Blatt 08 - Abgabe bis 06.06.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

73. Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von Substitution:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$ (ii) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ (iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{5x^3+1}\, dx$

74. Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

(i) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\, dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x\, dx$ (iii) $\displaystyle\int_0^e \sin(\ln x)\, dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$

75. Bestimmen Sie die folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2} dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ (iii) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ (iv) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx$

76. * Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{x^2}$ mit Hilfe von der inversen Substitution $x = \sin y$.

(b) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{x^2}$ mit Hilfe von der inversen Substitution $x = \sinh y$ (wobei $b > a > 0$).

77. (*Flächeninhalt unter der Parabel*) Betrachten wir die quadratische Funktion

$$f(x) = -a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$$

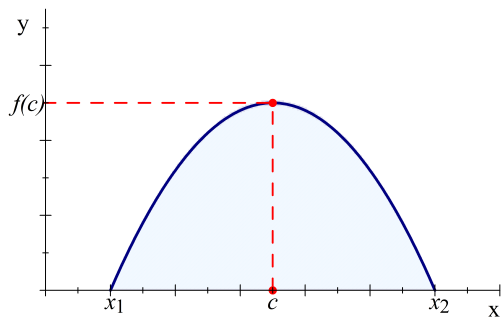
mit $a > 0$ und reellen Nullstellen $x_1 < x_2$ so dass $f(x) \geq 0$ auf dem Intervall $[x_1, x_2]$.

Beweisen Sie dass der Flächeninhalt des Untergraphes von f auf $[x_1, x_2]$ gleich

$$\frac{2}{3} f(c)\,(x_2 - x_1)\,.$$

ist, wobei

$$c = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$



78. ** Die *Betafunktion* $B(a,b)$ ist für alle reellen Zahlen $a, b \geq 1$ wie folgt definiert:

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, dt. \tag{18}$$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

(a) $B(a,b) = B(b,a)$

(b) $B(a,b) = \frac{b-1}{a} B(a+1, b-1)$ für $b \geq 2$.

(c) $B(a,1) = \frac{1}{a}$

(d) Für alle $a \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B(a,n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)...(a+n-1)}. \tag{19}$$

(e) Für alle $a \geq 1$ and $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{a+k} \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{a(a+1)...(a+n-1)}. \tag{20}$$

Hinweis. Berechnen Sie $B(a,n)$ direkt aus (18) mit Hilfe von dem binomischen Lehrsatz und vergleichen das Ergebnis mit (19).

79. ** Fixieren wir drei Zahlen $a < b < c$. Seien f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ und g eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[b,c]$. Definieren wir die neue Funktion h auf $[a,c]$ wie folgt:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b), \\ g(x), & x \in (b,c] \\ \text{beliebig}, & x = b. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass h auf $[a,c]$ Riemann-integrierbar ist und

$$\int_a^c h dx = \int_a^b f dx + \int_b^c g dx.$$

Hinweis. Sie können annehmen, dass die Funktionen f und g beschränkt sind. Vergleichen Sie eine Riemann-Summe von h mit passenden Riemann-Summen von f und g.

80. ** Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$ und $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0.$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx \, dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = 0$ und $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \, dx = 0$

vorausgesetzt dass $n \neq m$

81. ** Sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf $[0,1]$.

(a) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right)+f\left(\tfrac{2}{n}\right)+...+f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Hinweis. Stellen Sie den Ausdruck $\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ als eine Riemann-Summe dar.

(b) Beweisen Sie: ist $f(x)$ positiv auf $[0,1]$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\tfrac{1}{n}\right)f\left(\tfrac{2}{n}\right)...f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right)^{1/n}=\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)\,dx\right).$$

(c) Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left((n+1)(n+2)...(n+n)\right)^{1/n}$.

Hinweis. Verwenden Sie (a) und (b) mit passenden Funktionen f.

82. ** Sei $f=u+iv$ eine komplexwertige Funktion auf einem Intervall $I\subset\mathbb{R}$ wobei u und v reellwertig sind. Die Funktion f heißt differenzierbar in $x\in I$ wenn u und v in x differenzierbar sind. In diesem Fall wird die Ableitung $f'(x)$ wie folgt definiert: $f'(x)=u'(x)+iv'(x)$.

(a) Beweisen Sie, dass für beliebiges $c\in\mathbb{C}$ gilt

$$(e^{cx})'=ce^{cx}. \tag{21}$$

(b) Beweisen Sie die Produktregel $(fg)'=f'g+fg'$ für komplexwertige differenzierbare Funktionen f und g.

83. ** Seien u and v stetige Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$. Definieren wir das Integral der komplexwertigen Funktion $f=u+iv$ mit

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u(x)dx+i\int_a^b v(x)dx.$$

(a) Beweisen Sie: für jedes $c\in\mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx. \tag{22}$$

(b) Beweisen Sie: ist F eine komplexwertige Stammfunktion von f auf $[a,b]$, d.h. $F'=f$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \tag{23}$$

Insbesondere gilt es für jedes $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\int_a^b e^{cx}dx=\frac{e^{cb}-e^{cz}}{c}. \tag{24}$$

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^1 e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dafür verwenden Sie (24) mit $c = \alpha + i\beta$ und die Identität

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$