

Blatt 3 - Abgabe bis 07.05.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

26. Seien $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ die Taylor-Polynome der Ordnung n der Funktionen f bzw g an der Stelle 0.

- Beweisen Sie: das Taylor-Polynom der Ordnung n der Funktion $f(x) + g(x)$ stimmt mit $P_n(x) + Q_n(x)$ überein.
- Definieren wir ein Polynom $R_n(x)$ wie folgt: $R_n(x)$ besteht aus allen Monomen $c_k x^k$ des Grades $k \leq n$ aus dem Produkt-Polynom $P_n(x) Q_n(x)$. Beweisen Sie: das Taylor-Polynom der Ordnung n der Funktion $f(x) g(x)$ stimmt mit $R_n(x)$ überein.
- Mit Hilfe von (a) und (b) bestimmen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 5 an der Stelle 0 der Funktion

$$F(x) = \left(\frac{x}{1-x} - \ln(1+x) \right) \sin x.$$

27. * Seien f und g n -fach differenzierbare Funktionen, und nehmen wir an, dass die Komposition $F(x) = f(g(x))$ auf einem Intervall wohldefiniert ist.

- Beweisen Sie, dass die Funktion F auch n -fach differenzierbar ist.
- Nehmen wir an, dass f und g in der Nahe von 0 definiert sind und dass $g(0) = 0$, so dass die Komposition $F(x) = f(g(x))$ auch in der Nahe von 0 definiert ist. Seien P_n und Q_n die Taylor-Polynome der Ordnung n der Funktionen f bzw g an der Stelle 0. Beweisen Sie: das Taylor-Polynom $T_{n,F}$ der Ordnung n der Funktion F besteht aus allen Monomen $c_k x^k$ des Grades $k \leq n$ von dem Polynom $P_n(Q_n(x))$.

28. * Mit Hilfe von Aufgabe 27 bestimmen Sie die Taylor-Polynome der Ordnung 3 der folgenden Funktionen:

$$(i) \quad \exp(\sin x) \quad (ii) \quad \sqrt{2 - \cos x} \quad (iii) \quad \sin(\arctan x)$$

29. Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Linearität:

$$(i) \quad \int \sin^2 \frac{x}{2} dx \quad (ii) \quad \int \sin x \cos 3x dx \quad (iii) \quad \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx \quad (iv) \quad \int \ln(xe^{x^2}) dx$$

30. Mit Hilfe von partieller Integration bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \quad \int x \sinh x dx \quad (ii) \quad \int x^2 \ln x dx \quad (iii) \quad \int \arctan x dx \quad (iv) \quad \int \sqrt{x^2 - 1} dx$$

31. Mit Hilfe von Substitution bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$(i) \quad \int x e^{-x^2} dx \quad (ii) \quad \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}} \quad (iii) \quad \int \tan x dx \quad (iv) \quad \int \frac{3 + \ln^2 x}{x} dx$$

32. * Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$(i) \quad \int (e^x + x)^2 dx \quad (ii) \quad \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx \quad (iii) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x(2+x)}} \quad (iv) \quad \int x \arctan x dx$$