# Blatt 3 - Abgabe bis 02.05.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

23. Mit Hilfe der Regel von L'Hôspital bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-10x+9}{x^2-4x+3} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$$

$$\text{(iv)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x} \qquad \text{(v)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sinh x} \qquad \text{(vi)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

24. Mit Hilfe der Regel von L'Hôspital bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-\cos x}{x^2} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$\text{(iv)}\ \lim_{x\to\infty}x^{1/x} \qquad \text{(v)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x^2} \qquad \text{(vi)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \qquad (a,b>0)$$

25. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Betrachten wir das Polynom

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n), \tag{6}$$

wobei $\{x_k\}_{k=1}^n$ eine streng monoton steigende Folge von reellen Zahlen ist. Dann hat die Ableitung $P'(x)$ genau $n-1$ verschiedene reelle Nullstellen.

*Hinweis.* Verwenden Sie den Satz von Rolle.

(b) Das Polynom

$$Q(x)=5x^4-16x^3-39x^2+104x+36$$

hat genau 4 verschiedene reelle Nullstellen.

*Hinweis.* Zeigen Sie, dass $Q(x)$ die Ableitung von

$$P(x)=(x-4)(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$$

ist und verwenden $(a)$.

26. Mit Hilfe von dem Vergleichstest beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für alle $x\geq 1$.

(a) $x-\dfrac{1}{x}\geq 2\ln x$

(b) $2x+\dfrac{4}{x}\geq 5+\dfrac{1}{x^2}+(\ln x)^2$

*Hinweis.* Verwenden Sie den Vergleichstest zwei mal.

27. * Beweisen Sie: ist $f$ eine positive 2-fach differenzierbare konkave Funktion auf einem offenen Intervall $J$, so ist $\frac{1}{f}$ konvex auf $J$.
Zeigen Sie, dass die Umkehrung gilt nicht: es gibt eine positive 2-fach differenzierbare konvexe Funktion $f$, so dass $\frac{1}{f}$ auch konvex aber nicht konkav ist.

*Hinweis.* Bestimmen Sie $\left(\frac{1}{f}\right)''$ mit Hilfe von dem Quotientenregel.

28. ** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $f$ stetig auf einem Intervall $J$ und differenzierbar auf $J \setminus \{a\}$ für ein $a \in J$. Nehmen wir an, dass

$$\lim_{x \to a} f'(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f$ auch in $a$ differenzierbar und es gilt $f'(a) = c$.

(b) Die folgende Funktion

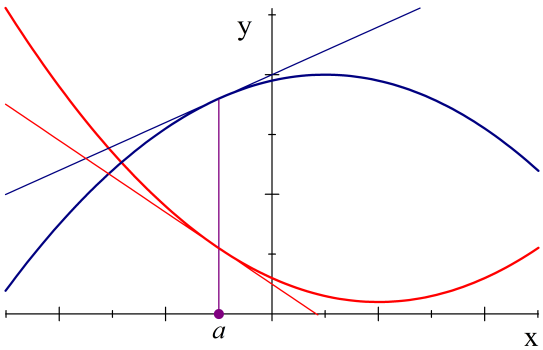
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar.

29. ** Sei $f$ eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall $J$ und sei $T$ die Tangente zum Graph $G_f$ am Punkt $(a, f(a))$ für ein $a \in J$. Beweisen Sie:

(a) ist $f$ auf $J$ konvex so liegt $T$ unterhalb des Graphes $G_f$;

(b) ist $f$ auf $J$ konkav, so liegt $T$ oberhalb des Graphes $G_f$.




Konvexe (rot) und konkave (blau) Funktionen und ihre Tangenten