# Blatt 5 - Abgabe bis 16.05.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

42. Für die folgenden Funktionen bestimmen Sie die Taylor-Polynome $T_3(x)$ an der Stelle 0:

$$\text{(i)}\ \tan x \quad \text{und} \quad \text{(ii)}\ \tanh x.$$

*Hinweis.* Verwenden Sie die Definition des Taylor-Polynoms $T_n(x)$ an der Stelle 0:

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{11}$$

43. Für die folgenden Funktionen bestimmen Sie alle Taylor-Polynome $T_n(x)$ an der Stelle 0:

$$\text{(i)}\ \ln(1+x) \qquad \text{(ii)}\ \ln\frac{1+x}{1-x}$$

44. Für die folgenden Funktionen bestimmen Sie ihre Taylor-Polynome an der Stelle 0 wie angegeben:

$$\text{(i)}\ \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ T_3(x) \qquad \text{(ii)}\ e^x\sin x,\ T_6(x) \qquad \text{(iii)}\ \arcsin x,\ T_3(x).$$

45. (a) Sei $f$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf einem Intervall $(-c,c)$, $c>0$, die durch eine absolut konvergente Potenzreihe angegeben ist:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: das Taylor-Polynome $T_n(x)$ von $f$ an der Stelle 0 stimmt mit der $n$-ten Partialsumme der Reihe überein, d.h. für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$T_n(x) = S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{12}$$

*Hinweis.* Zeigen Sie, dass für alle $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ mit $\varepsilon\in(0,c)$ gilt $|f(x)-S_n(x)| \le \text{const}\,|x|^{n+1}$. Dann benutzen Sie die Eindeutigkeit des Taylor-Polynoms.

(b) Mit Hilfe von (a) bestimmen Sie die Taylor-Polynome $T_{2m}(x)$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

46. * Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = \arctan x$ das folgende Taylor-Polynom $T_{2n+1}(x)$ der Ordnung $2n+1$ an der Stelle 0 hat:

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.$$

*Hinweis.* Benutzen Sie die Taylor-Polynome der Funktion $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ aus der Aufgabe 45(b).

47. * (a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_7(x)$ der Funktion $f(x) = \cos x$ an der Stelle 0.

(b) Berechnen Sie ungefähr $\cos\frac{1}{5}$ mit Hilfe von $T_7(x)$ und schätzen Sie den Approximationsfehler ab.

*Hinweis.* Dafür verwenden Sie die Taylorformel mit Lagrange-Restglied. Man darf die arithmetischen Operationen mit Hilfe von einen Taschenrechner durchführen.

48. ** (Taylorformel für Polynome)

(a) Beweisen Sie: die folgende Identität gilt für jedes Polynom $f$ von Grad $\leq n$ und für alle $a, x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{13}$$

*Hinweis.* Verwenden Sie Induktion nach $n$ und Induktionsvoraussetzung für $f'$.

(b) Mit Hilfe von (a) beweisen Sie den binomischen Lehrsatz.

49. ** Seien $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ die Taylor-Polynome der Ordnung $n$ der Funktionen $f$ bzw $g$ an der Stelle 0.

(a) Beweisen Sie: das Taylor-Polynom der Ordnung $n$ der Funktion $f(x) + g(x)$ stimmt mit $P_n(x) + Q_n(x)$ überein.

(b) Definieren wir ein Polynom $S_n(x)$ wie folgt: $S_n(x)$ besteht aus allen Monomen $c_k x^k$ des Grades $k \leq n$ aus dem Produkt-Polynom $P_n(x) Q_n(x)$. Beweisen Sie: das Taylor-Polynom der Ordnung $n$ der Funktion $f(x) g(x)$ stimmt mit $S_n(x)$ überein.

*Bemerkung.* Die Beziehung zwischen $S_n$ und $P_n Q_n$ lässt sich wie folgt beschreiben:

$$P_n(x)Q_n(x) = S_n(x) + o(x^n) \quad \text{für } x \to 0. \tag{14}$$

50. ** Mit Hilfe von Aufgabe 49 bestimmen Sie die Taylor-Polynome der Ordnung 5 der folgenden Funktionen an der Stelle 0:

$$\text{(i)} \quad \ln^2(1+x) \qquad \text{(ii)} \quad \left(\frac{x}{1-x} - \ln(1+x)\right)\sin x.$$

51. ** Seien $f$ und $g$ $n$-fach differenzierbare Funktionen, und nehmen wir an, dass die Komposition $F(x) = f(g(x))$ auf einem Intervall wohldefiniert ist.

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion $F$ auch $n$-fach differenzierbar ist.

(b) Nehmen wir an, dass $f$ und $g$ in der Nahe von 0 definiert sind und dass $g(0) = 0$, so dass die Komposition $F(x) = f(g(x))$ auch in der Nahe von 0 definiert ist. Seien $P_n$ und $Q_n$ die Taylor-Polynome der Ordnung $n$ der Funktionen $f$ bzw $g$ an der Stelle 0. Definieren wir ein Polynom $S_n(x)$ wie folgt: $S_n(x)$ besteht aus allen Monomen $c_k x^k$ des Grades $k \leq n$ von dem Polynom $P_n(Q_n(x))$. Beweisen Sie: das Taylor-Polynom $T_{n,F}$ der Ordnung $n$ der Funktion $F$ stimmt mit $S_n(x)$ überein.

*Bemerkung.* Die Beziehung zwischen $S_n(x)$ und $P_n(Q_n(x)$ lässt sich wie folgt beschreiben:

$$P_n(Q_n(x)) = S_n(x) + o(x^n) \quad \text{für } x \to 0. \tag{15}$$

52. ** Mit Hilfe von Aufgabe 51 bestimmen Sie die Taylor-Polynome $3^{er}$ Ordnung der folgenden Funktionen an der Stelle 0:

(i) $\exp(\sin x)$ (ii) $\sqrt{2-\cos x}$ (iii) $\sin(\arctan x)$

53. ** Betrachten wir die Funktion

$$g(x) = \tan x + \sin x.$$

Diese Funktion ist auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton steigend und hat somit die inverse Funktion $f = g^{-1}$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $3^{er}$ Ordnung der Funktion $f$ an der Stelle 0.

*Hinweis.* Seien $P_n$ und $Q_n$ die Taylor-Polynome der Ordnung $n$ der Funktionen $f$ bzw $g$ an der Stelle 0. Da $f(g(x)) = x$, so folgt es aus der Aufgabe 51 dass

$$P_n(Q_n(x)) = x + o(x^n) \text{ für } x \to 0. \tag{16}$$

Bestimmen Sie zunächst $Q_3$ und dann benutzen (16) um $P_3$ zu bestimmen.