Blatt 07 - Abgabe bis 04.06.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

56. * Sei $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung der Kurve $K = \psi([a,b])$. Für jede Zerlegung $Z = \{t_k\}_{k=0}^n$ des Intervalls $[a,b]$ definieren wir die Summe

$$\sigma(\psi, Z) = \sum_{k=1}^{n} |\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})|.$$

Beweisen Sie:

$$L(K,\psi) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} \sigma(\psi, Z).$$

57. * Mit Hilfe von einer passenden Substitution beweisen Sie die Identität

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

ohne die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ zu benutzen.

58. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\text{(i)} \int_0^\infty x e^{-ax} dx \quad (a>0) \qquad \text{(ii)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{(iv)} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4}$$

59. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. In (i) und (ii) bestimmen Sie für welche Werte von dem reellen Parameter p die Integrale konvergent sind:

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \qquad \text{(ii)} \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} \qquad \text{(iii)} \int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, dx \quad (a>0) \qquad \text{(iv)} \int_0^{\pi/2} \tan x$$

60. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \text{(iii)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} \qquad \text{(iv)} \int_0^{\pi/2} \sin x \ln \cos x \, dx$$

61. Mit Hilfe von Integralkriterium bestimmen Sie ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind. In (i) und (ii) bestimmen Sie für welche Werte vom reellen Parameter p die Reihen konvergieren:

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k (\ln\ln k)^p} \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

62. * Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a)
$$\int_0^\infty e^{-x^2} x\, dx = \frac{1}{2}.$$

(b) Für alle $n \geq 2$
$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^n dx = \frac{(n-1)}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{n-2} dx.$$

(c) Für alle $k \in \mathbb{Z}_+$
$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2k+1} dx = \frac{k!}{2}.$$