Blatt 2 - Abgabe bis 25.04.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
 Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

14. Leiten Sie die folgenden Funktionen ab:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & (x+1)\tan x & \text{(ii)} \quad \sqrt{2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{(iii)} \quad x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} \\
 \text{(iv)} & e^x(1 + \cot \frac{x}{2}) & \text{(v)} \quad \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{(vi)} \quad \arcsin(\sin x - \cos x)
 \end{array}$$

15. Für die folgenden Funktionen bestimmen Sie alle kritischen Punkte, die Intervalle von Monotonie, und skizzieren ihre Graphen.

- (a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ auf $[1, 3]$.
 (b) $f(x) = x \ln^2 x$ auf $[0, e]$.
 (c) $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$ auf $[-\pi, \pi]$.

Hinweis. Bestimmen Sie zunächst die Menge K_f von kritischen Punkten von f . In jedem Intervall (a, b) zwischen aufeinanderfolgenden kritischen Punkten $a < b$ ist die Funktion f streng monoton: steigend falls $f' > 0$ (oder $f(a) < f(b)$) und fallend falls $f' < 0$ (oder $f(a) > f(b)$). Um den Graph zu skizzieren, berechnen Sie auch die Werte $f(a)$ für alle $a \in K_f$ (falls notwendig verwenden Sie einen Rechner). Ist a eine Grenze von J , so nehmen wir an $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Markieren Sie dann auf dem Graph alle Punkte $(a, f(a))$ mit $a \in K_f$ und verbinden sie mit monotonen Kurven.

16. Für jede Funktion bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervallen, die Definitionsbereiche von inversen Funktionen und leiten die inversen Funktionen ab.

- (a) $f(x) = x + \ln x, \quad x > 0$
 (b) $f(x) = 2x^2 - x^4$
 (c) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Hinweis. Ein offenes Intervall J ist ein *maximales Monotonieintervall* von f wenn die Grenzen von J aufeinanderfolgende kritische Punkte von f sind. In jedem Monotonieintervall gilt $f' > 0$ oder $f' < 0$. Folglich hat f auf J die inverse Funktion f^{-1} mit dem Definitionsbereich $I = f(J)$, und für alle $x \in J$ gilt die Identität $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

17. Beweisen Sie mit Hilfe von dem Vergleichstest die folgenden Ungleichungen:

- (a) $x \geq \sin x$ für alle $x \geq 0$.
 (b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
 (c) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ für alle $x \geq 0$

18. * Mit Hilfe von dem Vergleichstest beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a) $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$ für alle $x \geq 0$.

(b) $x \geq e \ln x$ für alle $x > 0$.

(c) $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ für alle $x \geq 0$.

Hinweis. In (a) verwenden Sie die Ungleichung

$$e^x \geq 1 + x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

die in Vorlesung bewiesen wurde.

19. * Beweisen Sie die folgende Ungleichung für alle $0 < a < 1$ und $x > -1$:

$$(1+x)^a \leq 1+ax. \quad (2)$$

20. ** Beweisen Sie die *Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel* für drei nicht-negative reelle Zahlen a, b, c :

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \quad (3)$$

Hinweis. Setzen Sie $x = \sqrt[3]{c}$ und schreiben (3) wie folgt um:

$$x^3 + a + b \geq 3sx \quad (4)$$

wobei $s = \sqrt[3]{ab}$. Um (4) zu beweisen, zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3sx + a + b$$

auf dem Intervall $[0, \sqrt{s}]$ streng monoton fallend ist, und auf dem Intervall $(\sqrt{s}, +\infty)$ streng monoton steigend ist, so dass $x = \sqrt{s}$ eine Minimumstelle von f auf $[0, +\infty)$ ist. Dann zeigen Sie, dass $f(\sqrt{s}) \geq 0$, und beschließen, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, +\infty)$.

21. ** Beweisen Sie, dass für beliebige Folge $\{a_k\}_{k=1}^n$ von nichtnegativen reellen Zahlen gilt

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (5)$$

Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach n und die gleiche Methode wie in Aufgabe 20.

22. ** Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J . Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Gilt $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$ für einige $a, b \in J$, so gibt es ein $c \in J$ mit $f'(c) = 0$.

Vorsicht: Die Ableitung f' ist nicht unbedingt stetig, so dass der Zwischenwertsatz nicht benutzbar ist. Verwenden Sie stattdessen den Satz von Fermat.

(b) Gilt $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ so ist f streng monoton auf J . Beschließen Sie: die inverse Funktion f^{-1} existiert und ist differenzierbar im Definitionsbereich $I = f(J) = J$.