Analysis II

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

SS 2025

Contents

8 Differentialrechnung (Fortsetzung) **1**

→**Vorlesung 1** (09.04.2025) 1

8.1 Berechnungsmethoden der Ableitung 1

8.2 Sätze von Fermat, Rolle und Lagrange 6

8.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f' 9

→**Vorlesung 2** (11.04.2025) 10

8.4 Vergleichstest und Ungleichungen 13

8.5 Unbestimmte Ausdrücke und Regel von L'Hôspital 16

→**Vorlesung 3** (16.04.2025) 19

8.6 Landau-Symbol und Differential 24

8.7 Zweite Ableitung und Taylorformel 25

→**Vorlesung 4** (23.04.2025) 26

8.8 Lokale Extrema 29

→**Vorlesung 5** (25.04.2025) 31

8.9 Konvexe und konkave Funktionen 31

8.10 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f' und f'' 35

→**Vorlesung 6** (30.04.2025) 38

8.11 * Funktionsgraphen und Statistiken 40

8.12 * Verwenden von Software zum Zeichnen von Funktionsgraphen 40

8.13 Höhere Ableitungen 41

8.14 Taylorformel mit Peano-Restglied 43

→**Vorlesung 7** (02.05.2025) 47

... *Fortsetzung folgt* 48

Chapter 8

Differentialrechnung (Fortsetzung)

09.04.2025 **Vorlesung 1**

Zunächst erinnern wir uns an die Definition der *Ableitung*. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall J.

Definition. Die Ableitung von f an einer Stelle $x \in J$ ist der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \tag{8.1}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert.

Der Ausdruck $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ heißt der *Differenzenquotient* von f. Ist der Grenzwert in (8.1) endlich, so heißt f *differenzierbar* in $x \in J$. Ist f an allen Stellen $x \in J$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf dem Intervall J. In diesem Fall ist die Ableitung f' auch eine Funktion auf J.

Andere Notation für f':

$$f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f.$$

8.1 Berechnungsmethoden der Ableitung

Rechenregeln

Satz 8.1 *Seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, die in einem $x \in J$ differenzierbar sind. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ auch in x differenzierbar (im Fall von f/g vorausgesetzt $g \neq 0$) und die folgenden Identitäten gelten an der Stelle x:*

(a) Summenregel:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'.} \tag{8.2}$$

(b) Produktregel (*oder* Leibnizregel):

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'.} \tag{8.3}$$

(c) Quotientenregel:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.} \tag{8.4}$$

Sind f und g in J differenzierbar so gelten diese Identitäten auch in J.

Beweis von Satz 8.1. (a) Nach Definition von Ableitung und Summenregel für Limes erhalten wir

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{(f+g)(y)-(f+g)(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x} \\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

(b) Mit gleichem Argument und mit Hilfe von Stetigkeit von f an der Stelle x, erhalten wir

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(x)g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)(g(y)-g(x))}{y-x} + \lim_{y\to x}\frac{(f(y)-f(x))g(x)}{y-x} \\ &= f(x)\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x} + \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}g(x) \\ &= f(x)g'(x)+f'(x)g(x),\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(c) Berechnen wir zunächst $\left(\frac{1}{g}\right)'$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{y\to x}\frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{g(y)}-\frac{1}{g(x)}\right) \\ &= \lim_{y\to x}\frac{1}{y-x}\left(\frac{g(x)-g(y)}{g(y)g(x)}\right) \\ &= \lim_{y\to x}\frac{g(x)-g(y)}{y-x}\lim_{y\to x}\frac{1}{g(y)g(x)} \\ &= -g'(x)\frac{1}{g^2(x)},\end{aligned}$$

d.h.

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}}. \tag{8.5}$$

Diese Identität ist ein spezieller Fall von (8.4) für $f \equiv 1$.

Für allgemeine Funktion f erhalten wir mit Hilfe von Produktregel (8.3) und (8.5):

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\left(\frac{1}{g}\right) + f\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

■

Bemerkung. Es folgt per Induktion aus der Summenregel, dass für n differenzierbare Funktionen $f_1, ..., f_n$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'.$$

Bemerkung. Für das Produkt dreier Funktionen f, g, h gilt die Regel

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh',$$

da nach (8.3)

$$(fgh)' = ((fg)\,h)' = (fg)'\,h + (fg)\,h' = (f'g + fg')\,h + fgh' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Analog gilt für das Produkt von n Funktionen $f_1, ..., f_n$ die Regel

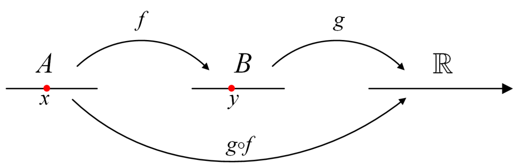
$$(f_1...f_n)' = f_1'f_2...f_n + f_1f_2'f_3...f_n + ...f_1...f_k'...f_n + ...f_1...f_{n-1}f_n',$$

die man per Induktion nach n beweisen kann.

Kettenregel

Satz 8.2 (Kettenregel) *Seien f eine Funktion auf einem Intervall A und g eine Funktion auf einem Intervall B, so dass die Verkettung $g \circ f$ definiert ist (d.h. $f(A) \subset B$). Sei f differenzierbar in einem $x \in A$ und g differenzierbar in $y = f(x) \in B$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x und es gilt*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(y)\, f'(x)} = g'(f(x))\, f'(x)\,. \tag{8.6}$$



Für den Beweis des Satzes 8.2 brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 8.3 *Sei f eine Funktion auf einem Intervall J die in einem $a \in J$ differenzierbar ist. Dann existiert eine Funktion $\Phi : J \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $f(x) - f(a) = \Phi(x)(x - a)$ *für alle $x \in J$;*

(ii) $\Phi(a) = f'(a)$

(iii) *Φ ist stetig in a.*

Bemerkung. Da f in a differenzierbar ist, so gilt eine ungefähre Gleichheit

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a) \quad \text{für} \quad x \approx a.$$

Die Bedeutung von (i) ist dass wir die Konstante $f'(a)$ hier durch eine Funktion $\Phi(x)$ ersetzen und somit eine richtige Gleichheit für alle $x \in J$ erhalten. Die Funktion Φ aus Lemma 8.3 heißt die *Verhältnisfunktion* von f an der Stelle a.

Beweis. Definieren wir $\Phi(x)$ für alle $x \in J$ wie folgt:

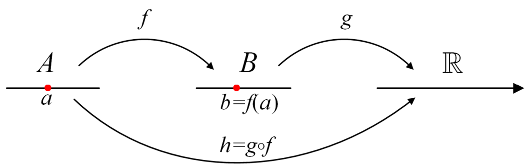
$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}, & x \neq a, \\ f'(a), & x = a. \end{cases} \tag{8.7}$$

Die Identität (i) gilt für $x \neq a$ nach Definition (8.7), und für $x = a$, da die beiden Seiten von (i) verschwinden. Die Identität (ii) gilt auch nach Definition (8.7). Die Bedingung (iii) gilt, da

$$\lim_{x\to a} \Phi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = \Phi(a).$$

■

Beweis von Satz 8.2. Im Beweis wechseln wir die Notation: sei $f : A \to B$ differenzierbar in $a \in A$ und $g : B \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $b = f(a)$.



Setzen wir $h = g \circ f$ und beweisen, dass

$$h'(a) = g'(b) f'(a).$$

Sei Φ die Verhältnisfunktion von f in a und Ψ – die Verhältnisfunktion von g in b, so dass

$$f(x) - f(a) = \Phi(x)(x-a) \quad \forall\, x \in A,$$

$$g(y) - g(b) = \Psi(y)(y-b) \quad \forall y \in B, \tag{8.8}$$

Einsetzen in (8.8) $y = f(x)$ und $b = f(a)$ ergibt

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a)) &= \Psi(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= \Psi(f(x))\,\Phi(x)(x-a), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{h(x) - h(a)}{x-a} = \Psi(f(x))\,\Phi(x)$$

und

$$h'(a) = \lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \Psi(f(x))\,\Phi(x).$$

Da $f(x)$ stetig in a ist und $\Psi(y)$ stetig in $b = f(a)$, so ist die Verkettung $\Psi(f(x))$ stetig in a. Da $\Phi(x)$ auch stetig in a ist, so gilt

$$h'(a) = \Psi(f(a))\,\Phi(a) = \Psi(b)\,\Phi(a) = g'(b)\,f'(a)\,,$$

was zu beweisen war. ∎

Bemerkung. Die Kettenregel lässt sich für Komposition von mehreren Funktionen verallgemeinern wie folgt. Sei

$$F = h \circ g \circ f,$$

wobei f in einem x differenzierbar ist, g – in $y = f(x)$ und h – in $z = g(y)$. Dann ist F in x differenzierbar und es gilt

$$\boxed{F'(x) = h'(z)\,g'(y)\,f'(x)} = h'(g(f(x)))\,g'(f(x))\,f'(x)\,, \tag{8.9}$$

da $F = h \circ (g \circ f)$, $z = (g \circ f)(x)$ und somit nach dem Satz 8.2

$$F'(x) = h'(z)\,(g \circ f)'(x) = h'(z)\,g'(y)\,f'(x)\,.$$

Die ähnliche Regel gilt für Verkettung von mehreren Funktionen.

Ableitung der inversen Funktion

Satz 8.4 (Ableitung der inversen Funktion) *Sei f eine stetige streng monotone Funktion auf einem Intervall J, so dass die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$ wohldefiniert ist* (Satz 6.9 aus *A1*). *Nehmen wir an, dass f in einem $x \in J$ differenzierbar ist und dass $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}. \tag{8.10}$$

Beweis von dem Satz 8.4. Wechsel der Notation: sei f differenzierbar in $a \in J$ und $f'(a) \neq 0$. Beweisen wir, dass f^{-1} differenzierbar in $b = f(a)$ ist und

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Sei Φ die Verhältnisfunktion von f in a, so dass

$$f(x) - f(a) = \Phi(x)(x-a) \qquad \forall x \in J \tag{8.11}$$

Setzen wir in (8.11) $y = f(x)$, $b = f(a)$ ein und erhalten, dass

$$y - b = \Phi\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(b)\right) \quad \forall y \in I$$

und somit

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{1}{\Phi\left(f^{-1}(y)\right)},$$

Da die Funktion f^{-1} stetig auf J ist und Φ stetig in $a = f^{-1}(b)$ ist, so erhalten wir, dass

$$\lim_{y \to b} \Phi\left(f^{-1}(y)\right) = \Phi\left(f^{-1}(b)\right) = \Phi(a) = f'(a)\,.$$

Da $f'(a) \neq 0$ so erhalten wir

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\Phi\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f'(a)},$$

was zu beweisen war. ∎

8.2 Sätze von Fermat, Rolle und Lagrange

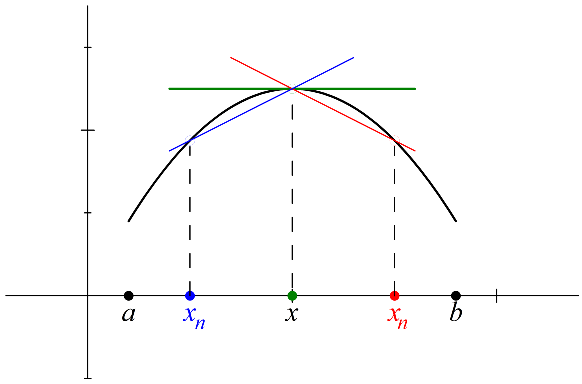
Hauptsatz 8.5 (Satz von Fermat) *Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall (a, b) und sei $x \in (a, b)$ eine Maximumstelle (bzw Minimumstelle) von f. Ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.*

Die geometrische Bedeutung dieser Aussage ist wie folgt: die Steigung der Tangente an der Maximumstelle (Minimumstelle) von f ist 0, d.h. die Tangente an dieser Stelle waagerecht ist.

Beweis. Für jede Folge $\{x_n\}$ aus $(a, b) \setminus \{x\}$ mit $x_n \to x$ haben wir

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}.$$

Da x eine Maximumstelle ist, so gilt $f(x_n) \le f(x)$ für alle n.



Die linke Sekante (blau) hat eine positive Steigung, die rechte Sekante (rot) hat eine negative Steigung, und die Tangente (grün) an der Maximumstelle ist waagerecht.

Für jede Folge $\{x_n\}$ aus (a, x) gilt $x_n - x < 0$ und somit

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \ge 0,$$

und für jede Folge $\{x_n\}$ aus (x, b) gilt $x_n - x > 0$ und

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \le 0,$$

woraus folgt $f'(x) = 0$. Der Fall von Minimumstelle wird analog behandelt. ∎

Korollar 8.6 *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Ist x eine Maximum- oder Minimumstelle von f auf $[a, b]$, so gilt eine von drei Bedingungen:*

1. *entweder $x \in (a, b)$ und $f'(x) = 0$,*
2. *oder $x = a$,*
3. *oder $x = b$.*

Bemerken wir, dass die Maximum- und Minimumstellen von f auf $[a, b]$ existieren nach dem Extremwertsatz (Satz 6.13 von $A1$).

Beweis. Gilt $x \in (a, b)$ so gilt $f'(x) = 0$ nach dem Satz 8.5. Sonst $x = a$ oder $x = b$. ∎

Definition. Definieren wir die *kritische* Menge von f wie folgt:

$$\boxed{K_f = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}}.$$

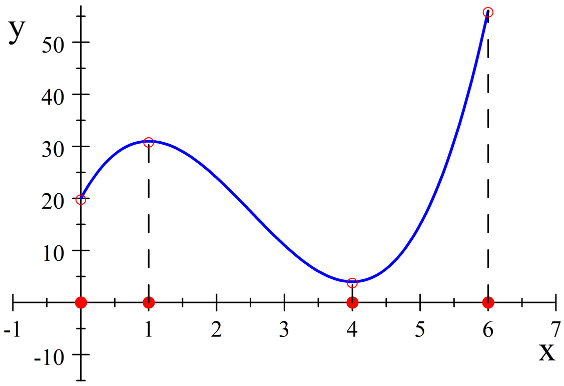
Nach dem Korollar 8.6 liegen die Maximum- und Minimumstellen von f in der Menge K_f. Es folgt, dass

$$\max_{[a,b]} f = \max_{K_f} f \quad \text{und} \quad \min_{[a,b]} f = \min_{K_f} f.$$

Beispiel. Bestimmen wir das Maximum und Minimum der folgenden Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$$

auf dem Intervall $[0, 6]$.



Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$ und die kritischen Stellen von f

Die Ableitung ist

$$f'(x) = \left(2x^3 - 15x^2 + 24x + 20\right)' = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4),$$

und sie hat zwei Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. Somit erhalten wir die kritische Menge

$$K_f = \{0, 1, 4, 6\}.$$

Die Werte von f an den kritischen Stellen sind

$$f(0) = 20, \quad f(1) = 31, \quad f(4) = 4, \quad f(6) = 56.$$

Deshalb $\max_{[0,6]} f = 56$ wird an der Stelle $x = 6$ angenommen, und $\min_{[0,6]} f = 4$ wird an $x = 4$ angenommen.

Satz 8.7 (Satz von Rolle) *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$ so existiert eine Stelle $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Nach dem Extremwertsatz existieren $\max_{[a,b]} f$ und $\min_{[a,b]} f$. Sei c_1 eine Maximumstelle von f und c_2 – eine Minimumstelle von f. Liegt eines von c_1, c_2 im (a,b), zum Beispiel $c_1 \in (a,b)$, so gilt $f'(c_1) = 0$ nach dem Satz 8.5, und wir setzen $c = c_1$. Seien jetzt c_1 und c_2 die Grenzen von $[a,b]$. Da $f(a) = f(b)$, so folgt es dass $f(c_1) = f(c_2)$ und somit

$$\max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f.$$

Folglich ist f eine Konstantefunktion auf $[a,b]$, und dann gilt es $f'(c) = 0$ für jedes $c \in (a,b)$. ∎

Hauptsatz 8.8 (Mittelwertsatz von Lagrange) *Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a,b]$ mit $a < b$, die auf (a,b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit*

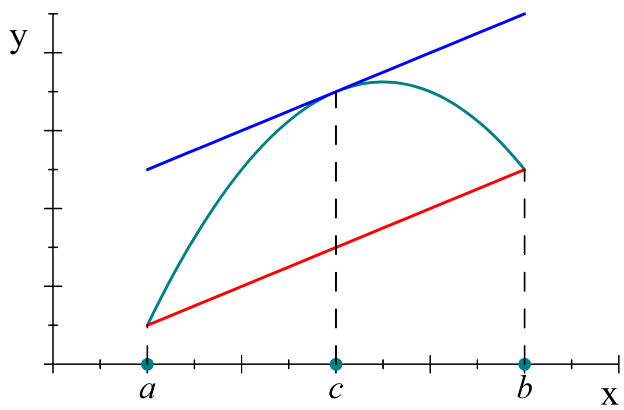
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{8.12}$$

Bemerkung. Im Fall $f(a) = f(b)$ ergibt (8.12) dass $f'(c) = 0$, was den Satz 8.7 impliziert.

Bemerkung. Die Identität (8.12) ist äquivalent zu

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Die Zahl $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Somit besagt Satz 8.8 folgendes: die Steigung dieser Sekante ist gleich die Steigung der Tangente an einer Mittelstelle $c \in (a,b)$, d.h. es gibt eine Tangente parallel zur Sekante.



Die Tangente an $(c, f(c))$ (blau) und die Sekante durch $(a, f(a)), (b, f(b))$ (rot) haben die gleichen Steigungen

Beweis. Setzen wir

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

und betrachten die Funktion

$$h(x) := f(x) - \alpha(x-a).$$

Die Funktion h ist offensichtlich stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), und es gilt

$$h(a) = f(a) - \alpha(a-a) = f(a)$$

und

$$h(b) = f(b) - \alpha(b-a) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a),$$

d.h. $h(a) = h(b)$. Nach dem Satz 8.7 gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $h'(c) = 0$. Da

$$h'(x) = f'(x) - \alpha,$$

es folgt daraus, dass $f'(c) - \alpha = 0$ und somit

$$f'(c) = \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Die Identität (8.12) gilt auch im Fall wenn $a > b$, d.h. wenn f auf dem Intervall $[b,a]$ stetig ist und auf (b,a) differenzierbar ist. In der Tat gilt in diesem Fall nach dem Satz 8.8 die Identität

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$$

für ein $c \in (b,a)$ woraus (8.12) folgt.

8.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f'

Konstantentest

Satz 8.9 (Konstantentest) *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt $f = \mathrm{const}$ auf J genau dann wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$.*

Beweis. Gilt $f = \mathrm{const}$, so gilt auch $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$. Für die Rückrichtung beweisen wir, dass $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in J$. Sei $a < b$. Nach dem Satz 8.8 erhalten wir, für ein $c \in (a,b)$,

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b).$$

Da $f'(c) = 0$, so erhalten wir $f(a) = f(b)$. ■

Der Konstantentest wird häufig in der folgenden Situation benutzt. Gilt

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in J,$$

so folgt es, dass

$$f(x) = g(x) + \mathrm{const} \ \ \forall x \in J,$$

da für die Funktion $f - g$ gilt $(f-g)' = 0$ und somit $f - g = \mathrm{const}$ auf J.

Beispiel. Bestimmen wir alle Funktionen f mit $f'(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bemerken wir zunächst, dass die Funktion $g(x) = \frac{x^2}{2}$ die Gleichung $g' = x$ erfüllt. Es folgt, dass für beliebige Funktion f mit $f' = x$ gilt

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Somit lässt sich die Funktion $f(x)$ durch ihre Ableitung wiederherstellen.

11.04.2025 **Vorlesung 2**

Monotonietest

Satz 8.10 (Monotonietest) *Sei J ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ mit den Grenzen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Sei f eine stetige Funktion auf J, die auf (a, b) differenzierbar ist.*

(*a*) *Funktion f ist monoton steigend auf J genau dann wenn $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$.*
Funktion f ist monoton fallend auf J genau dann wenn $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

(*b*) *Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton steigend auf J.*
Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton fallend auf J.

Beweis. (a) Sei f monoton steigend auf J. Beweisen wir, dass $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Für verschiedene $x, y \in (a, b)$ gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0,$$

da $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ und $y < x \Rightarrow f(y) \leq f(z)$. Somit erhalten wir für alle $x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Umgekehrt, sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Beweisen wir, dass f monoton steigend ist, d.h. für alle $x, y \in J$ mit $y > x$ gilt $f(y) \geq f(x)$. Die Funktion f ist stetig im Intervall $[x, y] \subset J$ und differenzierbar im $(x, y) \subset (a, b)$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 8.8) gibt es ein $c \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x). \tag{8.13}$$

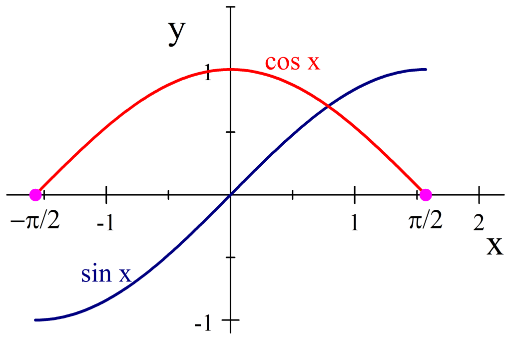
Da $f'(c) \geq 0$, so folgt es, dass $f(y) \geq f(x)$, d.h. f monoton steigend ist.

(b) Gilt $f' > 0$ auf (a, b), so haben wir in (8.13) $f'(c) > 0$ und somit $f(y) > f(x)$, d.h. f streng monoton steigend ist.

Die Aussagen mit $f' \leq 0$ und $f' < 0$ lassen sich analog beweisen. ∎

Bemerkung. In der Aussage (b) gilt die Umkehrung nicht: die Bedingung, dass f streng monoton steigend ist, impliziert die *echte* Ungleichung $f'(x) > 0$ *nicht*. Zum Beispiel, die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$, aber $f'(0) = 0$ (da $f'(x) = 3x^2$).

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ auf dem Intervall $J = [-\pi/2, \pi/2]$. Es gilt $f'(x) = \cos x > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, woraus folgt, dass $\sin x$ streng monoton steigend auf $[-\pi/2, \pi/2]$ ist, was wir schon aus $A1$ wissen.

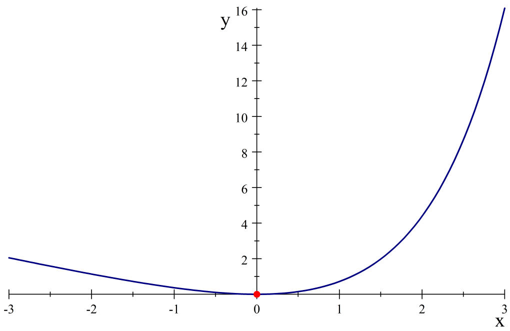


Die Graphen von $\cos x$ (blau) und $\sin x$ (rot) auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Beispiel. Untersuchen wir die Monotonieintervallen der Funktion $f(x) = e^x - 1 - x$ im Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$. Wir haben

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Da $f'(x) > 0$ für $x \in (0, \infty)$, so beschließen, dass $f(x)$ streng monoton steigend auf $[0, \infty)$ ist. Da $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, 0)$, so ist $f(x)$ streng monotone fallend auf $(-\infty, 0]$.



Die Funktion $f(x) = e^x - 1 - x$

Folglich hat die Funktion $f(x)$ eine Minimumstelle an $x = 0$. Da $f(0) = 0$, so gilt die Ungleichung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Bestimmen wir die Minimumstelle der Funktion $f(x) = x^x$ im Definitionsbereich $(0, +\infty)$. Die logarithmische Ableitung dieser Funktion ist

$$(\ln x^x)' = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + 1.$$

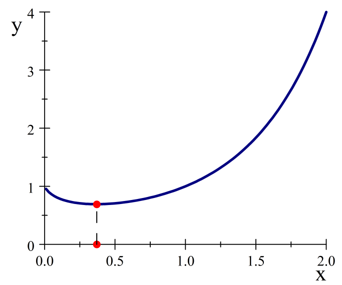
Da $f'(x) = (\ln f(x))' f(x)$, so erhalten wir

$$(x^x)' = (\ln x + 1) x^x.$$

Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet when $\ln x + 1 = 0$, d.h. when $\ln x = -1$ und somit $x = \frac{1}{e}$. Wir haben

$$f'(x) = (\ln x + 1) x^x \ > 0 \text{ für } x > \frac{1}{e},$$
$$f'(x) = (\ln x + 1) x^x < 0 \ \text{ für } x < \frac{1}{e}.$$

Es folgt dass für $x > \frac{1}{e}$ die Funktion $f(x)$ streng monoton steigend ist, and für $x < \frac{1}{e}$ – streng monoton fallend.



Funktion $f(x) = x^x$

Folglich ist $x = \frac{1}{e} \approx 0.37$ die Minimumstelle von $f(x)$. Der minimale Wert von $f(x)$ ist

$$\min_{(0,+\infty)} f = f(\frac{1}{e}) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \approx 0.69.$$

Anwendung zur inversen Funktion

Satz 8.11 (Satz von der inversen Funktion) *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Nehmen wir an, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in J$ (bzw $f'(x) < 0$ für alle $x \in J$). Dann existiert die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$, f^{-1} ist differenzierbar auf I und es gilt für alle $y \in I$*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{8.14}$$

wobei $x = f^{-1}(y)$.

Beweis. Die Funktion f ist stetig auf J. Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in J$ so ist f streng monoton steigend nach dem Satz 8.10.

Nach dem Satz 6.9 von $A1$ existiert die inverse Funktion f^{-1} auf $I = f(J)$.

Da $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} nach dem Satz 8.4 differenzierbar an der Stelle $y = f(x)$ und die Ableitung von f^{-1} erfüllt (8.14).

Der Fall $f'(x) < 0$ ist analog. ∎

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = e^x$ auf $J = (-\infty, +\infty)$ gilt $f'(x) = e^x > 0$. Somit existiert die inverse Funktion im Definitionsbereich $I = f(J) = (0, +\infty)$, die mit ln bezeichnet wird, und es gilt

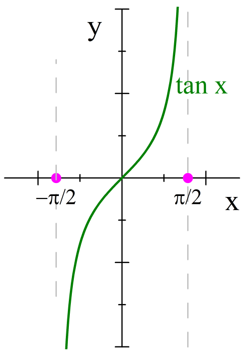
$$(\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

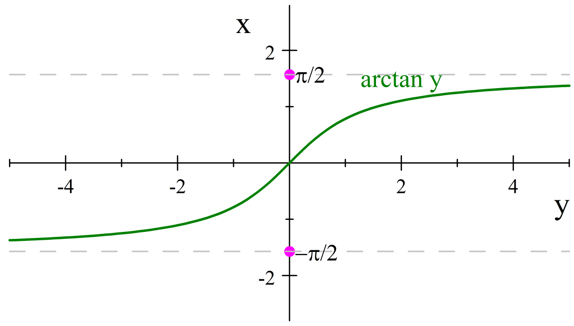
Beispiel. Für die Funktion $f(x) = \tan x$ auf $J = (-\pi/2, \pi/2)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0.$$

Somit existiert die inverse Funktion im Definitionsbereich $I = f\,(J) = (-\infty, +\infty)$, die mit arctan bezeichnet wird, und es gilt

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$





8.4 Vergleichstest und Ungleichungen

Der Monotonietest (Satz 8.10) kann benutzt werden um Ungleichungen zu beweisen.

Satz 8.12 (Vergleichstest)

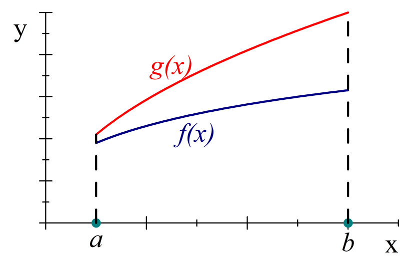
(a) *Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b)$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Nehmen wir an, dass*

(i) $f\,(a) \leq g\,(a)$

(ii) $f'\,(x) \leq g'\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Dann gilt $f\,(x) \leq g\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Gilt $f'\,(x) < g'\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$, *so gilt auch* $f\,(x) < g\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.



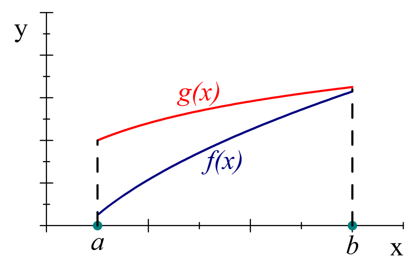
(b) *Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $(a, b]$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Angenommen seien die Bedingungen:*

(i) $f\,(b) \leq g\,(b)$

(ii) $f'\,(x) \geq g'\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Dann gilt $f\,(x) \leq g\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.

Gilt $f'\,(x) > g'\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$, *so gilt auch* $f\,(x) < g\,(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$.



Beweis. (a) Betrachten wir die Funktion

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

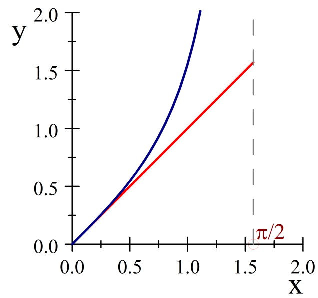
Für alle $x \in (a, b)$ gilt
$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$$
so dass die Funktion h nach dem Satz 8.10 monoton steigend auf $[a, b)$ ist. Da
$$h(a) = g(a) - f(a) \geq 0,$$
so gilt es für alle $x \in (a, b)$
$$h(x) \geq h(a) \geq 0$$
und somit $f(x) \leq g(x)$.

Gilt die echte Ungleichung $f'(x) < g'(x)$ so erhalten wir, dass $h'(x) > 0$ und somit h streng monoton steigend ist, woraus folgt $h(x) > 0$ und somit $f(x) < g(x)$.

(b) In diesem Fall gilt $h'(x) = g'(x) - f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist h monoton fallend auf $[a, b)$. Da $h(b) \geq 0$ so folgt es dass für alle $x \in (a, b)$
$$h(x) \geq h(b) \geq 0,$$
woraus folgt $f(x) \leq g(x)$.

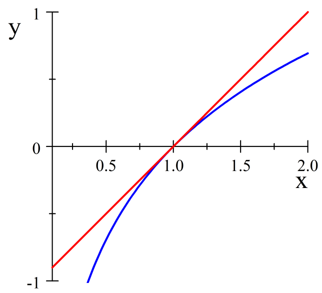
Gilt die echte Ungleichung $f'(x) > g'(x)$, so gilt auch $h'(x) < 0$ so dass h streng monoton fallend ist, woraus folgt $h(x) > 0$ und somit $f(x) < g(x)$. ■

Beispiel. Beweisen wir für alle $x \in [0, \pi/2)$ die Ungleichung $\tan x \geq x$. Da $x = \tan x$ für $x = 0$, so reicht es zu zeigen, dass $(\tan x)' \geq x'$ was der Fall ist da $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \geq 1$.



Die Graphen von Funktionen $\tan x$ (blau) und x (rot)

Beispiel. Beweisen wir die Ungleichung
$$\ln x \leq x - 1 \quad \text{für alle } x > 0. \tag{8.15}$$
Die Graphen dieser beiden Funktionen werden auf dem folgenden Bild gezeigt:



Die Funktionen $\ln x$ (blau) und $x - 1$ (rot)

Für $x = 1$ sind die beiden Seiten von (8.15) gleich 0. Für $x \in (1, +\infty)$ haben wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} < 1 = (x-1)' .$$

Wir verwenden den Vergleichstest des Satzes 8.12(a) auf dem Interval $[1, +\infty)$ und beschließen, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x > 1$.

Für $x \in (0, 1)$ haben wir

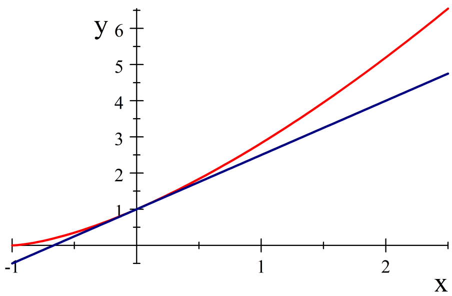
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 1 = (x-1)' .$$

Nach dem Vergleichstest des Satzes 8.12(b) auf dem Interval $(0, 1]$ erhalten wir $\ln x < x-1$ für alle $x \in (0, 1)$. Somit gilt (8.15) für alle $x > 0$.

Beispiel. Beweisen wir, dass für alle $a > 1$ und $x > -1$ gilt

$$(1+x)^a \geq 1 + ax. \tag{8.16}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Bernoulli-Ungleichung, die für $a \in \mathbb{N}$ in $A1$ per Induktion nach a bewiesen wurde.



Die Graphen von Funktionen $(1+x)^{3/2}$ (rot) und $1 + \frac{3}{2}x$ (blue)

Für $x = 0$ sind die beiden Seiten von (8.16) gleich 1. Für $x \in (0, +\infty)$ gilt

$$((1+x)^a)' = a\,(1+x)^{a-1} > a = (1+ax)' ,$$

da $(1+x)^{a-1} > 1$, und für $x \in (-1, 0)$ gilt

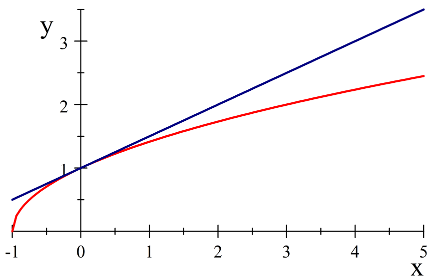
$$((1+x)^a)' = a\,(1+x)^{a-1} < a = (1+ax)' ,$$

da in diesem Fall $(1+x)^{a-1} < 1$. Nach dem Satz 8.12 beschließen wir, dass (8.16) für alle $x > -1$ gilt.

Analog beweist man, dass für alle $0 < a < 1$ und $x > -1$ die umgekehrte Ungleichung gilt:

$$(1+x)^a \leq 1 + ax$$

(Aufgabe 19).



Die Graphen von Funktionen $\sqrt{1+x}$ (rot) und $1+\frac{1}{2}x$ (blue)

8.5 Unbestimmte Ausdrücke und Regel von L'Hôspital

Nach der Rechenregel für lim gilt die Identität

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

vorausgesetzt, dass die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite existieren und ihrer Quotient bestimmt ist. Allerdings ist das nicht der Fall, wenn die beiden Grenzwerte gleich 0 oder gleich $\pm\infty$ sind. Man spricht in diesem Fall von der *unbestimmten Ausdrücken* $\frac{0}{0}$ bzw $\frac{\infty}{\infty}$. Häufig lassen sich diese Ausdrücke mit Hilfe von Ableitungen lösen wie der folgende Satz besagt.

Hauptsatz 8.13 (Regel von L'Hôspital) *Seien f und g differenzierbare Funktionen auf einem Intervall $J\subset\mathbb{R}$. Angenommen sei, dass für ein $a\in\overline{J}$*

(a) entweder

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0, \tag{8.17}$$

(b) oder

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty. \tag{8.18}$$

Nehmen wir an, dass $g\neq 0$ und $g'\neq 0$ auf $J\setminus\{a\}$ und dass

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b \tag{8.19}$$

für ein $b\in\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=b. \tag{8.20}$$

Diese Regel lässt sich kurz wie folgt formulieren:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{8.21}$$

vorausgesetzt, dass die linke Seite ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist und die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

Das ist unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$. Nach dem Satz 8.13 mit $J=(-1,1)$ und $a=0$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{\cos x} = 1. \tag{8.22}$$

Um rigorous zu sein, man soll die Gültigkeit der Gleichheiten in (8.22) rückwärts beweisen: da $\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\sin x)'}$ existiert und gleich 1 ist, so gilt nach dem Satz 8.13 auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1.$$

Diese Bemerkung gilt auch für alle Anwendungen von der Regel von L'Hôspital.

2. Die Regel von L'Hôspital gilt nur wenn $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck ist. Betrachten wir, zum Beispiel, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x}$, dass kein unbestimmter Ausdruck ist und offensichtlich gleich 1 ist. Andererseits gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2)'}{(x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

und somit

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x} \neq \lim_{x\to 1} \frac{(x^2)'}{(x)'}.$$

3. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2},$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Versuchen wir die Regel von L'Hôspital mit $J=(0,+\infty)$ und $a=+\infty$ zu benutzen:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x}, \tag{8.23}$$

und erhalten, dass der Grenzwert in der rechten Seite wieder ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Verwenden wir noch einmal die Regel von L'Hôspital und erhalten

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty. \tag{8.24}$$

Somit erhalten wir nach zwei Anwendungen von der Regel von L'Hôspital, dass

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Analog beweist man per Induktion nach n, dass

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \tag{8.25}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das gleiche Ergebnis kann man auch mit Hilfe von der Exponentialreihe erhalten.

4. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to 0} x \ln x$$

wobei die Funktion $f(x) = x \ln x$ im $J = (0, +\infty)$ definiert ist. Da $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0$, so bekommen wir einen unbestimmten Ausdruck der Form $0 \cdot \infty$. Um ihn zu lösen, stellen wir den Grenzwert in der Form von Quotient dar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x},$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Nach der Regel von L'Hôspital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = -\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0. \tag{8.26}$$

5. Bestimmen wir

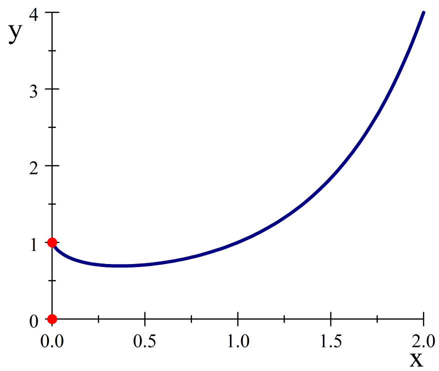
$$\lim_{x\to 0} x^x,$$

wobei die Funktion $f(x) = x^x$ im $J = (0, +\infty)$ definiert ist. Das ist unbestimmter Ausdruck der Form 0^0. Um ihn zu lösen, betrachten wir den Logarithmus der Funktion x^x:

$$\lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \ln x = 0,$$

wo wir (8.26) verwendet haben. Mit Substitution $y = x \ln x$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x \ln x} = \lim_{y\to 0} e^y = 1.$$



Der Graph der Funktion x^x

6. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form 1^∞ ist. Die Funktion $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ist im Intervall $J = (0, +\infty)$ definiert. Der Logarithmus ist

$$\ln f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

was unbestimmter Ausdruck der Form $\infty \cdot 0$ ist. Dann erhalten wir mit Hilfe von Substitution $y = \frac{1}{x}$ und der Regel von L'Hôspital

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{(\ln(1+y))'}{(y)'} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y}}{1} = 1.$$

Es folgt mit Hilfe von Substitution $z = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, dass

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{z\to 1} e^z = e.$$

Zum Vergleich erinnern wir uns daran, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Für den Beweis des Satzes 8.13 brauchen wir die folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes von Lagrange.

Hauptsatz 8.14 (Mittelwertsatz von Cauchy) *Seien f, g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)). \tag{8.27}$$

Der Mittelwertsatz von Lagrange (Satz 8.8) ist ein spezieller Fall des Satzes 8.14 für $g(x) = x$ da in diesem Fall (8.27) wird

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Wenn $g'(c) \neq 0$ und $g(b) \neq g(a)$, so lässt die Identität (8.27) sich wie folgt umschreiben:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Beweis. Setzen wir

$$A = g(b) - g(a), \qquad B = f(b) - f(a)$$

und betrachten die Funktion

$$h(x) = Af(x) - Bg(x).$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= Af(b) - Bg(b) \ - [Af(a) - Bg(a)] \\ &= A(f(b) - f(a)) - B(g(b) - g(a)) \\ &= AB - BA = 0, \end{aligned}$$

so dass $h(a) = h(b)$. Nach dem Satz von Rolle (Satz 8.7) existiert ein $c \in (a, b)$ mit $h'(c) = 0$. Da

$$h'(x) = Af'(x) - Bg'(x),$$

so erhalten wir für $x = c$

$$Af'(c) = Bg'(c),$$

was äquivalent zu (8.27) ist. ∎

16.04.2025 Vorlesung 3

Beweis von Satz 8.13(a). Die Voraussetzungen in diesem Fall sind

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0, \tag{8.28}$$

wobei $a \in \overline{J}$, und

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b, \tag{8.29}$$

wobei $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir müssen beweisen, dass

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{8.30}$$

Zunächst sei $a \in \mathbb{R}$ (der Fall $a = \pm\infty$ wird unterhalb behandelt). Ist $a \in J$ so gilt nach (8.28) und der Stetigkeit von f und g dass

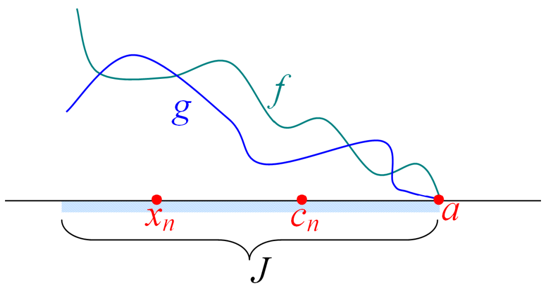
$$f(a) = g(a) = 0. \tag{8.31}$$

Ist $a \notin J$, so erweitern wir den Definitionsbereich von f und g auf $J \cup \{a\}$ und definieren f und g an der Stelle a mit (8.31). Dann sind f und g stetig auf dem Intervall $J \cup \{a\}$.

Um (8.30) zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $J \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = b. \tag{8.32}$$

Sei $x_n < a$. Die Funktionen f und g sind stetig in $[x_n, a] \subset J \cup \{a\}$ und differenzierbar in $(x_n, a) \subset J$.



Nach dem Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 8.14) gibt es ein $c_n \in (x_n, a)$ mit

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \tag{8.33}$$

(nach Voraussetzung gelten $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$).

Im Fall $x_n > a$ erhalten wir analog ein $c_n \in (a, x_n)$ mit (8.33).

Da c_n zwischen x_n und a liegt und $x_n \to a$, so gilt auch $c_n \to a$ für $n \to \infty$, und wir erhalten wir nach der Voraussetzung (8.29) dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = b,$$

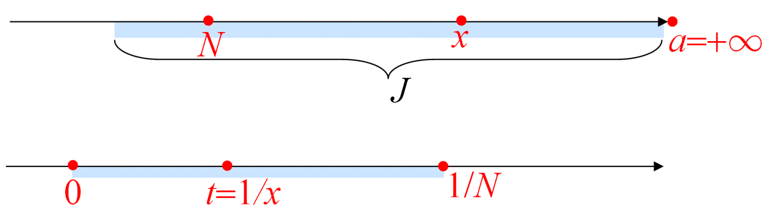
was zusammen mit (8.33) ergibt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=b$$

was zu beweisen war.

Sei jetzt $a=+\infty$ so dass $+\infty$ eine Grenze von J ist. Fixieren wir ein positives $N\in J$ so dass $J\supset(N,+\infty)$. Betrachten wir die neue Variable $t=\frac{1}{x}$ und die Funktionen

$$F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)\quad\text{und}\quad G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)\quad\text{für}\quad t\in(0,1/N)\,.$$



Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)},\tag{8.34}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert in der rechten Seite existiert. Es handelt sich um einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ da

$$\lim_{t\to 0}F(t)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\quad\text{und}\quad\lim_{t\to 0}G(t)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

Um den Grenzwert $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}$ zu bestimmen, verwenden wir den oben bewiesenen Fall der L'Hôspital-Regel. Nach dem Satz 8.2 (Kettenregel) und der Voraussetzung (8.19) gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b.$$

Nach dem oben beweisenen Fall der L'Hôspital-Regel (mit $a=0$) beschließen wir

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=b,$$

so dass nach (8.34)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=b,$$

was zu beweisen war.

Der Fall $a=-\infty$ wird analog bewiesen. ■

Beweis von Satz 8.13(b)**.** Die Voraussetzungen in diesem Fall sind

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\lim_{x\to a}|g(x)|=+\infty\tag{8.35}$$

wobei $a \in \overline{J}$, und

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{8.36}$$

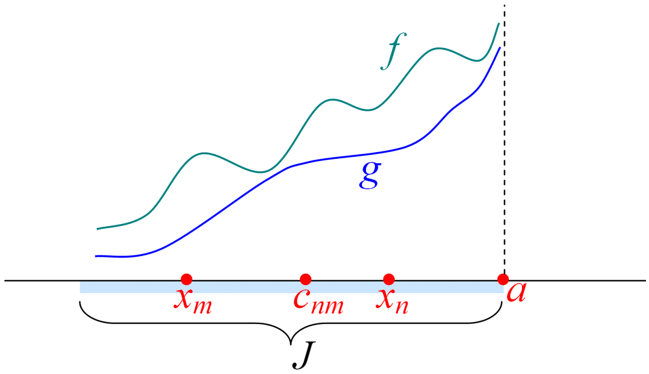
Wir müssen beweisen, dass auch

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{8.37}$$

Nehmen wir an, dass $b \in \mathbb{R}$ und sogar $b > 0$ (die Fälle $b < 0$, $b = 0$ und $b = \pm\infty$ sind ähnlich). Wir müssen beweisen, dass für jede Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $J \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = b.$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit verschiedenen x_n, x_m ist f im Intervall $[x_m, x_n]$ (bzw $[x_n, x_m]$) differenzierbar.



Nach dem Mittelwertsatz von Cauchy existiert ein $c_{nm} \in (x_m, x_n)$ (bzw $c_{nm} \in (x_n, x_m)$) mit

$$\frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} = \frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} - \dfrac{f(x_m)}{g(x_n)}}{1 - \dfrac{g(x_m)}{g(x_n)}}.$$

(Bemerken wir dass nach der Voraussetzung $g'(c_{nm}) \neq 0$. Auch gilt $g(x_n) \neq g(x_m)$, da anderenfalls nach dem Satz von Rolle (Satz 8.7) die Ableitung g' eine Nullstelle im $J \setminus \{a\}$ hat, was nicht der Fall ist). Wir lösen diese Gleichung bezüglich $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}$ und erhalten

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} \left(1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}\right) + \frac{f(x_m)}{g(x_n)}. \tag{8.38}$$

Fixieren wir ein $0 < \varepsilon < b$. Nach der Voraussetzung (8.36) gibt es eine Umgebung U von a mit

$$b - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < b + \varepsilon \quad \text{für alle } x \in J \cap U.$$

Da $x_n \to a$, so liegen die Punkte x_n, x_m in $U \cap J$ für alle $n, m \geq N$ für ein N, woraus folgt, dass auch $c_{nm} \in U \cap J$ und somit

$$b - \varepsilon < \frac{f'(c_{nm})}{g'(c_{nm})} < b + \varepsilon. \tag{8.39}$$

Fixierten wir ein $m \geq N$ und lassen $n \to \infty$ in (8.38). Da $x_n \to a$ und nach (8.35) $|g(x_n)| \to +\infty$, so erhalten wir

$$\frac{g(x_m)}{g(x_n)} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x_m)}{g(x_n)} \to 0,$$

insbesondere gelten für alle $n \geq N'$ (für ein ausreichend großes N') die Ungleichungen

$$-\varepsilon < \frac{g(x_m)}{g(x_n)} < \varepsilon \ \text{ und } \ -\varepsilon < \frac{f(x_m)}{g(x_n)} < \varepsilon.$$

Es folgt aus (8.38) und (8.39) dass für $n \geq N'$ gilt

$$(b-\varepsilon)(1-\varepsilon) - \varepsilon < \frac{f(x_n)}{g(x_n)} < (b+\varepsilon)(1+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so folgt es dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = b,$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Im Beweis des Satzes 8.13(b) wurde die Voraussetzung $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ nicht benutzt. Somit gilt dieser Satz auch wenn anstatt (8.35) nur $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ bekannt ist.

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right).$$

Es handelt sich hier um einen unbestimmten Ausdruck $\infty - \infty$. Wir formen diesen Ausdruck wie folgt um:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

und wechseln die Variable $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wir erhalten

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y} - 1}{y},$$

und das ist ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$. Mit Hilfe von l'Hôspital-Regel erhalten wir

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+y}-1\right)'}{y'} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+y}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Die Antwort ist

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \frac{1}{2}.$$

8.6 Landau-Symbol und Differential

Definition. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf einem Interval $J \subset \mathbb{R}$, und sei $a \in \overline{J}$. Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to a \tag{8.40}$$

wenn

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(vorausgesetzt $g(x) \neq 0$ in $J \setminus \{a\}$). Man sagt in diesem Fall: $f(x)$ ist klein o von $g(x)$, oder $f(x)$ ist vernachlässigbar klein gegenüber $g(x)$. Das Symbol o heißt das *Landau-Symbol*.

Zum Beispiel, es gilt

$$x^2 = o(x) \text{ für } x \to 0$$

aber

$$x = o\left(x^2\right) \text{ für } x \to +\infty.$$

Auch gilt $x^2 = o(e^x)$ für $x \to +\infty$.

Behauptung. *Ist f differenzierbar in $a \in J$, so gilt*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \textit{für } x \to a. \tag{8.41}$$

Die Gleichheit (8.41) heißt eine *asymptotische Identität* da sie nicht für alle x gilt sondern nur für $x \to a$.

Beweis. Die Identität (8.41) bedeutet dass

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(x-a) \quad \text{für } x \to a. \tag{8.42}$$

In der Tat haben wir

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \to 0 \text{ für } x \to a,$$

woraus (8.42) folgt. ■

Schreiben wir (8.41) wie folgt um:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + o(y-x) \quad \text{für } y \to x$$

und bezeichnen die Differenz $y-x$ mit dx. Man nennt die Differenz dx auch das *Differential* der Variable x. Man betrachten dx als eine neue Variable (anstatt y) während x fixiert ist. Es folgt, dass

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx + o(dx) \text{ für } dx \to 0. \tag{8.43}$$

Definition. Der Ausdruck $f'(x)\,dx$ in der rechten Seite von (8.43) heißt das *Differential* der Funktion f und wird auch mit $df(x)$ bezeichnet, so dass

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx.} \tag{8.44}$$

D.h. das Differential $df(x)$ der Funktion f ist eine lineare Funktion von dem Differential dx der Variable x, mit dem Koeffizient $f'(x)$.

Es folgt aus (8.44) dass

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Der Ausdruck $\frac{df}{dx}$ wird häufig anstatt f' für Bezeichnung der Ableitung benutzt.

Nach (8.43) haben wir

$$f(x + dx) - f(x) = df(x) + o(dx),$$

so dass das Differential df eine Annäherung der Differenz der Funktion ist, nämlich ein *linearer Hauptteil* der Differenz.

Beispiel. Benutzen wir die oberhalb berechneten Ableitungen und erhalten aus (8.44)

$$\begin{aligned} dx^n &= nx^{n-1}dx \\ de^x &= e^x dx \\ d\sin x &= \cos x \; dx \\ d\cos x &= -\sin x \; dx. \end{aligned}$$

8.7 Zweite Ableitung und Taylorformel

Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, so dass die Ableitung f' auch eine Funktion auf J ist.

Definition. Ist f' in $a \in J$ differenzierbar, so heißt f *2-fach* differenzierbar in a. Die Ableitung $(f')'(a)$ heißt die *zweite Ableitung* von f in a und wird mit $f''(a)$ bezeichnet, d.h.

$$f''(a) = (f')'(a).$$

Ist f 2-fach differenzierbar in jedem $a \in J$, so heißt f 2-fach differenzierbar in J.

Beispiel. Wir haben

$$\begin{aligned} (e^x)'' &= (e^x)' = e^x \\ (\sin x)'' &= (\cos x)' = -\sin x \\ (\cos x)'' &= -(\sin x)' = -\cos x \\ (\ln x)'' &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\ (x^a)'' &= \left(ax^{a-1}\right)' = a(a-1)x^{a-2}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung der Identität (8.41) mit Hilfe von zweiter Ableitung.

Hauptsatz 8.15 (Taylorformel 2er Ordnung mit Peano-Restglied) *Sei f differenzierbar in J und 2-fach differenzierbar in einem $a \in J$. Dann gilt die asymptotische Identität*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) \quad \text{für } x \to a. \tag{8.45}$$

23.04.2025 Vorlesung 4

Vergleichen wir (8.45) mit (8.41):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{für } x \to a, \tag{8.46}$$

die *Taylorformel 1er Ordnung* heißt. Die Formeln (8.45) und (8.46) liefern Näherungen für $f(x)$ in der Nähe von a mittels Funktionen

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

und

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Definition. $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen Taylor-Polynome von f der Ordnung 1 bzw 2 im Punkt a.

Die Approximationsfehler

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) \quad \text{und} \quad R_2(x) = f(x) - T_2(x)$$

heißen die *Resglieder*. Die Identitäten (8.46) und (8.45) bedeuten, dass

$$R_1(x) = o(x-a) \quad \text{und} \quad R_2(x) = o\left((x-a)^2\right) \quad \text{für } x \to a.$$

Diese Darstellungen von R_1 und R_2 heißen *Restgliedform nach Peano.*

Man erwartet, dass $R_2(x)$ viel kleiner als $R_1(x)$ für $x \approx a$ so dass das quadratische Polynom $T_2(x)$ eine bessere Näherung von $f(x)$ liefert als die lineare Funktion $T_1(x)$.

Beweis von dem Satz 8.15. Die asymptotische Identität (8.45) ist äquivalent zu

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Da $T_2(a) = f(a)$, der Nenner und der Zähler für $x \to a$ verschwinden, so dass die linke Seite ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist. Nach der Regel von L'Hôspital erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x-a)^2} &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - T_2(x))'}{\left((x-a)^2\right)'} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)}{2(x-a)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} - f''(a)\right) = 0,
\end{aligned}$$

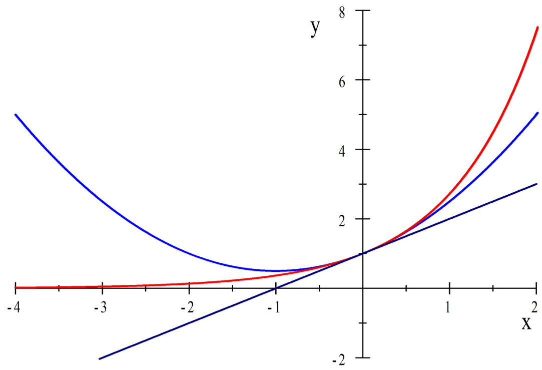
was zu beweisen war. ■

Beispiel. Bemerken wir, dass der Graph von $T_1(x)$ die Tangente zum Graph G von f im Punkt $(a.f(a))$ ist. Der Graph von $T_2(x)$ ist eine Parabel (die *Schmiegparabel*), die eine bessere Approximation von G in der Nähe von a liefert als die Tangente.

Zum Beispiel, für die Funktion $f(x) = e^x$ im Punkt $a = 0$ erhalten wir $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ und somit

$$T_1(x) = 1 + x \quad \text{und} \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Die Funktion e^x, ihre Tangente $T_1(x)$ und ihre Schmiegparabel $T_2(x)$ sind hier gezeichnet:



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) und $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau) im Punkt 0.

Beispiel. Für $f(x) = \ln x$ auf $(0, +\infty)$ erhalten wir $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$ und somit

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) \text{ für } x \to a.$$

Für $a = 1$ und $x = 1,2$ erhalten wir

$$\ln 1,2 \approx \ln 1 + 0,2 - \frac{1}{2} \cdot 0,2^2 = 0,18$$

während $\ln 1,2 = 0,182\,321556\,793955...$

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes 8.8 von Lagrange:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a).$$

Hauptsatz 8.16 (Taylorformel 2er Ordnung mit Lagrange-Restglied) *Sei f 2-fach differenzierbar auf einem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ so dass*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2. \tag{8.47}$$

Beweis von dem Satz 8.16. Betrachten wir die Hilfsfunktionen

$$\boxed{F(x) = f(x) + f'(x)(b-x)}$$

und

$$\boxed{G(x) = (x-b)^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 8.14), es gibt ein $c \in (a,b)$ mit

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}. \tag{8.48}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a), \\ F'(x) &= f'(x) + f'(x)(b-x)' + f''(x)(b-x) \\ &= f''(x)(b-x) \\ G(b) - G(a) &= -(a-b)^2 \\ G'(x) &= 2(x-b), \end{aligned}$$

insbesondere $G(b) - G(a) \neq 0$ und $G'(c) = 2(c-b) \neq 0$ (so dass die Nenner in (8.48) nicht verschwinden). Es folgt aus (8.48)

$$\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{-(a-b)^2} = \frac{f''(c)(b-c)}{2(c-b)} = -\frac{f''(c)}{2}.$$

und somit

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) = \frac{1}{2} f''(c)(a-b)^2,$$

was äquivalent zu (8.47) ist. ■

Bemerkung. Die Identität (8.47) gilt auch im Fall $a > b$ d.h. wenn f auf dem Intervall $[b,a]$ 2-fach differenzierbar ist und c ein Punkt in (b,a) ist. Der Beweis ist gleich da der Mittelwertsatz von Cauchy auch im Fall $a > b$ gilt.

Ersetzen wir b in (8.2) mit beliebigem $x \in [a,b]$ und erhalten

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 = T_1(x) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2, \tag{8.49}$$

für ein c zwischen x und a. Somit bekommen wir eine andere Darstellung des Restgliedes $R_1(x)$ wie folgt:

$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2. \tag{8.50}$$

Diese Darstellung von $R_1(x)$ heißt *die Restgliedform nach Lagrange.*

Später beweisen wir auch eine ähnliche Darstellung von $R_2(x)$ als auch die Taylorformeln höherer Ordnung.

Beispiel. Berechnen wir $\sqrt{1,1}$ mit Hilfe von (8.49). Für $f(x) = \sqrt{x}$ haben wir

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}.$$

Die Formel (8.49) mit $x = 1,1$ und $a = 1$ ergibt

$$\sqrt{1,1} = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 + R_1 = 1,05 + R_1,$$

wobei nach (8.50) für ein $1 < c < 1,1$ gilt

$$R_1 = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{c^{3/2}}0,1^2 = -0.001\,25\frac{1}{c^{3/2}}.$$

Da $\frac{1}{c^{3/2}} \leq 1$, so folgt es, dass $|R_1| \leq 0,00125$ so dass

$$\sqrt{1,1} \approx 1,05$$

mit dem Approximationsfehler $\leq 0,00125$. Eine genaue Berechnung ergibt $\sqrt{1,1} = 1,0488088...$ so dass der tatsächliche Approximationsfehler ist $\approx 0,001\,2$.

8.8 Lokale Extrema

Definition. Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall J und sei $a \in J$. Man sagt, dass a eine *lokale Maximumstelle* von f ist wenn es eine Umgebung $U \subset J$ von a gibt, so dass a eine Maximumstelle von f in U ist.

Analog definiert man lokale Minimumstelle von f. Man sagt, dass a eine *lokale Extremumstelle* von f ist, wenn a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

Satz 8.17 *Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall J.*

(*a*) (Notwendige Bedingung für locales Extremum) *Sei f differenzierbar auf J. Ist $a \in J$ eine lokale Extremumstelle von f, so gilt $f'(a) = 0$.*

(*b*) (Hinreichende Bedingung für locales Extremum) *Sei f 2-fach differenzierbar auf J. Sei $f'(a) = 0$ für ein $a \in J$. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f. Gilt $f''(a) < 0$, so ist a eine lokale Maximumstelle von f.*

Bemerkung. Die Nullstellen der Ableitung f' heißen die *kritischen Punkte* der Funktion f. Nach dem Satz 8.17, die lokalen Extremumstellen sind die kritischen Punkte, aber die Umkehrung gilt nicht immer. Zum Beispiel, die Funktion $f(x) = x^3$ hat einen kritischen Punkt $x = 0$, der offensichtlich keine lokale Extremumstelle ist. An diese Stelle gilt $f''(0) = 0$ so dass Satz 8.17(*b*) nicht anwendbar ist.

Beweis. (*a*) Ist a eine lokale Maximumstelle, dass ist a eine Maximumstelle von f in einer Umgebung U von a. Nach dem Satz von Fermat (Satz 8.5) gilt $f'(a) = 0$. Gleiches gilt für eine lokale Minimumstelle.

(*b*) Nach dem Satz 8.15 haben wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + R_2(x), \tag{8.51}$$

wobei $R_2(x) = o\left((x-a)^2\right)$ für $x \to a$, d.h.

$$\lim_{x \to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

Dann gibt für jedes $\varepsilon > 0$ es eine Umgebung $U \subset J$ von a mit

$$\left|\frac{R_2(x)}{(x-a)^2}\right| < \varepsilon \text{ für alle } x \in U \setminus \{a\},$$

woraus folgt

$$-\varepsilon (x-a)^2 \le R_2(x) \le \varepsilon (x-a)^2 \text{ für alle } x \in U. \tag{8.52}$$

Sei $f''(a) > 0$. Da $f'(a) = 0$, so erhalten wir aus (8.51) und (8.52), dass für alle $x \in U$,

$$\begin{aligned} f(x) &\ge f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \varepsilon (x-a)^2 \\ &= f(a) + \left(\frac{f''(a)}{2} - \varepsilon\right)(x-a)^2. \end{aligned}$$

Wählen wir ein $\varepsilon < \frac{1}{2} f''(a)$ und erhalten, dass

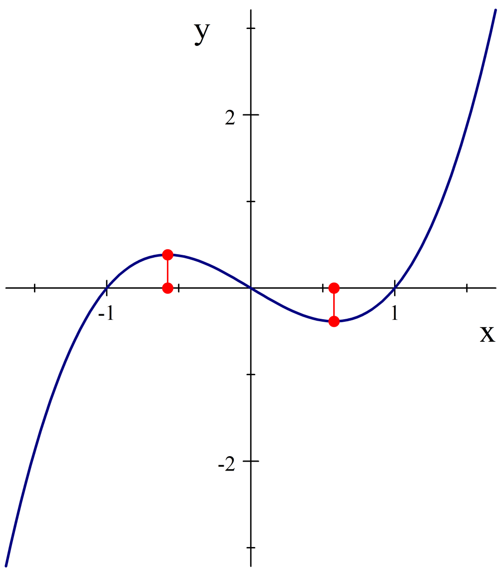
$$f(x) \ge f(a) \quad \text{für alle } x \in U,$$

so dass a eine Minimumstelle von f in U ist und somit eine lokale Minimumstelle. In der Tat gilt es

$$f(x) > f(a) \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{a\}.$$

Der Fall $f''(a) < 0$ wird analog behandelt. ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^3 - x$. Dann hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 1$ die Nullstellen $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da $f''(x) = 6x$, so erhalten wir $f''(a_1) > 0$ und $f''(a_2) < 0$. Deshalb ist a_1 eine lokale Minimumstelle und a_2 – eine lokale Maximumstelle.



Die Funktion $f(x) = x^3 - x$ hat zwei lokale Extremumstellen a_1 und a_2

25.04.2025 **Vorlesung 5**

8.9 Konvexe und konkave Funktionen

Definition. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall J heißt *konvex* wenn für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f\left((1-t)\,a + tb\right) \leq (1-t)\,f(a) + tf(b)\,. \tag{8.53}$$

Die Funktion f heißt *konkav* auf J wenn für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f\left((1-t)\,a + tb\right) \geq (1-t)\,f(a) + tf(b)\,. \tag{8.54}$$

Z.B. die Ungleichung (8.53) für $t = \frac{1}{2}$ bedeutet

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Diese Definition hat die folgende geometrische Bedeutung. Bezeichnen wir

$$x = (1-t)\,a + tb = a + t(b-a) \tag{8.55}$$

und beachten, dass

$$t \in (0,1) \Leftrightarrow x \in (a,b)\,.$$

Es folgt aus (8.55)

$$t = \frac{x-a}{b-a},$$

und (8.53) ist äquivalent zu

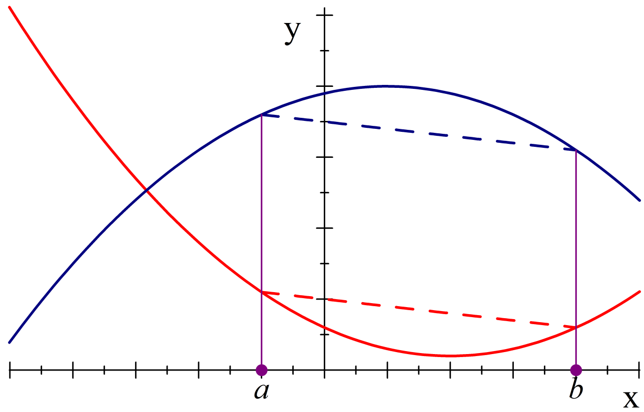
$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,,$$

für alle $x \in (a,b)$. Betrachten wir die lineare Funktion

$$S(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

deren Graph die Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist. Der Graph von $S(x)$ für $x \in (a,b)$ heißt die *Sekante* von dem Graph G von f auf dem Intervall (a,b).

Funktion f ist somit konvex auf J genau dann, wenn die Sekante auf jedem Intervall $(a,b) \subset J$ über dem Graph G von f liegt. Analog ist die Funktion f konkav genau dann, wenn die Sekante auf jedem Intervall $(a,b) \subset J$ unter G liegt.



konvex - rot, konkav - blau

Satz 8.18 (Kriterium von Konvexität/Konkavität) *Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$.*

(a) *Funktion f ist konvex auf J genau dann, wenn $f'' \geq 0$ auf J.*

(b) *Funktion f ist konkav auf J genau dann, wenn $f'' \leq 0$ auf J.*

Mit Hilfe von dem Monotonietest (Satz 8.10) erhalten wir eine Folgerung:

$$f \text{ ist konvex } \Leftrightarrow f' \text{ ist monoton steigend}$$
$$f \text{ ist konkav } \Leftrightarrow f' \text{ ist monoton fallend.}$$

Beweis. (a) Sei $f'' \geq 0$ auf J. Wir beweisen, dass f konvex ist, d.h. für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f(x) \leq (1-t) f(a) + t f(b), \tag{8.56}$$

wobei

$$x = (1-t)a + tb = a + t(b-a).$$

Nach dem Satz 8.16 (Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied) haben wir

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + f''(c_1)\frac{(a-x)^2}{2}$$

und

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + f''(c_2)\frac{(b-x)^2}{2},$$

wobei $c_1, c_2 \in (a,b)$. Da $f''(c_1) \geq 0$ und $f''(c_2) \geq 0$, so folgt es

$$f(a) \geq f(x) + f'(x)(a-x) = f(x) + f'(x)\, t(a-b)$$
$$f(b) \geq f(x) + f'(x)(b-x) = f(x) + f'(x)(1-t)(b-a)$$

Multiplizieren die erste Gleichung mit $(1-t)$, die zweite Gleichung mit t und Addieren ergibt

$$\begin{aligned}(1-t)\,f(a)+tf(b) &\geq (1-t)\,f(x)+tf(x)\\ &\quad+f'(x)\,(1-t)\,t\,(a-b)+f'(x)t\,(1-t)\,(b-a)\\ &=f(x)\,,\end{aligned}$$

was (8.56) beweist.

Sei jetzt f konvex auf J. Wir beweisen, dass $f''(x)\geq 0$ für alle $x\in J$. Nach der Konvexität von f gilt es für jedes $x\in J$

$$f(x)=f\left(\frac{(x+h)+(x-h)}{2}\right)\leq\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}, \tag{8.57}$$

wobei h so klein ist dass $x+h$ und $x-h$ in J liegen. Nach dem Satz 8.15 (Taylor-Formel mit Peano-Restglied) haben wir

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+f''(x)\,\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\quad \text{für } h\to 0$$

und

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)\,h+f''(x)\,\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\quad \text{für } h\to 0.$$

Es folgt, dass

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}=f(x)+f''(x)\,\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right).$$

Vergleichen mit (8.57) ergibt

$$f''(x)\,\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\geq 0,$$

$$\frac{f''(x)}{2}+\frac{o(h^2)}{h^2}\geq 0,$$

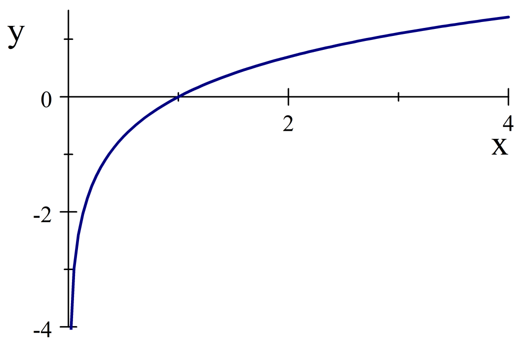
woraus folgt für $h\to 0$ dass $\frac{f''(x)}{2}\geq 0$ da $\frac{o(h^2)}{h^2}\to 0$.

(b) Diese Aussage folgt aus (a) da f konkav genau dann ist, wenn $-f$ konvex, und $f''\leq 0$ äquivalent zu $(-f)''\geq 0$. ∎

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x)=\ln x$ für $x\in(0,+\infty)$. Da

$$(\ln x)''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0,$$

so erhalten wir nach dem Satz 8.18, dass $\ln x$ konkav auf $(0,+\infty)$ ist.



Die Funktion $\ln x$ ist konkav

Nach (8.54) gilt die folgende Ungleichung

$$\ln\left(\left(1-t\right)a+tb\right) \geq \left(1-t\right)\ln a + t\ln b \tag{8.58}$$

für alle $a, b > 0$ und $t \in (0,1)$. Bezeichnen wir

$$p = \frac{1}{1-t} \text{ und } q = \frac{1}{t},$$

so dass $p, q > 1$ und

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{8.59}$$

Die Zahlen $p, q > 1$ mit (8.59) heißen *konjugierte Hölder-Exponenten*. Es folgt aus (8.58), dass

$$\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b = \ln\left(a^{1/p}b^{1/q}\right). \tag{8.60}$$

Setzen wir $x = a^{1/p}$, $y = b^{1/q}$ und erhalten aus (8.60) die *Young-Ungleichung*

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy,$$

die für alle konjugierte Hölder-Exponenten p, q und alle $x, y > 0$ (und auch für $x, y \geq 0$) gilt.

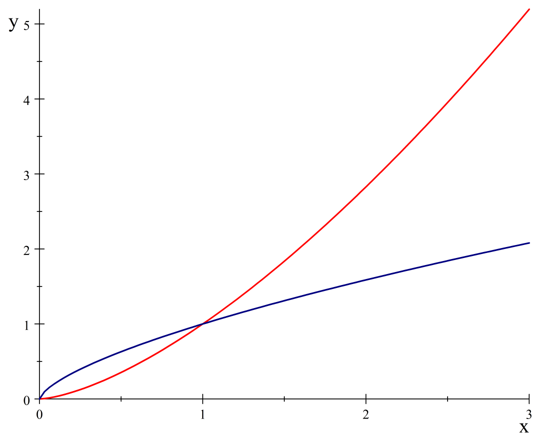
Beispiel. Sei $f(x) = x^p$ auf $J = (0, +\infty)$, wobei $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Da

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2},$$

so erhalten wir folgendes:

- für $0 < p < 1$ gilt $f''(x) < 0$ für alle $x > 0$;
- für $p < 0$ oder $p > 1$ gilt $f''(x) > 0$ für alle $x > 0$.

Somit ist die Funktion $f(x) = x^p$ konkav wenn $0 < p < 1$ und konvex wenn $p < 0$ oder $p > 1$.



Die konvexe Funktion $x^{3/2}$ (rot) und konkave Funktion $x^{2/3}$ (blau)

Es folgt, dass für $p > 1$ und alle $a, b > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}, \tag{8.61}$$

d.h.

$$\frac{a+b}{2} \leq \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Das ist die Ungleichung vom arithmetischen Mittel und *Hölder-Mittel zur Stufe p*.

Für $p < 1$ gilt die umgekehrte Ungleichung

$$\frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}. \tag{8.62}$$

In der Tat, im Fall $0 < p < 1$ folgt (8.62) aus der Konkavität von x^p. Im Fall $p < 0$ gilt (8.61) nach der Konvexität von x^p, woraus (8.62) folgt, da $p < 0$.

Es ist interessant zu bemerken dass nach Aufgabe 24

$$\lim_{p \to 0} \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p} = \sqrt{ab}$$

so dass das geometrische Mittel sich betrachten lässt als das Hölder-Mittel zur Stufe 0. Die weitere Entwicklung von diesem Thema befindet sich in Aufgabe 37.

8.10 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f' und f''

Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall J mit den Grenzen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Nehmen wir an, dass f auf (a, b) 2-fach differenzierbar ist und dass f'' auf (a, b) stetig ist. Dann f' ist auch stetig auf (a, b).

Man untersucht die Funktion f mit Hilfe von f' und f'' ist wie folgt. In kurz bestimmt man alle Intervalle wo f' bzw f'' positive oder negative ist. In den Intervallen wo $f' > 0$ (bzw $f' < 0$) ist f monoton steigend (bzw fallend). In den Intervallen, wo $f'' > 0$ (bzw $f'' < 0$) ist f konvex (bzw konkav). Mit Hilfe von diesen Informationen kann man den Graph von f ziemlich gut skizzieren. Man macht es in den folgenden Schritten.

Schritt 1. **(Kritische Menge von f)** Man bestimmt die Ableitung f' und die kritische Menge der Funktion f:

$$K_f = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\} \cup \{a, b\}.$$

Angenommen, dass die Menge K_f endlich ist, seien $x_0, x_1, ..., x_n$ alle Punkte von K_f in steigender Reihenfolge (d.h. $x_k < x_{k+1}$ $\forall k = 0, ..., n-1$), insbesondere $x_0 = a$ und $x_n = b$.

Schritt 2. **(Die Werte von $f(x_k)$)** Man bestimmt alle Werte $f(x_k)$ (man darf einen Rechner dafür benutzen). Wenn die Grenze $x_0 = a$ nicht im J liegt, so setzen wir $f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$, wobei der Grenzwert existiert, da f in (a, x_1) monoton ist. Analog bestimmt man $f(b)$.

Schritt 3. **(Intervalle von Monotonie)**. Die Funktion f is streng monoton in jedem Intervall (x_k, x_{k+1}), und man bestimmt die Typ von Monotonie: steigend oder fallend. Man kann dafür das Vorzeichen von f' verwenden:

- gilt $f' > 0$ auf (x_k, x_{k+1}) so ist f streng monoton steigend auf (x_k, x_{k+1});
- gilt $f' < 0$ auf (x_k, x_{k+1}) so ist f streng monoton fallend auf (x_k, x_{k+1}).

Bemerken wir, dass f' in (x_k, x_{k+1}) nicht verschwindet da keine Nullstelle von f' zwischen x_k und x_{k+1} liegt.

Alternativ kann man die Werte von f benutzen: gilt $f(x_k) < f(x_{k+1})$ so ist f in (x_k, x_{k+1}) monoton steigend; gilt $f(x_k) > f(x_{k+1})$ so ist f monoton fallend.

Schritt 4. **(Lokale Extremumstellen)** Man bestimmt für jeden Punkt $x_k \in (a, b)$ ob x_k eine lokale Extremumstelle ist. Man kann dafür das Vorzeichen von f'' verwenden:

- gilt $f''(x_k) > 0$ so ist x_k eine lokale Minimumstelle;
- gilt $f''(x_k) < 0$ ist x_k eine lokale Maximumstelle.

Alternativ kann man die Monotonie von f benutzen: ist f auf (x_{k-1}, x_k) monoton steigend (bzw fallend) und auf (x_k, x_{k+1}) monoton fallen (bzw steigend), so ist x_k eine lokale Maximumstelle (bzw Minimumstelle). Ist f auf den beiden Intervallen (x_{k-1}, x_k) und (x_k, x_{k+1}) monoton steigend oder fallend, so ist x_k keine lokale Extremumstelle. Die zweite Methode funktioniert auch wenn $f''(x_k) = 0$.

Schritt 5. **(Kritische Menge von f')** Man bestimmt die kritische Menge der Funktion f':

$$K_{f'} = \{x \in (a, b) : f''(x) = 0\} \cup \{a, b\}.$$

Angenommen, dass $K_{f'}$ endlich ist, bezeichnen wir mit $y_0, ..., y_m$ alle Punkte von $K_{f'}$ in steigender Reihenfolge; insbesondere $y_0 = a$ und $y_m = b$.

Schritt 6. **(Konvexität/Konkavität und Wendestellen)** Man bestimmt die Konvexität/Konkavität von f in jedem Intervall (y_j, y_{j+1}). Da f'' in jedem Intervall (y_j, y_{j+1}) nicht verschwindet, so gibt es zwei Möglichkeiten:

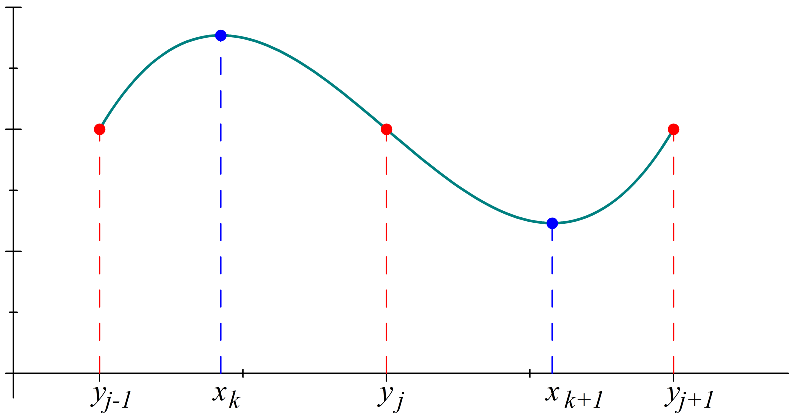
- entweder $f'' > 0$ auf (y_j, y_{j+1}) und somit f konvex auf (y_j, y_{j+1}) ist;
- oder $f'' < 0$ auf (y_j, y_{j+1}) und somit f konkav auf (y_j, y_{j+1}) ist.

Definition. Eine Nullstelle $y \in (a, b)$ von f'' heißt *Wendestelle* von f wenn f'' in den Intervallen $(y - \varepsilon, y)$ und $(y, y + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ unterschiedliche Vorzeichen hat, d.h. in einem Intervall ist f'' positiv und im anderen Intervall ist f'' negativ.

Man bestimmt ob jedes $y_j \in (a, b)$ eine *Wendestelle* ist indem man die Vorzeichen von f'' in den Intervallen (y_{j-1}, y_j) und (y_j, y_{j+1}) vergleicht. Sind die Vorzeichen unterschiedlich so ist y_j eine Wendestelle, d.h. beim Übergang von (y_{j-1}, y_j) nach (y_j, y_{j+1}) ändert sich die Konvexität von f in Konkavität, und umgekehrt.

Man bestimmt auch die Werte von f an allen Stellen y_j.

Schritt 7. **(Skizzieren von Funktionsgraph)** Man skizziert den Graph von f auf jedem Intervall (x_k, x_{k+1}) wo f monoton zwischen den Werten $f(x_k)$ und $f(x_{k+1})$ ist. Auf jedem Intervall (y_j, y_{j+1}) soll der Graph konkav bzw konvex sein. Somit erhält man eine Skizze des Graphes von f auf dem ganzen Intervall J.



Lokale Extremumstellen x_k, x_{k+1} und Wendestelle y_j

Beispiel. Untersuchen wir die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Schritt 1. Wir haben

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt $\ln x = 1$ und somit $x = e$. Deshalb haben wir

$$K_f = \{0, e, +\infty\}.$$

Schritt 2. Weiter haben wir

$$f(0) := \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

$$f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,37,$$

$$f(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Schritt 3. Für $x \in (0, e)$ gilt $f'(x) > 0$ und für $x \in (e, +\infty)$ gilt $f'(x) < 0$. Somit ist die Funktion $f(x)$ streng monoton steigend in $(0, e)$ und streng monoton fallend in $(e, +\infty)$.

Schritt 4. Wir haben

$$f'' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Insbesondere $f''(e) = \frac{2-3}{e^2} < 0$ so dass e eine lokale Maximumstelle ist. In der Tat ist e sogar die Maximumstelle von f auf $(0, +\infty)$, da $f(x)$ streng monoton steigend in $(0, e)$ und streng monoton fallend in $(e, +\infty)$ ist.

Schritt 5. Bestimmen wir die kritische Menge von f'. Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt

$$2\ln x - 3 = 0$$

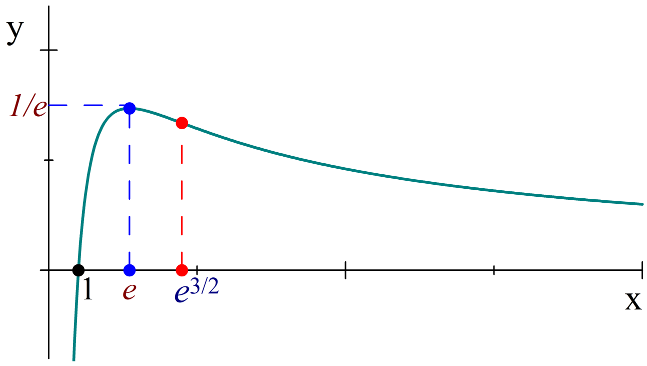
d.h. $x = e^{3/2} \approx 4,48$. Somit

$$K_{f'} = \left(0, e^{3/2}, +\infty\right).$$

Schritt 6. Im Intervall $\left(0, e^{3/2}\right)$ gilt $2\ln x < 3$ und $f''(x) < 0$; somit ist die Funktion f auf $\left(0, e^{3/2}\right)$ konkav. Im Intervall $\left(e^{3/2}, +\infty\right)$ gilt $f''(x) > 0$ und somit ist f konvex. Deshalb ist $e^{3/2}$ eine Wendestelle von f, und

$$f\left(e^{3/2}\right) = \frac{3}{2e^{3/2}} \approx 0,33.$$

Schritt 7. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sieht wie folgt aus:



Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ mit der Maximumstelle (blau) und Wendestelle (rot)

30.04.2025 Vorlesung 6

Bei der Untersuchung der Funktion f mit Hilfe von Ableitungen ist es wichtig Folgendes zu beachten:

1. Die Intervalle von Monotonie liegen zwischen aufeinanderfolgenden kritischen Punkten von f; für jeden kritischen Punkt von f bestimmt man ob er eine Maximum - oder Minimumstelle ist.

2. Die Intervalle von Konvexität/Konkavität liegen zwischen aufeinanderfolgenden kritischen Punkten von f'; für jeden kritischen Punkt von f' bestimmt man ob er eine Wendestelle ist.

Beispiel. Untersuchen wir auf $(-\infty, +\infty)$ die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10.$$

Schritt 1. Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3).$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt zwei Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$, so dass die kritische Menge von f ist

$$K_f = \{-\infty, -2, 3, +\infty\}.$$

Schritt 2. Die Werte von f auf K_f sind

$$f(-\infty) = -\infty, \quad f(-2) = 54, \quad f(3) = -71, \quad f(+\infty) = +\infty.$$

Schritt 3. Das Vergleichen von Werten von f ergibt: f ist auf $(-\infty, -2)$ und $(3, +\infty)$ streng monoton steigend, und auf $(-2, 3)$ streng monoton fallend.

Schritt 4. Die zweite Ableitung ist

$$f'' = 12x - 6.$$

Da $f''(-2) < 0$ so ist -2 eine lokale Maximumstelle. Da $f''(3) > 0$ so ist 3 ist eine lokale Minimumstelle (was aus der Monotonie auch klar ist).

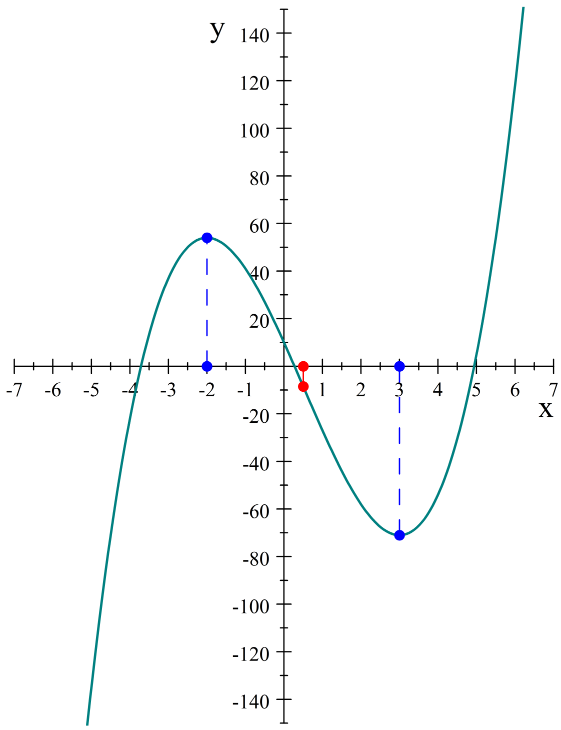
Schritt 5. Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt $x = \frac{1}{2}$, so dass die kritische Menge von f' ist

$$K_{f'} = \{-\infty, \tfrac{1}{2}, +\infty\}.$$

Schritt 6. Auf dem Intervall $(-\infty, \frac{1}{2})$ gilt $f'' < 0$ so dass f konkav ist. Auf dem Intervall $(\frac{1}{2}, +\infty)$ gilt $f'' > 0$ so dass f konvex ist. Der Punkt $x = \frac{1}{2}$ ist somit eine Wendestelle, und

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -8,5.$$

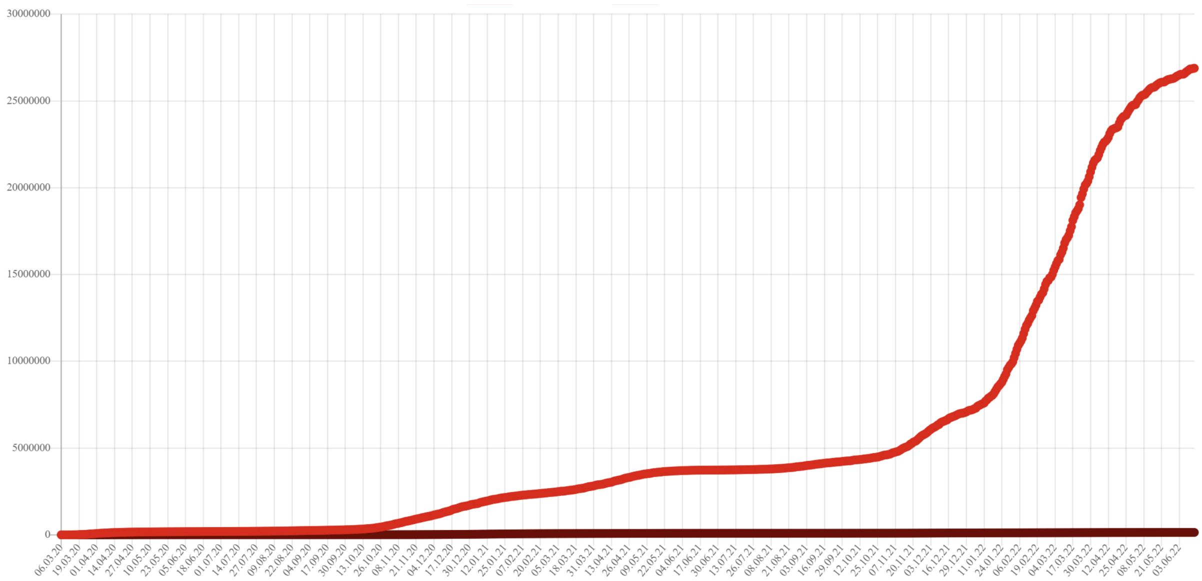
Schritt 7. Somit erhalten wir den folgenden Graph.



Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$, die lokalen Extrema (blau) und Wendestellen (rot)

8.11 * Funktionsgraphen und Statistiken

Graphen von Funktionen werden in vielen Anwendungen eingesetzt, insbesondere zur visuellen Darstellung statistischer Informationen. Betrachten wir ein Beispiel. Das folgende Bild zeigt den Graph einer Funktion $y = f(x)$ die die Anzahl der Einwohner von Deutschland darstellt, die seit Beginn der Epidemie bis zum Tag x positiv auf Coronavirus getestet wurden.



Die Ableitung $f'(x)$ ist die unmittelbare Geschwindigkeit von f, d.h. die Anzahl infizierter Personen pro Tag am Zeitpunkt x. Es ist wichtig zu verstehen ob $f'(x)$ steigend oder fallend ist, da im ersten Fall die Epidemie wächst, während sie im zweiten Fall abnimmt.

Nach dem Satz 8.18, f' ist monotone steigend wenn f konvex ist, und f' ist monoton fallend wenn f konkav ist. Man sieht folgendes: der Graph ist konvex in bestimmten Zeitintervallen wenn die Epidemie stieg, und seit ca. März 2022 ist der Graph konkav, d.h. die Epidemie abnimmt. Die Epidemie ist vorbei when $f'(x) \equiv 0$, d.h. $f(x) = \text{const}$.

8.12 * Verwenden von Software zum Zeichnen von Funktionsgraphen

Für numerische Berechnungen und insbesondere zum Zeichnen von Funktionsgraphen gibt es eine Reihe praktischer Software, z.B. Matlab, Maple, Mathematica, Scientific Workplace, usw. Die meisten dieser Programme sind lizenziert und ziemlich teuer. Es gibt auch ähnliche Programme im öffentlichen Bereich, diese sind jedoch nicht so fortschrittlich. Zum Beispiel, die Graphen elementarer Funktionen können in Google Colab unter

$$\text{https : //colab.research.google.com/}$$

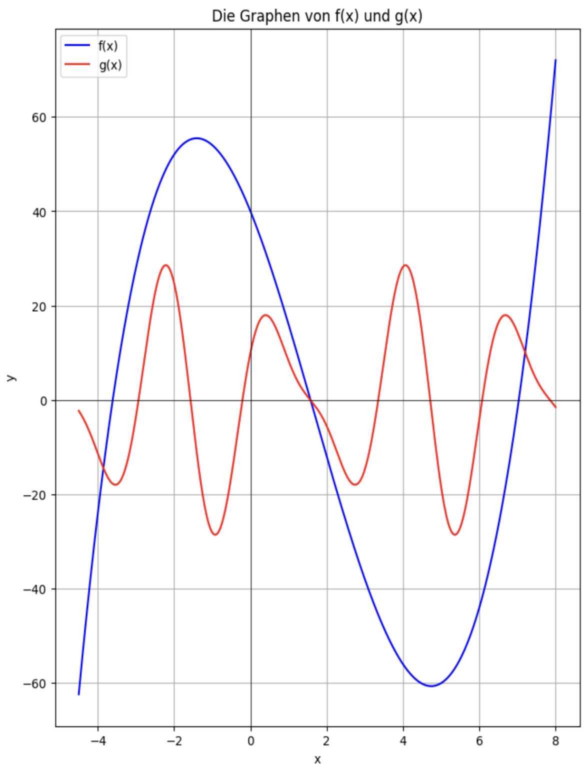
gezeichnet werden. Dazu benötigt man ein Python-Programm das man in Google Colab ausführen lassen kann. Unten ist ein Beispiel von Python-Programm zum Zeichnen von

Graphen zweier Funktionen

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 20x + 40 \quad \text{und} \quad g(x) = 20 \sin 2x + 10 \cos 3x,$$

sowie das Ergebnis seiner Anwendung:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
# Die Werte von x
x = np.linspace(-4.5, 8, 500)
# Die erste Funktion
def f(x):
return x**3 - 5*x**2 - 20*x+40
# Die zweite Funktion
def g(x):
return 20*np.sin(2*x)+10*np.cos(3*x)
# Die Werte der beiden Funktionen
y1 = f(x)
y2 = g(x)
# Zeichnen der Graphen
plt.figure(figsize=(8, 10))
plt.plot(x, y1, label='f(x)', color='blue')
plt.plot(x, y2, label='g(x)', color='red')
# Die Achsen
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.grid(True)
plt.title('Die Graphen von f(x) und g(x)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()
```



8.13 Höhere Ableitungen

Definition. Sei f eine Funktion auf einem Intervall J. Die Ableitung $f^{(n)}$ der Ordnung $n \in \mathbb{Z}_+$ (=die n-te Ableitung) wird per Induktion nach n wie folgt definiert:

$$f^{(0)} = f \quad \text{und} \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{für jedes } n \geq 1,$$

vorausgesetzt, dass $f^{(n-1)}$ auf J definiert und differenzierbar ist. In diesem Fall heißt f n-fach differenzierbar.

Schreibweise:

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = \partial_x^n f.$$

Man benutzt auch die Notation

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= (f')' =: f'' \\ f^{(3)} &= (f'')' =: f''' \\ f^{(4)} &= (f''')' =: f^{IV} \end{aligned}$$

(mit römischer 4), usw.

Definition. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt *unendlich oft* differenzierbar auf J, wenn f n-fach differenzierbar auf J für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. 1. Sei $f = e^x$. Dann $f' = e^x$ und per Induktion erhalten wir, dass

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist e^x unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

2. Sei $f = \sin x$. Dann

$$f' = \cos x,\ f'' = -\sin x,\ f''' = -\cos x,\ f^{IV} = \sin x,$$

woraus folgt

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 0 \bmod 4 \\ \cos x, & n = 1 \bmod 4 \\ -\sin x, & n = 2 \bmod 4 \\ -\cos x, & n = 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Insbesondere sind $\sin x$ und $\cos x$ unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

3. Sei $f(x) = x^a$ wobei $x \in (0, +\infty)$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann

$$f' = ax^{a-1},\ \ f'' = a(a-1)x^{a-2},\ \ f''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3},$$

usw. Per Induktion erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(x^a)^{(k)} = \underbrace{a(a-1)\dots(a-k+1)}_{k \text{ Glieder}} x^{a-k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\right)x^{a-k}.$$

Insbesondere ist x^a unendlich oft differenzierbar auf $(0, +\infty)$.

4. Sei $f(x) = x^n$ wobei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $k \le n$

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)\,x^{n-k}.$$

Für $k = n$ erhalten wir

$$(x^n)^{(n)} = n! = \text{const},$$

woraus folgt, dass $(x^n)^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Insbesondere ist x^n unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Für die n-te Ableitung gelten die Rechenregeln

$$\begin{gathered} (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \\ (cf)^n = cf^{(n)} \end{gathered}$$

vorausgesetzt, dass f und g n-fach differenzierbar sind und $c \in \mathbb{R}$. Für $n = 1$ gelten diese Regeln nach dem Satz 8.1, und für alle $n \geq 1$ beweist man sie per Induktion.

Für das Produkt gilt die Leibnizformel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient ist (siehe Aufgabe 34). Zum Beispiel,

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

Beispiel. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n \tag{8.63}$$

mit reellen Koeffizienten c_k, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$ und $c_n \neq 0$. Die Zahl n heißt der Grad des Polynoms f und wird mit $\deg f$ bezeichnet. Ist $n \geq 1$ so gilt

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + ... + nc_n x^{n-1}.$$

Somit ist die Ableitung von f ein Polynom des Grades $n - 1$.

Es folgt per Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = c_n n! = \text{const}$$

und $f^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Die Eigenschaft, dass $f^{(k)} \equiv 0$ für ein k, ist eine charakteristische Eigenschaft von Polynomen (siehe Aufgabe 36).

8.14 Taylorformel mit Peano-Restglied

In diesem Abschnitt beweisen wir die *Taylorformel*, die eine Approximation der Funktion f mit Hilfe von Polynomen des beliebigen Grades n liefert.

Definition. Sei f n-fach differenzierbar auf einem Intervall J. Sei $a \in J$. Das Polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{8.64}$$

heißt *Taylor-Polynom* von f der Ordnung n an der Stelle a.

Die vollständige Notation von dem Taylor-Polynom ist $T_{n,f}(x;a)$, aber häufig schreibt man $T_n(x)$ wenn es klar ist was f und a sind.

Hauptsatz 8.19 (Taylorformel mit Peano-Restglied) *Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt es für jedes $a \in J$*

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n)} \quad \text{für } x \to a, \tag{8.65}$$

wobei T_n das Taylor-Polynom von f an der Stelle a ist.

Umgekehrt, gilt für ein Polynom

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n$$

die asymptotische Identität

$$f(x) = P(x) + o((x-a)^n) \quad \textit{für } x \to a, \tag{8.66}$$

so gilt dann $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ *für alle* $k = 0, 1, ..., n$, *d.h.* $P(x) \equiv T_n(x)$.

Die zweite Aussage lässt sich wie folgt umformulieren: $T_n(x)$ ist das einzige Polynom des Grades $\leq n$, das (8.65) erfüllt.

Das Taylor-Polynom $T_n(x)$ lässt sich betrachten als eine Approximation von $f(x)$ in der Nähe von a. Die Differenz

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

heißt das *Restglied* der Taylorformel. Es folgt aus (8.65) dass

$$R_n(x) = o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a,$$

und diese Darstellung des Restgliedes heißt die *Restgliedform nach Peano*.

Ein spezieller Fall des Satzes 8.19 für $n = 2$ stimmt mit dem Satz 8.15 überein.

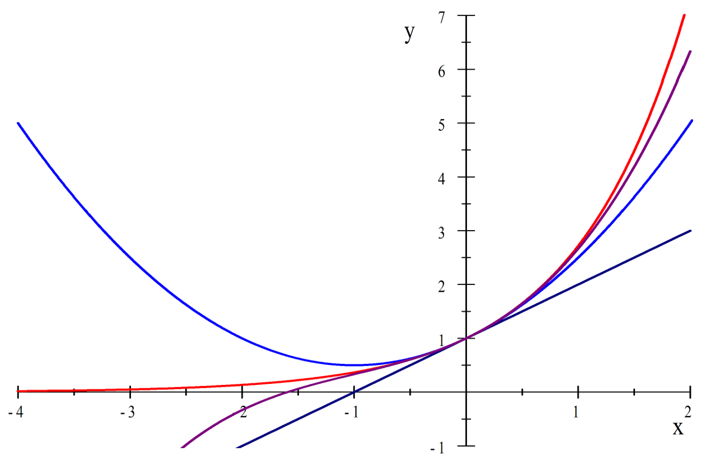
Beispiel. Sei $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(a) = e^a$ für alle n, so erhalten wir aus (8.64)

$$T_n(x; a) = e^a \left(1 + \frac{(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}\right).$$

Insbesondere für $a = 0$ erhalten wir

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!},$$

d.h. $T_n(x)$ ist die n-te Partialsumme der Exponentialreihe.



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau) und $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (lila)

Bemerkung. Für jede Funktion $f(x)$ die mit Hilfe von Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

definiert ist, stimmt das Taylor-Polynom $T_n(x)$ an der Stelle 0 mit der Partialsumme $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ überein (Aufgabe 45). Die Idee ist zu beweisen, dass

$$f(x) = S_n(x) + o(x^n) \quad \text{für } x \to 0$$

und danach die Eindeutigkeitsaussage des Satzes 8.19 zu benutzen.

Beispiel. Sei $f(x) = x^p$, wobei $x > 0$ und $p \in \mathbb{R}$. Das Taylor-Polynom an einer Stelle $a > 0$ ist

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} a^{p-k}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} a^{p-k}(x-a)^k, \end{aligned} \tag{8.67}$$

wobei

$$\binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

eine Verallgemeinerung von Binomialkoeffizienten ist. Nach (8.65) gilt

$$x^p = T_n(x) + o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a.$$

Für $b = x - a$ erhalten wir aus (8.67)

$$\boxed{(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{n} a^{p-n} b^n + o(b^n)}, \tag{8.68}$$

für $b \to 0$. Im Fall $p = n$ stimmt (8.68) mit dem binomischen Lehrsatz überein (wobei das Restglied $o(b^n)$ verschwindet).

Insbesondere für $n = 1$ erhalten wir

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + o(b),$$

für $n = 2$

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} b^2 + o\left(b^2\right),$$

and für $n = 3$

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6} a^{p-3} b^3 + o\left(b^3\right). \tag{8.69}$$

Zum Beispiel, (8.69) ergibt für $p = 1/3$

$$\begin{aligned}(a+b)^{1/3} &= a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{-2/3}b + \frac{1}{2\cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right)a^{-5/3}b^2 + \frac{1}{6\cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)a^{-8/3}b^3 + o\left(b^3\right) \\ &= a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{-2/3}b - \frac{1}{9}a^{-5/3}b^2 + \frac{5}{81}a^{-8/3}b^3 + o\left(b^3\right). \qquad (8.70)\end{aligned}$$

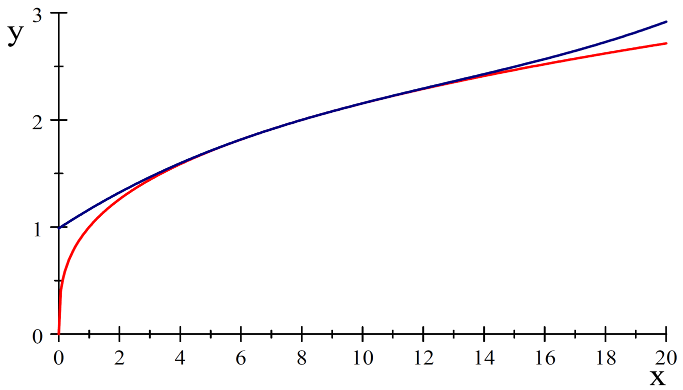
Berechnen wir mit Hilfe von (8.70) die Kubikwurzel aus 9. Für $a = 8$ und $b = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9} = (8+1)^{1/3} &\approx 8^{1/3} + \frac{1}{3}8^{-2/3} - \frac{1}{9}8^{-5/3} + \frac{5}{81}8^{-8/3} \\ &= 2 + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{5}{81\cdot 2^8} \\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20\,736} = 2,08010... \qquad (8.71)\end{aligned}$$

In der Tat gilt es

$$\sqrt[3]{9} = 2,08008...$$

so dass der Approximationsfehler von (8.71) ca. $0,00002$ ist.



Function $f(x) = x^{1/3}$ (rot) und ihres Taylor-Polynom an $a = 8$:

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{3\cdot 2^2}(x-8) - \frac{1}{9\cdot 2^5}(x-8)^2 + \frac{5}{81\cdot 2^8}(x-8)^3 \text{ (blau)}$$

Beweis von dem Satz 8.19. Wir beweisen die asymptotische Identität

$$f(x) - T_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \text{ für } x \to a \qquad (8.72)$$

per Induktion nach n. Induktionsanfang: für $n = 1$ gilt (8.72) nach (8.46).

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Wir müssen beweisen, dass

$$f(x) - T_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \text{ für } x \to a$$

d.h.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \qquad (8.73)$$

Leiten wir das Taylor-Polynom $T_n(x) = T_{n,f}(x)$ ab and erhalten folgendes:

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right)' \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(f')^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(f')^{(l)}(a)}{l!} (x-a)^l , \end{aligned}$$

wobei $l = k - 1$. Wir sehen, dass die rechte Seite hier mit dem Taylor-Polynom der Ordnung $n - 1$ der Funktion f' übereinstimmt. Somit gilt die folgende Identität:

$$\boxed{T_{n,f}'(x) = T_{n-1,f'}(x)}. \tag{8.74}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T_{n-1,f'}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \tag{8.75}$$

Da (8.73) ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ ist, so erhalten wir nach der Regel von L'Hôspital (Satz 8.13), (8.74) und (8.75), dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - T_n(x))'}{((x-a)^n)'} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T_{n-1,f'}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0,$$

woraus (8.65) folgt.

02.05.2025 Vorlesung 7

Für die zweite Aussage, nehmen wir an, dass (8.66) gilt, d.h.

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a, \tag{8.76}$$

und bezeichnen

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} - c_k.$$

Wir müssen beweisen, dass $b_k = 0$. Es folgt aus (8.65) und (8.76), dass

$$\begin{aligned} b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n &= T_n(x) - (c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n) \\ &= (f(x) + o((x-a)^n)) - (f(x) + o((x-a)^n)) \\ &= o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a. \end{aligned} \tag{8.77}$$

Leiten wir daraus her, dass $b_k = 0$ für alle $k = 0, ..., n$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $b_k \neq 0$ für einige k und setzen

$$m = \min\{k \in \{0, ..., n\} : b_k \neq 0\}.$$

Dann gilt nach (8.77)

$$b_m (x-a)^m + b_{m+1} (x-a)^{m+1} + ... + b_n (x-a)^n = o\left((x-a)^n\right) \text{ für } x \to a.$$

Dividieren durch $(x-a)^m$ ergibt

$$b_m + b_{m+1} (x-a) + ... + b_n (x-a)^{n-m} = \frac{o\left((x-a)^n\right)}{(x-a)^n} (x-a)^{n-m} \to 0 \text{ für } x \to a.$$

Andererseits, der Limes der linken Seite hier ist gleich b_m, woraus folgt $b_m = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. ■

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome $T_{2n+1}(x)$ der Funktion $\sin x$ an der Stelle 0. Wir haben die folgende Reihe für $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

Nach Aufgabe 45 gilt

$$T_{2n+1}(x) = S_{2n+1}(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Analog bestimmt man die Taylor-Polynome von $\cos x$. Alternativ kann man die Taylor-Polynome von $\cos x$ mit Hilfe von (8.74) erhalten d.h. als die Ableitungen von Taylor-Polynomen von $\sin x$:

$$T_{2n,\cos}(x) = T'_{2n+1,\sin}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Es gelten die folgenden Taylorformeln:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)} \text{ für } x \to 0$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)} \text{ für } x \to 0$$

(siehe Aufgaben 43 und 46).