Blatt 09 - Abgabe bis 18.06.2021

Zusätzliche Aufgaben sind mit * markiert

71. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Die Folge $f_k(x) = kx\left(1-x^2\right)^k$ konvergiert gegen 0 auf $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.
   Hinweis. Zeigen Sie, dass
   $$\int_0^1 f_k(x)dx \not\to 0 \text{ für } k\to\infty.$$

   (b) Die Folge $f_k(x) = \dfrac{x}{1+kx^2}$ konvergiert gegen 0 gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

72. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Die Funktion $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kx}$ ist stetig in $(0,+\infty)$. Bestimmen Sie das Integral $\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)dx$.

   (b) Die Funktion $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{1+k^3}$ ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Integral $\int_0^{\pi} g(x)dx$.

73. * Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Die Funktion $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}e^{-kx}$ ist stetig in $[0,+\infty)$ und stetig differenzierbar in $(0,+\infty)$.

   (b) Die Funktion $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+x^2}$ ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$.

74. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ ist konvergent für alle $x \in (-1,1)$. Bestimmen Sie die Summe dieser Reihe.

   (b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k$ ist konvergent für alle $x \in (-1,1)$. Bestimmen Sie die Summe dieser Reihe.

   (c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}$hat den Konvergenzradius 1 und die Summe dieser Reihe im Konvergenzintervall ist gleich
   $$\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1.$$
   Beschließen Sie daraus, dass
   $$\ln 2 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)\,2^k}.$$

Hinweis. Integrieren Sie zwei mal die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

75. (a) Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^n.$$

Nehmen wir an, dass alle $a_n \neq 0$ und dass die Folge $\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|$ konvergiert. Beweisen Sie dass

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

(b) Beweisen Sie, dass der Konvergenzradius der binomischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

für jedes $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gleich 1 ist.

76. * Die riemannsche *Zeta-Funktion* $\zeta(x)$ wird für alle $x > 1$ wie folgt definiert:

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}.$$

Beweisen Sie, dass $\zeta(x)$ in $(1, \infty)$ unendlich oft differenzierbar ist.

77. * Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k(k+1)}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

(b) Die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 \ln^2 k}$$

ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

78. * Die Betafunktion $B(a,b)$ wurde in Aufgabe 53 wie folgt definiert:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \tag{12}$$

(a) Beweisen Sie, dass das Integral in (12) für alle $a > 0$ und $b > 0$ konvergent ist, so dass $B(a,b)$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ definiert ist.

(b) Beweisen Sie, dass $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.