Blatt 13 - Abgabe bis 16.07.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

102. * Beweisen Sie, dass alle Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Hinweis. Beweisen Sie, dass jede Norm $N(x)$ in $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der 1-Norm ist. Beschließen Sie, dass $N(x)$ positive maximale und minimale Werte auf der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ hat.

103. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen ∂_x und ∂_y der folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \ln\left(x+y^2\right) \quad \text{(ii)} \arctan\frac{y}{x} \quad \text{(iii)} \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(iv)} \arctan\frac{x+y}{1-xy} \quad \text{(v)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(vi)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

104. Mit Hilfe von der Kettenregel bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Angenommen, dass die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ bekannt sind, bestimmen Ableitungen ∂_x und ∂_y der folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad f(xy, \frac{x}{y}) \qquad\qquad \text{(ii)} \quad f\left(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy\right)$$

wobei $n = 2$ in (i) und $n = 3$ in (ii).

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ der Funktion

$$f(x, y, z) = x^{y^z}$$

im Definitionsbereich $x, y, z > 0$.
Hinweis. Benutzen Sie die Ableitungen von $\ln f$ und $\ln\ln f$.

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen ∂_x, ∂_y der Funktion

$$h(x, y) = x^{y^x}$$

im Definitionsbereich $x, y > 0$.
Hinweis. Verwenden Sie die Kettenregel für $h(x, y) = f(x, y, x)$.

105. Sei f eine Funktion in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wo die Polarkoordinaten (r, θ) wohldefiniert sind.

(a) Sei f in Ω total differenzierbar. Beweisen Sie die Identität

$$(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 = (\partial_r f)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta f)^2,$$

wobei (x, y) die kartesischen Koordinaten sind.

(b) Sei f in Ω 2-fach stetig differenzierbar. Beweisen Sie die Identität

$$\partial_{xx} f + \partial_{yy} f = \partial_{rr} f + \frac{1}{r}\partial_r f + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} f.$$

106. Bestimmen Sie alle lokale Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ im Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$;

(b) $f(x,y) = x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$ im Definitionsbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

107. * Seien (r,θ) die Polarkoordinaten von $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, d.h. $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ wobei $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Definieren wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$f(z) = \begin{cases} (r\cos 5\theta, r\sin 5\theta), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $f(z)$ in $z = 0$ stetig, partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

108. * Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei total differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie, dass auch das Produkt fg total differenzierbar ist und es gilt

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Hinweis. Bemerken Sie, dass $fg = F(f,g)$, wobei $F(u,v) = uv$, und benutzen die Kettenregel.

109. * Betrachten wir die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|_2} \tag{31}$$

Beweisen Sie folgendes.

(a) f ist total differenzierbar in allen Punkten $x \neq 0$.

(b) f ist total differenzierbar auch in $x = 0$.

(c) Bestimmen Sie das Bild von der mit (31) definierten Funktion f.

(d) Beweisen Sie, dass die inverse Funktion f^{-1} existiert und bestimmen Sie f^{-1}.