Blatt 2 - Abgabe bis 30.04.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

20. * Sei f eine n-fach differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Angenommen, dass

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

beweisen Sie, dass f ein Polynom des Grades $< n$ ist.

21. * (a) (*Leibnizformel*) Seien f und g zwei n-fach differenzierbare Funktionen auf einem Intervall J (wobei $n \in \mathbb{N}$). Beweisen Sie, dass fg auch n-fach differenzierbar auf J und

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{1}$$

wobei $f^{(0)} \equiv f$ und $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ der Binomialkoeffizient ist.

(b) Mit Hilfe von Leibnizformel bestimmen Sie $(\ln x \sin x)'''$.

22. Für die folgenden Funktionen bestimmen Sie ihre Taylor-Polynome an der Stelle 0 wie angegeben.

(a) $f(x) = \ln(1+x)$, $T_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $T_3(x)$

(c) $f(x) = e^x \sin x$, $T_6(x)$

(d) $f(x) = \tan x$, $T_3(x)$

Hinweis. Verwenden Sie die Definition des Taylor-Polynoms an der Stelle 0:

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

23. Sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf einem Intervall $(-c, c)$, $c > 0$, die durch eine absolut konvergente Potenzreihe angegeben ist:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

wobei $a_k \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: die Taylor-Polynome von f an der Stelle 0 stimmen mit den Partialsummen der Reihe überein, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(x) = S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

24. (a) Bestimmen Sie die Taylor-Polynome der Ordnung 3 an der Stelle 0 der folgenden Funktionen

$$\text{(i)}\quad \arcsin x \qquad \text{(ii)}\quad \ln\frac{1+x}{1-x}$$

(b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_7(x)$ der Funktion $\cos x$ an der Stelle 0. Berechnen Sie ungefähr $\cos\frac{1}{5}$ mit Hilfe von $T_7(x)$ und schätzen Sie den Approximationsfehler ab. Dafür verwenden Sie die Taylorformel mit Lagrange-Restglied. Man darf die arithmetischen Operationen mit Hilfe von einen Taschenrechner durchführen.

25. Der Zweck dieser Aufgabe ist die Taylor-Polynome der Funktion $\arctan x$ zu bestimmen.

(a) Bestimmen Sie die Taylor-Polynome $T_{2n,g}(x)$ an der Stelle 0 der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Beweisen Sie: das Taylor-Polynom $T_{2n+1,f}(x)$ an der Stelle 0 der Funktion

$$f(x) = \arctan x$$

ist gleich

$$T_{2n+1,f}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Hinweis. Benutzen Sie die Identität

$$T'_{2n+1,f}(x) = T_{2n,f'}(x) \tag{3}$$

um $T'_{2n+1,f}(x)$ zuerst zu bestimmen. Dann integrieren Sie das Polynom $T'_{2n+1,f}(x)$ und somit bestimmen $T_{2n+1,f}(x)$.