Blatt 6 - Abgabe bis 23.05.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

54. Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Linearität:

(i) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$ (ii) $\int \sin x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx$ (iv) $\int \ln(xe^{x^2}) dx$

55. Mit Hilfe von partieller Integration bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int x \sinh x\, dx$ (ii) $\int x^2 \ln x\, dx$ (iii) $\int \arctan x\, dx$ (iv) $\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

56. Mit Hilfe von Substitution bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int xe^{-x^2} dx$ (ii) $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x}}$ (iii) $\int \tan x\, dx$ (iv) $\int \frac{3 + \ln^2 x}{x} dx$

57. Mit Hilfe von partieller Integration bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int x \cos x\, dx$ (ii) $\int \frac{x\, dx}{\cosh^2 x}$ (iii) $\int \ln^2 x\, dx$ (iv) $\int e^x \sin x\, dx$

58. * Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int (e^x + x)^2\, dx$ (ii) $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(2 + x)}}$ (iv) $\int x \arctan x\, dx$

59. * Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution:

(i) $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1 - x^{16}}}$ (ii) $\int \sqrt{\tan x}\, (\cos x)^{3/2}\, dx$ (iii) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$

Hinweis. (ii) Der Definitionsbereich ist $(0, \pi/2)$.
(iii) Der Definitionsbereich ist $(-\pi/2, \pi/2)$. Verwenden Sie die inverse Substitution $x = \arctan y$, $y \in \mathbb{R}$.
(iv) Verwenden Sie die Substitution $y = e^{-x/2}$.

60. ** Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ (ii) $\int \sqrt{\frac{x - 1}{2 - x}} dx$

Hinweis. (i) Verwenden Sie die partielle Integration für das Integral $\int \frac{dx}{x^2+1}$.

(ii) Der Definitionsbereich ist $x \in (1, 2)$. Benutzen Sie die Substitution $y = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ und dann auch (i).

61. ** Betrachten wir die Gleichung

$$\ln x = 1 + ax, \qquad x \in (0, +\infty), \tag{17}$$

wobei $a > 0$ ein Parameter und x eine Unbekannte ist. Beweisen Sie: die Gleichung (17) hat

(a) keine Lösung falls $a > e^{-2}$;

(b) genau eine Lösung falls $a = e^{-2}$;

(c) genau zwei Lösungen falls $a < e^{-2}$.

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 1 + ax - \ln x$, finden Ihre Minimumstelle x_0 auf $(0, +\infty)$ und bestimmen das Vorzeichen von $f(x_0)$.