Blatt 08 - Abgabe bis 11.06.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

63. Mit Hilfe von dem Majorantenkriterium beweisen Sie, dass die folgenden Integrale absolut konvergent sind:

(i) $\int_0^1 \ln x \cos \frac{1}{x}\, dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}\, dx$ (iii) $\int_1^\infty \frac{x \sin x}{x^3+1} dx$ (iv) $\int_0^1 \frac{e^x - 2}{\sqrt{x - \frac{1}{2}x^3}} dx$

64. Mit Hilfe von dem Vergleichskriterium bestimmen Sie, ob die folgende Integrale konvergent oder divergent sind:

(i) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$ (ii) $\int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x^3} dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \ln(1+x)}$ (iv) $\int_0^1 \frac{\tan x}{(e^x - 1)^2} dx$

65. Bestimmen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale absolut konvergent, bedingt konvergent, oder divergent sind.

(i) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}\, dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$ (iv) $\int_1^\infty \cos\left(x^2\right) \arctan x\, dx$

66. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion Γ.

(a) Für alle $a > -1$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^a dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

(b) Beschließen Sie: für alle $n \in \mathbb{Z}_+$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n+1} dt = \frac{1}{2} n!$$

(c) Es ist bekannt dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Mit Hilfe von dieser Identität beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} dt = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}},$$

wobei $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

(d) Für alle $a > -1$ gilt

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^a dt = \Gamma(a+1).$$

67. * Der Zweck dieser Aufgabe ist die folgende Identität zu beweisen:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{8}. \tag{9}$$

(a) Überprüfen Sie die folgende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{1}{8}\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{8}\frac{x-2}{x^2-2x+2}.$$

(b) Bestimmen Sie $\int \frac{dx}{x^4+4}$ und dann beweisen (9).

68. * Sei f eine monoton steigende Funktion auf $[1,\infty)$.

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^n f(k) \le \int_1^{n+1} f(x)dx. \tag{10}$$

(b) Verwenden Sie (10) mit $f(x) = \ln x$ um zu beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Bemerkung. In der Tat gilt für $n \to +\infty$ die *Stirling-Formel* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

69. * Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{x^2}$ mit Hilfe von der inversen Substitution $x = \sin y$.

(b) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{x^2}$ mit Hilfe von der inversen Substitution $x = \sinh y$ (wobei $b > a > 0$).

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ mit Hilfe von der Substitution $y = e^{-x/2}$.

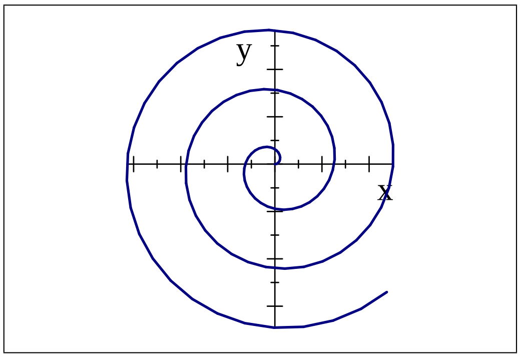
70. * Eine Kurve K wird in Polarkoordinaten (r,θ) durch die Parametrisierung $(r(t),\theta(t))$, $t \in [a,b]$ angegeben.

(a) Beweisen Sie, dass die Länge L von K sich wie folgt bestimmen lässt:

$$L = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + (r(t)\,\theta'(t))^2}\,dt. \tag{11}$$

(b) Bestimmen Sie die Länge der folgenden *Spiralen*, wobei in allen Fällen $\theta(t) = t$:

(i) Archimedische Spirale $r(t) = t$, $t \in [0,a]$.
(ii) Eine Spirale $r(t) = t^2$, $t \in [0,a]$.
(iii) Logarithmische Spirale $r(t) = e^t$, $t \in (-\infty, a]$.
(iv) Hyperbolische Spirale $r(t) = 1/t$, $t \in [a,b]$.



Archimedische Spirale $r = \theta$