Beweisen Sie, dass für jede Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ gilt

   $$\left\| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|f(t)\|\, dt. \tag{19}$$

   Hinweis. Verwenden Sie in den Riemann-Summen die Dreiecksungleichung für die Norm $\|\cdot\|$.

   (b) Mit Hilfe von (19) beweisen Sie folgendes: für beliebige stetig differenzierbare parametrisierte Kurve (K, φ) in $\mathbb{R}^n$ mit Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt

   $$L(K, \varphi) \geq |a - b| .$$

   Folglich ist die gerade Strecke zwischen a und b der kürzeste Weg zwischen a und b.

90. *(Die Hölder-Ungleichung für Integrale)*

(a) Seien f und g nicht-negative stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie, dass für alle konjugierte Hölder-Exponenten p und q gilt

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{1/q}. \tag{20}$$

Hinweis. Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung für die Riemann-Summen.

(b) Mit Hilfe von (20) beweisen Sie die Ungleichungen

$$\text{(i)} \quad \int_0^\pi \sqrt{\sin x}\, dx \leq \sqrt{2\pi} \qquad \text{(ii)} \quad \int_{\pi/2}^\pi \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{1}{2}.$$

91. * Sei f eine stetige Funktion auf $[0, A]$ mit $f(0) = 0$. Sei f in $(0, A)$ stetig differenzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0, A)$. Insbesondere existiert die stetige inverse Funktion f^{-1} auf $[0, B]$ wobei $B = f(A)$. Beweisen Sie, dass für alle $a \in [0, A]$ und $b \in [0, B]$ gilt

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)\, dy \geq ab. \tag{21}$$

Beweisen Sie mit Hilfe von (21), dass für alle konjugierte Hölder Exponenten p, q und für alle $a, b \geq 0$ die folgende *Young-Ungleichung* gilt

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{22}$$

Hinweis. Benutzen Sie im zweiten Integral in (59) die Substitution $y = f(x)$ und partielle Integration.

92. * *(Die Hölder-Ungleichung für Reihen)* Seien $p, q \in (1, +\infty)$ konjugierte Hölder-Exponenten.

(a) Beweisen Sie: für beliebige reellwertige Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \text{ und } \sum_{n=1}^\infty |y_n|^q < \infty$$

konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ absolut und die folgende Ungleichung gilt:

$$\left|\sum_{n=1}^\infty x_n y_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

(b) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen Zahlen mit

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = 1.$$

Beweisen Sie, dass für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen Zahlen und für jedes $p>1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^p\right)^{1/p}. \tag{23}$$

Beschließen Sie, dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^p}{2^n}. \tag{24}$$

93. * Bezeichnen wir mit $\mathbf{1}_I$ die Indikatorfunktion eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$. Eine Treppenfunktion auf einem Intervall $[a,b]$ ist Funktion der Form $\sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{1}_{I_i}$, wobei I_i Teilintervalle von $[a,b]$ sind, $c_i \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Jede Indikatorfunktion $\mathbf{1}_I$ eines Intervalls $I \subset [a,b]$ ist auf $[a,b]$ integrierbar.

   (b) Jede Treppenfunktion auf $[a,b]$ ist integrierbar.

   (c) Für jede integrierbare Funktion f auf $[a,b]$ gibt es eine Folge $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen so dass

$$\int_a^b |f-g_n|\,dx \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{25}$$

   Man sagt: die Folge $\{g_n\}$ konvergiert gegen f *im Mittel,* und man schreibt: $g_n \xrightarrow{L^1} f$.

94. * *(Lemma von Riemann)* Beweisen Sie, dass für jede integrierbare Funktion f auf $[a,b]$ gilt

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{26}$$

   Hinweis. Beweisen Sie (26) zuerst für eine Indikatorfunktion, dann für eine Treppenfunktion, und danach für beliebige integrierbare Funktion f mit Hilfe von Aufgabe 93.