Blatt 12 - Abgabe bis 04.07.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

127. Bewiesen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Hölder-Ungleichung für $p = \infty$, $q = 1$: für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1 .$$

(b) Für alle $\beta > \alpha \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\alpha \leq n^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} \|x\|_\beta .$$

Hinweis. Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung.

128. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine *Umgebung* eines Punktes $a \in X$ ist jede offene Menge, die a enthält (z.B. jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a ist eine Umgebung von a).
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen von X konvergiert gegen a genau dann wenn für jede Umgebung U von a gilt $x_n \in U$ für fast alle n.

(b) Sei (Y, d') noch ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig in einem Punkt $a \in X$ genau dann when es für jede Umgebung V von $f(a)$ in Y eine Umgebung U von a in X mit $f(U) \subset V$ gibt.

Bemerkung. Diese Aussagen zeigen dass die Begriffe von Konvergenz und Stetigkeit ausschließlich in Bezug auf offene Mengen formuliert werden können.

129. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \to J$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\sup_{x \in J} |f'(x)| < 1. \tag{51}$$

Dann ist f eine Kontraktionsabbildung von J.

(b) Für ein $a > 0$ setzen wir $J = [\sqrt{a}, +\infty)$ und

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \tag{52}$$

Dann ist f eine Selbstabbildung von J und auch eine Kontraktionsabbildung.

(c) Sei $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ eine Fixpunktiteration für die Abbildung (52). Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

130. Sei S eine nicht-leere Menge. Für jede reellwertige Funktion f auf S definieren wir die sup-Norm $\|f\|$ von f mit
$$\|f\| = \sup_S |f|\,.$$
Sei $B(S)$ der Vektorraum von allen beschränkten reellwertigen Funktionen auf S.

(a) Beweisen Sie, dass die sup-Norm eine Norm in $B(S)$ ist.

(b) Sei $\{f_n\}$ eine Folge von Funktion auf S. Man sagt dass $\{f_n\}$ gegen eine Funktion f auf S *gleichmäßig konvergiert* und schreibt $f_n \rightrightarrows f$ wenn
$$\sup_S |f - f_n| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$
Beweisen Sie: ist $\{f_n\}$ eine Folge aus $B(S)$ und $f_n \rightrightarrows f$ dann auch $f \in B(S)$ und
$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

(c) Geben Sie ein Beispiel von punktweiser Konvergenz $f_n \to f$ auf $[0,1]$ an, wobei alle f_n stetig (und somit beschränkt) auf $[0,1]$ sind, aber f auf $[0,1]$ unbeschränkt ist.

131. * Sei (X,d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei K eine totalbeschränkte Teilmenge von X. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein ε-Netz $\{x_i\}$ von K so dass alle Punkte x_i in K liegen.

(b) Sei E eine nichtleere Teilmenge von X. Definieren wir den Abstand $d(x,E)$ zwischen einem Punkt $x \in X$ und E mit
$$d(x,E) := \inf_{z\in E} d(x,z)\,.$$
Dann gilt für alle $x, y \in X$
$$|d(x,E) - d(y,E)| \le d(x,y)\,.$$
Insbesondere ist die Funktion $x \mapsto d(x,E)$ stetig auf X.

132. * *(Die Hölder-Ungleichung für Integrale)*

(a) Seien f und g nicht-negative stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a,b]$. Beweisen Sie, dass für alle konjugierte Hölder-Exponenten p und q gilt
$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{1/q}. \tag{53}$$
Hinweis. Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung für die Riemann-Summen.

(b) Mit Hilfe von (53) beweisen Sie die Ungleichungen
$$\text{(i)} \int_0^\pi \sqrt{\sin x}\,dx \le \sqrt{2\pi} \qquad \text{(ii)} \int_{\pi/2}^\pi \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{1}{2}.$$

133. ** *(Die Hölder-Ungleichung für Reihen)* Seien $p, q \in (1, +\infty)$ konjugierte Hölder-Exponenten.

(a) Beweisen Sie: für beliebige reellwertige Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q < \infty$$

konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ absolut und die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

(b) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen Zahlen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

Beweisen Sie, dass für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von nichtnegativen Zahlen und für jedes $p > 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^p \right)^{1/p}. \tag{54}$$

Beschließen Sie, dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^p}{2^n}. \tag{55}$$

134. ** Eine Funktion $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig falls alle ihre Komponente f_i, $i = 1, ..., n$, stetig sind. In diesem Fall definieren wir $\int_\alpha^\beta f(t)\, dt$ als ein Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $\int_\alpha^\beta f_i(t)\, dt$, $i = 1, ..., n$.

(a) Beweisen Sie, dass für jede Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\left\| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|f(t)\|\, dt. \tag{56}$$

Hinweis. Verwenden Sie in den Riemann-Summen die Dreiecksungleichung für die Norm $\|\cdot\|$.

(b) Mit Hilfe von (56) beweisen Sie folgendes: für beliebige stetig differenzierbare parametrisierte Kurve (K, φ) in $\mathbb{R}^n$ mit Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$L(K, \varphi) \geq |a - b|.$$

Folglich ist die gerade Strecke zwischen a und b der kürzeste Weg zwischen a und b.

135. ** Beweisen Sie, dass alle Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Hinweis. Beweisen Sie, dass jede Norm $N(x)$ in $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der 1-Norm ist. Beschließen Sie, dass $N(x)$ positive maximale und minimale Werte auf der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ hat.

136. ** Fixieren wir ein $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ und betrachten im Banachraum $X = C[0,a]$ die folgende Abbildung $\Phi : X \to X$:

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \left(f^2(t) + 1\right) dt$$

für alle $f \in X$ und $x \in [0,a]$.

(a) Sei $\|\cdot\|$ die sup-Norm in X. Beweisen Sie, dass Φ eine Selbstabbildung abgeschlossener Einheitskugel $Y := \overline{U}_1(0) = \{f \in X : \|f\| \leq 1\}$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass Φ auf Y eine Kontraktionsabbildung ist.

(c) Beschließen Sie, dass Φ einen Fixpunkt $f \in Y$ hat. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \tan x.$$

(d) Sei $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ die Fixpunktiteration mit $f_0 = 0$ und $f_{n+1} = \Phi(f_n)$. Bestimmen Sie die Funktionen f_1, f_2, f_3.

137. ** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Vereinigung endlich vieler beschränkten Teilmengen von X ist auch beschränkt.

(b) Vereinigung endlich vieler totalbeschränkten Teilmengen von X ist auch totalbeschränkt.

(c) Jede totalbeschränkte Teilmenge von X ist auch beschränkt.

(d) Eine Kugel in $C[0,1]$ ist nicht totalbeschränkt (obwohl beschränkt nach Definition ist).

138. ** Sei S eine nicht-leere Menge.

(a) Fixieren wir eine Funktion $g \in B(S)$ und setzen $G(f) = gf$ für alle $f \in B(S)$. Beweisen Sie: G ist eine stetige Selbstabbildung vom Banachraum $B(S)$.

(b) Fixieren wir eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und setzen $\Phi(f) = \varphi \circ f$ für alle $f \in B(S)$. Beweisen Sie: Φ ist eine stetige Selbstabbildung vom Banachraum $B(S)$.

Hinweis. Benutzen Sie die gleichmäßige Stetigkeit von φ auf kompakten Intervallen.

139. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\varphi(t)$ eine stetige Funktion auf $[0, \infty)$ die auf $(0, +\infty)$ stetig differenzierbar ist. Nehmen wir an, dass $\varphi(0) = 0$ und dass φ' auf $(0, +\infty)$ positive und monoton fallend ist. Dann gilt für alle nicht-negative reelle x, y die Ungleichung

$$\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y). \tag{57}$$

Bemerkung. Z.B. die Funktion $\varphi(t) = t^{\alpha}$ erfüllt die obigen Bedingungen für $\alpha \in (0,1]$, aber nicht für $\alpha > 1$.

(b) Sei $d(x,y)$ eine Metrik in einer Menge X. Dann ist

$$d_{\varphi}(x,y) := \varphi(d(x,y))$$

auch eine Metrik in X, wobei φ eine Funktion aus (a) ist.

(c) Die Funktion $d(x,y) = |x-y|^{\alpha}$ mit $\alpha > 1$ ist keine Metrik in $\mathbb{R}$.