Blatt 4 - Abgabe bis 09.05.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
 Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

In den Aufgaben 30 - 33 untersuchen Sie die angegebenen Funktionen mit Hilfe von 1^{er} und 2^{er} Ableitungen und skizzieren ihre Graphen.

Hinweis. Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf dem Intervall (a, b) . Die kritische Menge K_f besteht aus allen Nullstellen von f' und den Punkten a, b . In jedem Intervall (x_1, x_2) zwischen aufeinanderfolgenden Punkten aus K_f ist die Funktion f streng monoton steigend (falls $f' > 0$ oder $f(x_1) < f(x_2)$) oder fallend (falls $f' < 0$ oder $f(x_1) > f(x_2)$).

Ein kritischer Punkt $x \in (a, b)$ von f ist eine lokale Maximumstelle wenn f monoton steigend links von x und fallend rechts von x ist, oder wenn $f''(x) < 0$. Analog bestimmt man lokale Minimumstelle.

In jedem Intervall (y_1, y_2) zwischen aufeinanderfolgenden kritischen Punkten der Ableitung f' ist die Funktion f konvex (falls $f'' > 0$ in diesem Intervall) oder konkav (falls $f'' < 0$).

Ein kritischer Punkt $y \in (a, b)$ von f' ist eine Wendestelle falls f'' links von y und rechts von y unterschiedliche Vorzeichen hat.

Um den Graph von f zu skizzieren, man muss auch die Werte $f(x)$ für alle $x \in K_f \cup K_{f'}$ bestimmen (man darf dafür einen Rechner verwenden). An den Grenzen nimmt man $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ an.

30. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 40, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
31. $f(x) = e^x \sin x, \quad x \in (-\pi, \pi)$
32. $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in (0, +\infty)$
33. $f(x) = x^2 \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$
34. * (a) (*Leibnizformel*) Seien f und g zwei n -fach differenzierbare Funktionen auf einem Intervall J (wobei $n \in \mathbb{N}$). Beweisen Sie, dass fg auch n -fach differenzierbar auf J und

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (7)$$

wobei $f^{(0)} \equiv f$ und $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ der Binomialkoeffizient ist.

Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach n und die Eigenschaft der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} = \binom{n+1}{l}.$$

(b) Mit Hilfe von Leibnizformel bestimmen Sie $(\ln x \sin x)'''$.

35. ** Sei f eine n -fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall. Beweisen Sie, dass $(f^{(k)})^{(l)} = f^{(k+l)}$ für alle natürlichen Zahlen k, l mit $k+l \leq n$.

36. ** Sei f eine n -fach differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Angenommen, dass

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

beweisen Sie, dass f ein Polynom des Grades $< n$ ist.

37. ** Sei $g(x)$ eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall J . Setzen wir

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Beweisen Sie: die Funktion f ist konvex auf J genau dann wenn $g'' + (g')^2 \geq 0$ auf J , und f ist konkav genau dann wenn $g'' + (g')^2 \leq 0$.

38. ** Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

streng monoton steigend auf $(0, +\infty)$ ist. Beweisen Sie, dass $f(x)$ konkav auf $(0, +\infty)$ ist.

Bemerkung. Wie wir schon wissen, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$.

39. ** (*Jensen's Ungleichung*) Beweisen Sie: Ist f eine konvexe Funktion auf einem Intervall J so gilt für alle natürliche $n \geq 2$ die Ungleichung

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \leq \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) \quad (8)$$

für alle $a_k \in J$ und $\lambda_k \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Ist f konkav so gilt die umgekehrte Ungleichung:

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) \geq \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n). \quad (9)$$

Mit Hilfe von Jensen's Ungleichung beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für alle positive $a_1, \dots, a_n$:

(i) die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n};$$

(ii) die Ungleichung vom arithmetischen Mittel und Hölder-Mittel zur Stufe p : wenn $p > 1$ dann

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p},$$

und wenn $0 < p < 1$ dann

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p}.$$

40. ** Beweisen Sie: für n positive Zahlen $a_1, \dots, a_n$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

41. ** Beweisen Sie, dass für $0 < p < 1$ und alle positive $a_1, \dots, a_n$ gilt

$$a_1 + \dots + a_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p}. \quad (10)$$