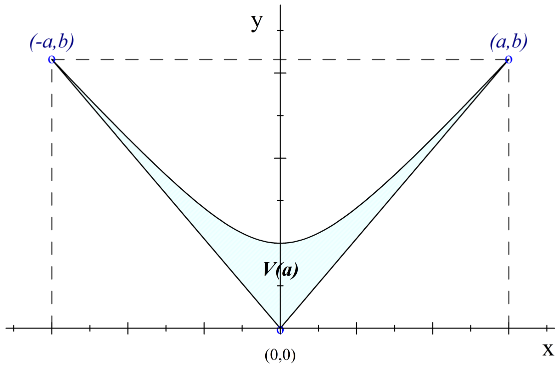
Blatt 09 - Abgabe bis 13.06.2025 12:00

Die mit *markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden korrigiert
Die mit **markierten Aufgaben sind zusätzlich und werden nicht korrigiert.

84. (*Flächeninhalt unter der Hyperbel* $y^2 - x^2 = 1$) Für jedes $a > 0$ bezeichnen wir mit $V(a)$ die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ die von den folgenden drei Linien begrenzt ist:

- die Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$ zwischen den Punkten (a, b) und $(-a, b)$ wobei $b = \sqrt{a^2 + 1}$;
- die Gerade zwischen $(0, 0)$ und (a, b);
- die Gerade zwischen $(0, 0)$ und $(-a, b)$.



Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt von $V(a)$ ist

$$F(V(a)) = \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right).$$

Bemerkung. Da $\ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right) = \sinh^{-1} a$, stellt der Flächeninhalt $F(V(a))$ eine geometrische Beschreibung der Funktion $\sinh^{-1} a$ dar, was den Name "Hyperbelfunktion" rechtfertigt. Die inverse Funktion $\sinh^{-1}$ wird auch mit arsinh bezeichnet wobei "ar" für "area" steht (d.h. Flächeninhalt).

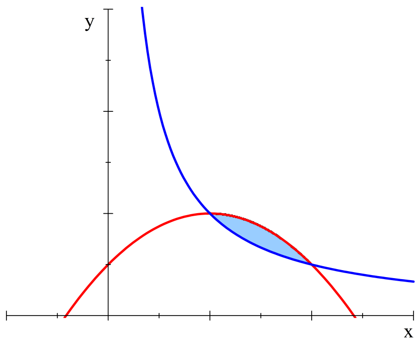
Hinweis. Stellen Sie $V(a)$ in der Form $V(a) = U_{f,g}$ für passende Funktionen f, g auf $[-a, a]$ dar, und verwenden die Formel

$$F(U_{f,g}) = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx - \int_{-a}^{a} g(x)\, dx.$$

85. Für jedes Paar von gegebenen Funktionen f und g bestimmen Sie das maximale Intervall $[a, b]$ wo $f(x) \geq g(x)$ und den Flächeninhalt von $U_{f,g}$ auf diesem Intervall.

(a) Die Parabel $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ und die Hyperbel $g(x) = \frac{1}{x}$ im Definitionsbereich $x \in (0, +\infty)$.

(b) $f(x) = 2\sin x$ und $g(x) = \tan x$ im Definitionsbereich $x \in [0, \pi/2)$.



Die Parabel (rot) und die Hyperbel (blau)

Hinweis. Die Zahlen a und b sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$. Zeigen Sie dass die Gleichung $f(x) = g(x)$ genau zwei Lösungen a und b im angegebenen Definitionsbereich hat und dass $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

86. ** Lösen Sie die Aufgabe 85 für die Funktionen $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ und $g(x) = \frac{2/5}{x}$, $x \in (0, 1)$.

87. ** (*Flächeninhalt unter der Hyperbel* $y = \frac{1}{x}$) Definieren wir die Funktion

$$L(a) := \int_1^a \frac{dx}{x}, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie die Identität

$$L(ab) = L(a) + L(b) \quad \text{für alle } a, b > 0$$

ohne die Gleichheit $L(a) = \ln a$ zu benutzen. Dafür benutzen Sie eine passende Substitution im Integral.

88. Bestimmen Sie die Längen der folgenden Kurven.

(a) Der Graph der Funktion $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ auf einem Intervall $[a, b]$ wobei $1 < a < b$.

(b) Der Graph der Funktion $f(x) = x^{3/2}$ auf dem Intervall $[0, 28]$ (*halb-kubische Parabel*).

(c) Die *Helix* in $\mathbb{R}^3$, die durch die Parametrisierung $\varphi(t) = (\cos t, \sin t,\ t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, angegeben ist.

89. Bestimmen Sie die Längen der folgenden Kurven.

(a) Der Graph der Funktion $f(x) = \ln x$ auf dem Intervall $x \in [1, 2]$.
Hinweis. Sie können benutzen dass

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + C \tag{25}$$

(Aufgabe 70)

(b) Die *Kettenlinie*: der Graph der Funktion $f(x) = \cosh x$ auf dem Intervall $x \in [0, a]$, $a > 0$.

(c) Die *Traktrix* mit der Parametrisierung

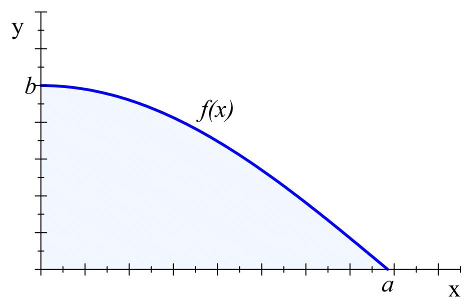
$$\varphi(t) = \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right)$$

auf dem Intervall $t \in [0, a]$, $a > 0$.

90. * Sei f eine stetig differenzierbare streng monoton fallende Funktion auf einem Intervall $[0, a]$, wobei $a > 0$. Nehmen wir an, dass

$$f(a) = 0 \text{ und } f(0) = b > 0.$$

Somit existiert die stetige inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $[0, b]$.



Beweisen Sie die folgende Identität:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^b f^{-1}(y)dy. \tag{26}$$

Mit Hilfe von (26) bestimmen Sie

$$\int_0^1 \arccos y \, dy.$$

Hinweis. Verwenden Sie im zweiten Integral in (26) die inverse Substitution $y = f(x)$ und die partielle Integration.

91. * Eine Kurve K wird in Polarkoordinaten (r, θ) durch eine Parametrisierung $(r(t), \theta(t))$, $t \in [a, b]$, angegeben.

(a) Beweisen Sie, dass die Länge L von K sich wie folgt bestimmen lässt:

$$L = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + (r(t)\,\theta'(t))^2}\,dt. \tag{27}$$

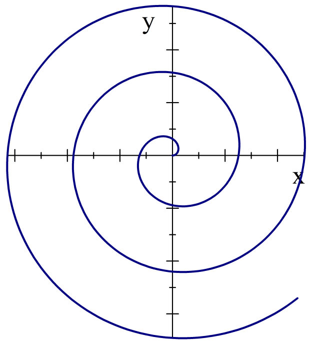
(b) Bestimmen Sie die Länge der folgenden *Spiralen*, wobei in allen Fällen $\theta(t) = t$:

(i) Archimedische Spirale $r(t) = t$, $t \in [0, a]$.

(ii) Eine Spirale $r(t) = t^2$, $t \in [0, a]$.

(iii) Logarithmische Spirale $r(t) = e^t$, $t \in (-\infty, a]$.

(iv) Hyperbolische Spirale $r(t) = 1/t$, $t \in [a, b]$.



Archimedische Spirale $r = \theta$

92. ** Sei f eine stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$, $a < b$.

(a) Sei g eine stetige Funktion auf $[a, b]$ die auf (a, b) positive ist. Beweisen Sie: es gibt ein $c \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

(b) Sei n eine natürliche Zahl. Beweisen Sie: es gibt ein $c \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b \frac{f(x)(b-x)^n}{n!}dx = f(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

93. ** Der Zweck dieser Aufgabe ist der Beweis der folgenden Ungleichung

$$\frac{5}{2} < e < 3. \tag{28}$$

(a) Beweisen Sie mit Hilfe von Darboux-Summen, dass

$$\int_1^{5/2} \frac{dx}{x} < 1 < \int_1^3 \frac{dx}{x}. \tag{29}$$

Dafür wählen Sie passende Zerlegungen von den Intervallen der Integration und benutzen die Ungleichungen für Darboux-Summen:

$$S_*(f, Z) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S^*(f, Z).$$

Für Berechnen der Darboux-Summen dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.

(b) Beweisen Sie (28) mit Hilfe von (29) und der Identität $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$.

94. ** (*Tangententrapezformel*) Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall $[a, b]$. Setzen wir

$$C = \sup_{[a,b]} |f''|.$$

(a) Beweisen Sie, dass

$$\left| \int_a^b f(x)dx - f(c)(b-a) \right| \leq \frac{C}{24}(b-a)^3 \tag{30}$$

wobei $c = \frac{a+b}{2}$

Hinweis. Vergleichen Sie $f(x)$ mit der Tangente $T(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ an der Stelle c und berechnen $\int_a^b T(x)dx$.

(b) Sei $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a, b]$ in n gleiche Intervalle, d.h. $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ für alle $k = 1, ..., n$. Wählen wir die Zwischenstellen $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ wie folgt:

$$\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(f, Z, \xi) \right| \leq \frac{C}{24n^2}(b-a)^3. \tag{31}$$

Bemerkung. Die ungefähre Gleichheit

$$\int_a^b f(x)dx \approx S(f, Z, \xi)$$

für die oben gewählten Z und ξ wird als *Trapezformel* bezeichnet. Der Approximationsfehler dieser Gleichheit wird von (31) abgeschätzt.

(c) Berechnen Sie ungefähr das Integral

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx$$

mit Approximationsfehler $< 10^{-3}$.

Hinweis. Für Berechnung der Riemann-Summe dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen. Zur Abschätzung von $\left(\frac{\sin x}{x}\right)''$ nehmen Sie ohne Beweis an dass $\left(\frac{\sin x}{x}\right)''' \geq 0$ für $x \in [1, 2]$.

95. ** Sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung der Kurve $K = \varphi([\alpha, \beta])$.

(a) Für jede Zerlegung $Z = \{t_k\}_{k=0}^n$ des Intervalls $[\alpha, \beta]$ definieren wir die Summe

$$\sigma(\varphi, Z) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})| .$$

Beweisen Sie dass

$$L(K, \varphi) = \lim_{\varphi(Z) \to 0} \sigma(\varphi, Z) . \tag{32}$$

(b) Mit Hilfe von (32) beweisen Sie, dass

$$L(K, \varphi) \geq |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| , \tag{33}$$

d.h. die Länge einer Kurve ist großer oder gleich dem Abstand zwischen den Endpunkten.

96. ** Sei F eine positive 2-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall $[a, +\infty)$. Nehmen wir an dass $F'(x) \neq 0$ für $x \in [a, +\infty)$,

$$\lim_{x \to +\infty} F'(x) = 0$$

und

$$c := \lim_{x \to \infty} \frac{F''F}{(F')^2}(x) \neq 0.$$

Beweisen Sie, dass

$$\int_a^x \frac{dy}{F(y)} \sim -\frac{c^{-1}}{F'(x)} \text{ für } x \to \infty. \tag{34}$$

Mit Hilfe von (34) beweisen Sie, dass für alle $\alpha, \beta > 0$

$$\int_1^x \frac{\exp(y^\alpha)}{y^\beta} dy \sim \frac{\exp(x^\alpha)}{\alpha x^{\alpha+\beta-1}} \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

97. ** Seien I, J zwei Intervalle und $\varphi, \psi : I \to J$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Sei f eine stetige Funktion auf J. Beweisen Sie, dass die folgende Funktion

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$$

auf I stetig differenzierbar ist und es gilt

$$F'(x) = f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x) . \tag{35}$$

Mit Hilfe von (35) leiten Sie die folgende Funktion ab:

$$F(x) = \int_{\sqrt{\ln x}}^{2\sqrt{\ln x}} e^{t^2} dt.$$