Blatt 07 - Abgabe bis 30.05.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

62. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \int \frac{dx}{\cos x} \qquad \text{(ii)} \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \qquad \text{(iii)} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx \qquad \text{(iv)} \int \cos x \ln \sin x \, dx$$

Hinweis. Verwenden Sie die Substitution $y = \sin x$.

63. Bestimmen Sie die folgenden Integrale (wobei $a > 0$):

$$\text{(i)} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \text{(ii)} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{(iii)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \text{(iv)} \int \sqrt{x\,(2 - x)}\, dx$$

Hinweis. (iv) Verwenden Sie die quadratische Ergänzung unter der Wurzel.

64. Bestimmen Sie die folgenden Integrale von rationalen Funktionen:

$$\text{(i)} \int \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx \qquad \text{(ii)} \int \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

65. Bestimmen Sie die folgenden Integrale (wobei $a > 0$):

$$\text{(i)} \int \frac{x^2 dx}{x^2 + a^2} \qquad \text{(ii)} \int \frac{dx}{x^4 - a^4} \qquad \text{(iii)} \int \frac{x\,dx}{x^4 + 4}$$

66. * Bestimmen Sie die folgenden Integrale von rationalen Funktionen:

$$\text{(i)} \int \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^4 + x^2} dx \qquad \text{(ii)} \int \frac{(x^2 + 1)\,dx}{(x + 1)\,(x + 2)\,(x - 3)} \qquad \text{(iii)} \int \frac{(x + 2)\,dx}{x^3 - 5x^2 + 4x}$$

67. ** Bestimmen Sie die folgenden Integrale von rationalen Funktionen:

$$\text{(i)} \int \frac{x^4 dx}{x^3 + 1} \qquad \text{(ii)} \int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 - 1} dx$$

68. ** Bestimmen Sie die folgenden Integrale von rationalen Funktionen:

$$\text{(i)} \int \frac{1 + x}{(1 + x^2)^2} dx \qquad \text{(ii)} \int \frac{dx}{(x - 1)^2\,(x + 1)}$$

Hinweis. Verwenden Sie die Methoden aus Abschnitt 9.6 des Vorlesungsskripts.

69. ** Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \quad \int \frac{dx}{x^4+4} \qquad \text{(ii)} \quad \int \frac{x^2 dx}{x^4+4}$$

Hinweis. Verwenden Sie die Faktorisierung

$$x^4 + 4 = \left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

70. ** Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \quad \int \sin^4 x dx \qquad \text{(ii)} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \qquad (x > 0)$$

Hinweis. (i) Verwenden Sie die Identitäten $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ und $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
(ii) Verwenden Sie die Substitution $y = \sqrt{1+x^2}$.

71. ** Bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}} \qquad \text{(ii)} \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-2)(x-1)}} \qquad (x > 2)$$

Hinweis. (i) Verwenden Sie die Substitution $y = \sqrt{x^2+2x+4} - x$ (die *erste Eulersche Substitution*).
(ii) Verwenden Sie die Substitution $y = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$ (die *dritte Eulersche Substitution*)

72. ** Bestimmen Sie die folgenden Integrale im Definitionsbereich $x \in (0, \pi/2)$:

$$\text{(i)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} \qquad \text{(ii)} \quad \int \frac{dx}{1+\tan x}$$

Hinweis. (i) Verwenden Sie die Substitution $y = \sqrt{2\tan x}$ und Aufgabe 69.
(ii) Verwenden Sie die Substitution $y = \tan x$.