Blatt 11 - Abgabe bis 27.06.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

115. Mit Hilfe von dem Integralkriterium bestimmen Sie ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind. In (i) und (ii) bestimmen Sie für welche Werte vom reellen Parameter p die Reihen konvergieren:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^p} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

116. Mit Hilfe von dem Majorantenkriterium beweisen Sie, dass die folgenden Integrale absolut konvergent sind:

$$\text{(i)} \int_0^1 \ln x \cos\frac{1}{x}\, dx \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\frac{1}{x}\, dx \qquad \text{(iii)} \int_1^{\infty} \frac{x \sin x}{x^3+1} dx \qquad \text{(iv)} \int_0^1 \frac{e^x-2}{\sqrt{x-\frac{1}{2}x^3}} dx$$

117. Mit Hilfe von dem Vergleichskriterium bestimmen Sie, ob die folgenden Integrale konvergent oder divergent sind:

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2} \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x^3} dx \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ln(1+x)} \qquad \text{(iv)} \int_0^1 \frac{\tan x}{(e^x-1)^2} dx$$

118. Bestimmen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent oder divergent sind.

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{dx}{\ln x} \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) dx \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}\, dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$$

119. * Sei f eine monoton steigende Funktion auf $[1,\infty)$.

    (a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^n f(k) \le \int_1^{n+1} f(x)dx. \tag{43}$$

    (b) Verwenden Sie (43) mit $f(x) = \ln x$ um zu beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Bemerkung. In der Tat gilt für $n \to +\infty$ die *Stirling-Formel* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

120. * Untersuchen Sie die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)\left(x-\frac{1}{2}x^3\right)}}.$$

121. ** Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf $[0, A]$ mit $f(0) = 0$, $f(A) = B$ und $f'(x) > 0$ für $x \in [0, A]$. Folglich existiert die stetige inverse Funktion f^{-1} auf $[0, B]$. Beweisen Sie, dass für alle $a \in [0, A]$ und $b \in [0, B]$ gilt

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)\, dy \geq ab. \tag{44}$$

Mit Hilfe von (44) beweisen Sie die *Young-Ungleichung*: für alle alle $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \tag{45}$$

Hinweis. Benutzen Sie im zweiten Integral in (84) die Substitution $y = f(x)$ und partielle Integration.

122. ** Sei f eine beliebige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$ bezeichnen wir

$$V(f, Z) := \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Der Wert

$$V_a^b(f) := \sup_Z V(f, Z)$$

heißt die *totale Variation* von f auf $[a, b]$. Beweisen Sie: ist f stetig differenzierbar auf $[a, b]$, so gilt

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\, dx. \tag{46}$$

Bestimmen Sie $V_0^\pi(\cos nx)$ wobei $n \in \mathbb{N}$.

123. ** Die Betafunktion $B(a, b)$ wurde in Aufgabe 78 wie folgt definiert:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx. \tag{47}$$

(a) Beweisen Sie, dass das Integral in (47) für alle $a > 0$ und $b > 0$ konvergent ist, so dass $B(a, b)$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ definiert ist.

(b) Beweisen Sie, dass $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

124. ** Die Gammafunktion $\Gamma(a)$ wird für alle $a > 0$ wie folgt definiert:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx. \tag{48}$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion.

(a) Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

(b) Für alle $a > -1$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^a dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n+1} dt = \frac{1}{2} n!$$

(c) Es ist bekannt dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Mit Hilfe von dieser Identität beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} dt = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}},$$

wobei $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$.

(d) Für alle $a > -1$ gilt

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^a dt = \Gamma(a+1).$$

125. ** Für jede Folge $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ von reellen Zahlen definieren wir das unendliche Produkt mit

$$\prod_{k=1}^\infty a_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n a_k,$$

vorausgesetzt dass der Grenzwert existiert. Sei $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge wobei $x_k \in (0,1)$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Beweisen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^\infty (1 - x_k) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^\infty x_k = +\infty. \tag{49}$$

Beschließen Sie, dass für jedes $a > 0$ gilt

$$\prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{a}{k}\right) = 0. \tag{50}$$

126. ** Sei $f(x)$ eine local integrierbare Funktion auf $(-\infty, +\infty)$. Der *Cauchysche Hauptwert* des Integrals von $f(x)$ auf $(-\infty, +\infty)$ wird wie folgt definiert:

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$$

(wobei $V.P.$ für "Value Principal" steht). Bestimmen Sie

$$\text{(i)}\quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx \qquad\qquad \text{(ii)}\quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2} dx$$

Zeigen Sie, dass die uneigentlichen Integrale (ohne $V.P.$) in (i), (ii) divergieren.