Blatt 5 - Abgabe bis 21.05.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

41. Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von Substitution:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$ (ii) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ (iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{5x^3+1}\,dx$

42. Bestimmen Sie die Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

(i) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx$ (iii) $\displaystyle\int_0^e \sin(\ln x)\,dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$

43. Bestimmen Sie die Integrale

(i) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ (iii) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ (iv) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}dx$

44. *(Flächeninhalt zwischen den Graphen)* Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei integrierbare Funktionen auf einem Intervall $[\alpha,\beta]$ mit $0\le g(x)\le f(x)$. Betrachten wir die Menge

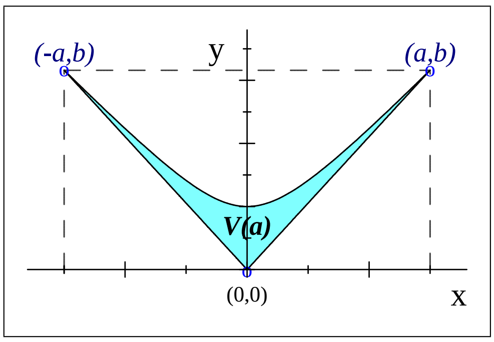
$$U_{f,g}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\alpha\le x\le\beta,\ g(x)\le y\le f(x)\right\}$$

zwischen den Graphen von f und g und definieren den Flächeninhalt von $U_{f,g}$ mit

$$F(U_{f,g})=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))\,dx.$$

Für jedes $a>1$ bezeichnen wir mit $V(a)$ die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ die von den folgenden drei Linien begrenzt ist:

- die Hyperbel $y^2-x^2=1$ zwischen den Punkten (a,b) und $(-a,b)$ wobei $b=\sqrt{a^2+1}$;
- die Gerade zwischen $(0,0)$ und (a,b);
- die Gerade zwischen $(0,0)$ und $(-a,b)$.



Stellen Sie $V(a)$ in der Form $U_{f,g}$ für passende Funktionen f,g dar.

Beweisen Sie, dass

$$F(V(a))=\sinh^{-1}a.$$

45. * Der Zweck dieser Aufgabe ist der Beweis der folgenden Ungleichung

$$\frac{5}{2} < e < 3. \tag{4}$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe von Darboux-Summen, dass

$$\int_1^{5/2} \frac{dx}{x} < 1 < \int_1^3 \frac{dx}{x}. \tag{5}$$

Dafür wählen Sie passende Zerlegungen von den Intervallen der Integration und benutzen die Ungleichungen für Darboux-Summen:

$$S_*(f, Z) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S^*(f, Z).$$

Für Berechnen der Darboux-Summen dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.

(b) Beweisen Sie (4) mit Hilfe von (5) und der Identität $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$.

46. * (*Flächeninhalt unter der Parabel*) Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

mit $a < 0$ und reellen Nullstellen $x_1 < x_2$. Beweisen Sie:

(a) Es gilt $f \ge 0$ auf $[x_1, x_2]$ und $\max_{[x_1,x_2]} f = f(c)$ wobei $c = \frac{x_1+x_2}{2}$.

(b) Der Flächeninhalt des Untergraphes von f auf $[x_1, x_2]$ ist gleich $\frac{2}{3} f(c)(x_2 - x_1)$.

47. * (*Flächeninhalt unter der Hyperbel* $y = \frac{1}{x}$) Betrachten wir die Funktion

$$L(a) := \int_1^a \frac{dx}{x}, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie die Identität

$$L(ab) = L(a) + L(b) \quad \text{für alle } a, b > 0$$

ohne die Gleichheit $L(a) = \ln a$ zu benutzen. Dafür benutzen Sie eine passende Substitution im Integral.

48. * Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

(a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0.$$

(b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \cos mx\,dx = 0$$

(c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \sin mx\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \cos mx\,dx = 0 \quad \text{wenn } n \ne m$$