# Blatt 6 - Abgabe bis 28.05.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

49. * Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf $[0,1]$.

    (a) Beweisen Sie, dass
    $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right)+f\left(\tfrac{2}{n}\right)+...+f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

    (b) Beweisen Sie: ist $f(x)$ positiv auf $[0,1]$, so gilt
    $$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right)f\left(\tfrac{2}{n}\right)...f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right)^{1/n}=\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,dx\right).$$

    (c) Bestimmen Sie die Grenzwerte:
    $$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)\qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left((n+1)(n+2)...(n+n)\right)^{1/n}.$$

50. Bestimmen Sie die Länge für jede von den folgenden Kurven.

    (a) Der Graph der Funktion $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ auf einem Intervall $[a,b]$ mit $b>a>1$.

    (b) Der Graph der Funktion $f(x)=x^{3/2}$ auf $[0,4]$ (*halb-kubische Parabel*).

    (c) Die *Helix* in $\mathbb{R}^3$, die durch die Parametrisierung $\varphi(t)=(\cos t,\sin t,\ t),\ t\in[\alpha,\beta]$, angegeben ist.

51. Seien $0<a<b$. Bestimmen Sie die Längen von den folgenden Kurven.

    (a) Der Graph der Funktion $f(x)=\ln x$ auf dem Intervall $x\in[a,b]$.

    (b) Die *Kettenlinie*: der Graph der Funktion $f(x)=\cosh x$ auf dem Intervall $x\in[0,a]$.

    (c) Die *Traktrix* mit der Parametrisierung
    $$\varphi(t)=\left(t-\tanh t,\frac{1}{\cosh t}\right)$$
    auf dem Intervall $t\in[0,a]$.

52. Sei $f$ eine integrierbare Funktion auf einem Intervall $[a,b]$. Beweisen Sie, dass $|f|$ auch auf $[a,b]$ integrierbar ist und dass
$$\left|\int_a^b f\,dx\right|\le\int_a^b|f|\,dx. \tag{6}$$

53. Die *Betafunktion* $B(a,b)$ wird für $a, b \geq 1$ mit

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$$

definiert. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Betafunktion.

(a) $B(a,b) = B(b,a)$

(b) $B(a,b) = \frac{b-1}{a} B(a+1, b-1)$ für $b \geq 2$.

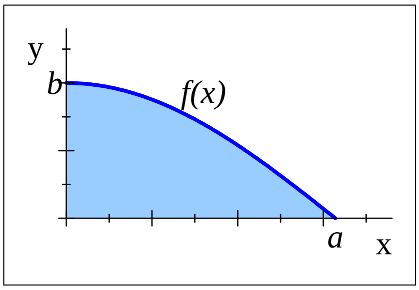
(c) $B(a,1) = \frac{1}{a}$

(d) $B(a,2) = \frac{1}{a(a+1)}$

54. * Sei $f$ eine stetig differenzierbare streng monoton fallende Funktion auf einem Intervall $[0,a]$, wobei $a > 0$.

Nehmen wir an, dass $f(a) = 0$ und $f(0) = b > 0$. Somit existiert die stetige inverse Funktion $f^{-1}$ auf dem Intervall $[0,b]$.

Beweisen Sie die folgende Identität:




$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^b f^{-1}(y)dy. \tag{7}$$

Mit Hilfe von (7) bestimmen Sie

$$\int_0^1 \arccos y\,dy.$$

*Hinweis.* Verwenden Sie im zweiten Integral in (29) die inverse Substitution $y = f(x)$ und die partielle Integration.

55. * Seien $I, J$ zwei Intervalle und $\varphi, \psi : I \to J$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Sei $f$ eine stetige Funktion auf $J$. Beweisen Sie, dass die folgende Funktion

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

auf $I$ stetig differenzierbar ist und es gilt

$$F'(x) = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x). \tag{8}$$

Mit Hilfe von (8) leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$F(x) = \int_{\sqrt{\ln x}}^{2\sqrt{\ln x}} e^{t^2}\,dt.$$