Probeklausur Analysis 2, SS 2025
(keine Abgabe, nur für Selbstkontrolle)

Die Dauer der Klausur ist 120 Minuten.
Benutzung von Notizen, Büchern, Taschenrechnern, Handys usw. ist *nicht* erlaubt, aber man darf die Tabellen von Ableitungen und Grundintegralen benutzen.
Jede Aufgabe beträgt 25 Punkte. Die Note "1" $\Leftrightarrow$ mindestens 95 Punkte.
Die Note "4" (Bestanden) $\Leftrightarrow$ ca. 50 Punkte.

Aufgabe 1

8 Pkt (a) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Fermat. Formulieren Sie ohne Beweis den Mittelwertsatz von Lagrange.

9 Pkt (b) Definieren Sie den Begriff von Taylor-Polynom einer Funktion. Formulieren Sie ohne Beweis die Taylorformel n-er Ordnung mit Peano-Restglied. Für die Funktion $f(x) = \tan x$ bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_3(x)$ an der Stelle 0.

8 Pkt (c) Fur die Funktion $f(x) = x \ln^2 x$ auf dem Intervall $[0, e]$ bestimmen Sie alle kritischen Punkte, die Intervalle von Monotonie, und skizzieren ihren Graph.

Aufgabe 2

8 Pkt (a) Definieren Sie den Begriff der Stammfunktion. Formulieren Sie ohne Beweis den Satz über Existenz von Stammfunktion. Formulieren und beweisen Sie den Satz über Eindeutigkeit der Stammfunktion. Definieren Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$.

9 Pkt (b) Formulieren und beweisen Sie die Formel der partiellen Integration für unbestimmtes Integral.

8 Pkt (c) Mit Hilfe von partiellen Integration bestimmen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \int \ln^2 x \, dx \qquad \text{(ii)} \int e^x \sin x \, dx$$

Aufgabe 3

9 Pkt (a) Definieren Sie Riemann-Summe, Riemann-Integral und Riemann-integrierbare Funktion. Formulieren Sie ohne Beweis den Satz über hinreichende Bedingungen für Riemann-Integrierbarkeit.

8 Pkt (b) Formulieren und beweisen Sie die Substitutionsregel für bestimmtes Integral.

8 Pkt (c) Mit Hilfe von Substitutionsregel bestimmen Sie die Integrale:

$$\text{(i)} \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \qquad \text{(ii)} \int_0^1 x^2 \sqrt{5x^3 + 1} \, dx$$

Aufgabe 4

8 Pkt (a) Definieren Sie eine Metrik und einen metrischen Raum. Definieren Sie den Begriff der Konvergenz von Folgen im metrischen Raum. Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Grenzwertes.

8 Pkt (b) Definieren Sie offene und abgeschlossene Mengen im metrischen Raum. Formulieren und beweisen Sie die äquivalente Bedingung für Abgeschlossenheit mit Hilfe von Konvergenz von Folgen.

9 Pkt (c) Definieren Sie stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Formulieren und beweisen Sie die äquivalente Bedingung für Stetigkeit mit Hilfe von Urbildern der offenen Mengen.

Aufgabe 5

8 Pkt (a) Definieren Sie die Begriffe partielle Ableitung und Jacobi-Matrix. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ wobei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$ und

$$f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

9 Pkt (b) Definieren Sie den Begriff der totalen Ableitung. Formulieren und beweisen Sie den Satz über die Beziehung zwischen totaler Ableitung und Jacobi-Matrix.

8 Pkt (c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen ∂_x, ∂_y, ∂_z der Funktion

$$f(x, y, z) = x^{y^z}$$

im Definitionsbereich $x, y, z > 0$.