Blatt 12 - Abgabe bis 09.07.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

95. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Sei K eine totalbeschränkte Teilmenge von X. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz $\{x_i\}$ von K so dass alle Punkte x_i in K liegen.

   (b) Sei (X, d) vollständig. Eine Teilmenge $Y \subset X$ ist genau dann abgeschlossen wenn der Unterraum (Y, d) vollständig ist.

   (c) Sie E eine nichtleere Teilmenge von X. Definieren wir den Abstand $d(x, E)$ zwischen einem Punkt $x \in X$ und E mit
$$d(x, E) := \inf_{z \in E} d(x, z).$$
   Dann gilt für alle $x, y \in X$
$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y).$$
   Insbesondere ist die Funktion $x \mapsto d(x, E)$ stetig auf X.

96. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : J \to J$ eine differenzierbare Funktion mit
$$\sup_{x \in J} |f'(x)| < 1. \tag{27}$$
   Dann ist f eine Kontraktionsabbildung von J.

   (b) Für ein $a > 0$ setzen wir $J = [\sqrt{a}, +\infty)$ und
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \tag{28}$$
   Dann ist f eine Selbstabbildung von J und auch eine Kontraktionsabbildung.

   (c) Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Fixpunktiteration für die Abbildung (28). Dann gilt
$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

97. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Vereinigung endlich vieler beschränkten Teilmengen von X ist auch beschränkt.

   (b) Vereinigung endlich vieler totalbeschränkten Teilmengen von X ist auch totalbeschränkt.

   (c) Jede totalbeschränkte Teilmenge von X ist auch beschränkt.

   (d) Eine Kugel in $C[0, 1]$ ist nicht totalbeschränkt (obwohl beschränkt nach Definition ist).

98. * Seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Es ist bekannt aus Vorlesungen, dass für $a \in X$ und $b \in Y$ die folgende Äquivalenz gilt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b \text{ für jede Folge } \{x_n\} \subset X \setminus \{a\} \text{ mit } x_n \to a. \tag{29}$$

Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existiert} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existiert für jede Folge } \{x_n\} \subset X \setminus \{a\} \text{ mit } x_n \to a.$$

99. Sei $0 < a < \frac{1}{2}$. Betrachten wir im Banachraum $X = C[0, a]$ die folgende Abbildung $\Phi : X \to X$:

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \left(f^2(t) + 1\right) dt$$

für alle $f \in X$ und $x \in [0, a]$.

(a) Sei $\|\cdot\|$ die sup-Norm in X. Beweisen Sie, dass Φ eine Selbstabbildung abgeschlossener Einheitskugel $Y := \overline{U}_1(0) = \{f \in X : \|f\| \le 1\}$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass Φ auf Y eine Kontraktionsabbildung ist.

(c) Beschließen Sie, dass Φ einen Fixpunkt $f \in Y$ hat. Zeigen Sie, dass $f(x) = \tan x$.

(d) Sei $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ die Fixpunktiteration mit $f_0 = 0$ und $f_{n+1} = \Phi(f_n)$. Bestimmen Sie f_1, f_2, f_3.

100. * Seien S eine nicht-leere Menge.

(a) Fixieren wir eine Funktion $g \in B(S)$ und setzen $G(f) = gf$ für alle $f \in B(S)$. Beweisen Sie: G ist eine stetige Selbstabbildung vom Banachraum $B(S)$.

(b) Fixieren wir eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und setzen $\Phi(f) = \varphi \circ f$ für alle $f \in B(S)$. Beweisen Sie: Φ ist eine stetige Selbstabbildung vom Banachraum $B(S)$.

Hinweis. Benutzen Sie die gleichmäßige Stetigkeit von φ auf kompakten Intervallen.

101. * Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\varphi(t)$ eine stetige Funktion auf $[0, \infty)$ die auf $(0, +\infty)$ stetig differenzierbar ist. Nehmen wir an, dass $\varphi(0) = 0$ und dass φ' auf $(0, +\infty)$ positive und monoton fallend ist. Dann gilt für alle nicht-negative reelle x, y die Ungleichung

$$\varphi(x + y) \le \varphi(x) + \varphi(y). \tag{30}$$

Bemerkung. Z.B. die Funktion $\varphi(t) = t^\alpha$ erfüllt die obigen Bedingungen für $\alpha \in (0, 1]$, aber nicht für $\alpha > 1$.

(b) Sei $d(x, y)$ eine Metrik in einer Menge X. Dann ist

$$d_\varphi(x, y) := \varphi(d(x, y))$$

auch eine Metrik in X, wobei φ eine Funktion aus (a) ist.

(c) Die Funktion $d(x, y) = |x - y|^\alpha$ mit $\alpha > 1$ ist keine Metrik in $\mathbb{R}$.