Analysis II

Alexander Grigoryan Universität Bielefeld

WS 2018/19

Contents

9	Differentialrechnung: höhere Ableitungen		
		öhere Ableitungen	
	9.2 Ta	aylorformel mit Peano-Restglied	3
	9.3 Ta	aylorformel mit Lagrange-Restglied	10
10	Integralrechnung: unbestimmtes Integral		
		sammfunktion und unbestimmtes Integral	
	10.2 Li	nearität des unbestimmten Integrale	17
	10.3 Pa	artielle Integration	18
	10.4 Su	abstitutionsregel	20
	10.5 In	tegration von rationalen Funktionen	24
11	Integra	alrechnung: bestimmtes Integral	31
	11.1 Ri	iemann-Integral	31
		arboux-Integrierbarkeit	34
	11.3 In	tegrierbare Funktionen	38
	11.4 Fu	ındamentalsatz der Analysis, 1	40
	11.5 W	Weitere Eigenschaften vom bestimmten Integral	44
			47
	11.7 Fu	ındamentalsatz der Analysis, 2	48
	11.8 Su	ıbstitutionsregel	50
		Θ	53
	11.10 *	Wallis-Produkt	58
	11.11 *	Stirling-Formel	60
12	Konve	rgenz von Integralen	65
	12.1 Uı	neigentliches Riemann-Integral	65
	12.2 Ke	onvergenzkriterien von uneigentlichen Integralen	73
	12.3 Be	edingte Konvergenz	80
	12.4 *	Alternative Definition von Elementarfunktionen	82
	12.5 *	Gammafunktion	87
			89
13	Gleich	mäßige Konvergenz von Reihen	93
	13.1 Fu		93
	13.2 Gl		95
	13.3 Pc	otenzreihen	98

iv CONTENTS

13.4 Integrations unter gleichmäßiger Konvergenz	102
13.5 Differenzieren unter gleichmäßiger Konvergenz	105
13.6 Taylorreihe	
13.7 * Sätze von der majorisierten und monotonen Konvergenz	112
13.8 * Gauss-Integral	
13.9 * Approximationssatz von Weierstraß	
13.10 * Fourier-Reihen	
14 Metrische Räume und stetige Abbildungen	135
14.1 Abstandsfunktion	
14.2 Die p -Norm in \mathbb{R}^n	
14.3 Metrische Kugel	
14.4 Konvergenz in metrischen Räumen	
14.5 Stetige Abbildungen	
14.6 Offene und abgeschlossene Mengen	
14.7 Äquivalente Normen	
14.8 Vollständigkeit	
14.9 Fixpunktsatz von Banach	
14.10Kompakte Mengen und Extremwertsatz	
14.11Fundamentalsatz der Algebra	
14.12Zusammenhängende Mengen und Zwischenwertsatz	
14.13 * Gleichmäßige Stetigkeit	
14.14 * Vervollständigung von metrischen Räumen	
14.15 * p -adische Zahlen	172
14.16 * Lebesgue-integrierbare Funktionen	175
15 Differential rechnung in \mathbb{R}^n	179
15.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit	
15.2 Rechenregeln für totale Ableitung	
15.3 Richtungsableitung und Mittelwertsatz	
15.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung	
15.5 Taylorformel	
15.6 Lokale Extrema	
15.7 Satz von der impliziten Funktion	
15.8 Satz von der inversen Funktion	
15.9 * Beweise	
15.9.1 Taylorformel	
15.9.2 Satz von der impliziten Funktion	
15.9.3 Satz von der inversen Funktion	
15.10 * Holomorphe und harmonische Funktionen	
15.11 * Parameterintegral	
10.14 IXUI VOIIIIIVOGI AI UHU VVIIIUUHGSZAHI	441
16 * Flächen in \mathbb{R}^n	237
	237
16 * Flächen in \mathbb{R}^n	237 237

Chapter 9

Differentialrechnung: höhere Ableitungen

9.1 Höhere Ableitungen

17.10.2018

Zu Anfang erinnern wir uns an den Begriff der Ableitung. Ist $f: J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall J, so die Ableitung f'(x) an einer Stelle $x \in J$ wird wie folgt definiert:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert. Ist Limes auch endlich, so heißt die Funktion f differenzierbar in x. Ist f differenzierbar in alle $x \in J$, so heißt f differenzierbar in J. In diesem Fall ist f' auch eine Funktion auf J.

Andere Notation für f':

$$f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f.$$

Der Ausdruck $\frac{df}{dx}$ kommt aus der Schreibweise

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

wobei Δx beliebig ist und $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Die zweite Ableitung f''(x) wir als die Ableitung von f' definiert, vorausgesetzt, dass f in J differenzierbar ist und f' in J differenzierbar ist. Schreibweise:

$$f'' = (f')' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \partial_{xx} f = \partial_x^2 f.$$

Definition. Sei f eine Funktion auf einem Intervall J. Die Ableitung $f^{(n)}$ der Ordnung $n \in \mathbb{Z}_+$ (oder die n-te Ableitung) wird per Induktion wie folgt definiert:

$$f^{(0)} = f$$
 und $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ für jedes $n \ge 1$,

vorausgesetzt, dass $f^{(n-1)}$ in J definiert und differenzierbar ist.

Schreibweise:

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = \partial_x^n f.$$

Zum Beispiel, wir haben

$$f^{(1)} = f'$$

 $f^{(2)} = (f')' =: f''$
 $f^{(3)} = (f'')' =: f'''$
 $f^{(4)} = (f''')' =: f^{IV}$

usw.

Definition. Die Funktion f heißt n fach differenzierbar in J falls $f^{(n)}$ in J existiert (insbesondere müssen auch $f^{(k)}$ für alle $k \leq n$ existieren). Die Funktion f heißt unendlich oft differenzierbar in J, falls $f^{(n)}$ in J für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Beispiel. 1. Sei $f = e^x$. Dann $f' = e^x$ und per Induktion erhalten wir, dass

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist e^x unendlich oft differenzierbar.

2. Sei $f = \sin x$. Dann

$$f' = \cos x, \ f'' = -\sin x, \ f''' = -\cos x, \ f^{IV} = \sin x,$$

woraus folgt

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 0 \mod 4 \\ \cos x, & n = 1 \mod 4 \\ -\sin x, & n = 2 \mod 4 \\ -\cos x, & n = 3 \mod 4 \end{cases}$$

3. Sei $f(x) = x^a$ wobei $x \in (0, +\infty)$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann

$$f' = ax^{a-1}$$
, $f'' = a(a-1)x^{a-2}$, $f''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$,

usw. Per Induktion erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(x^a)^{(k)} = \underbrace{a(a-1)\dots(a-k+1)}_{k \text{ Glieder}} x^{a-k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (a-i)\right) x^{a-k}.$$

4. Sei $f(x) = x^n$ wobei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k}.$$

Für k = n erhalten wir

$$(x^n)^{(n)} = n! = \text{const},$$

woraus folgt, dass $(x^n)^{(k)} \equiv 0$ für alle k > n.

Alle Funktionen in den obigen Beispielen sind unendlich oft differenzierbar.

Für die n-te Ableitung gilt auf die Rechenregeln

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)},$$

 $(cf)^n = cf^{(n)}$

vorausgesetzt, dass f und g n-fach differenzierbar sind und $c \in \mathbb{R}$. Diese Regeln lassen sich leicht per Induktion beweisen.

Für das Produkt gilt die Leibnizformel

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient ist (Aufgabe 29).

Beispiel. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$
(9.1)

mit reellen Koeffizienten c_k , wobei $n \in \mathbb{Z}_+$ und $c_n \neq 0$. Die Zahl n heißt der Grad von f und wird mit deg f bezeichnet. Ist $n \geq 1$ so ist die Ableitung von Polynom f ein Polynom des Grades n-1, da

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$$

Es folgt, dass

$$f^{(n)}(x) = c_n n! = \text{const}$$

und $f^{(k)} \equiv 0$ für alle k > n. Die Eigenschaft, dass $f^{(k)} \equiv 0$ für ein k, ist die charakteristische Eigenschaft von Polynomen, was wir später sehen.

9.2 Taylorformel mit Peano-Restglied

Ist f differenzierbar in J so gilt es für alle $a \in J$ die asymptotische Identität

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$
 für $x \to a$, (9.2)

was direkt aus der Definition der Ableitung folgt (siehe (8.29)). Diese Identität lässt sich betrachten als eine Approximation der Funktion f(x) in der Nähe von a mit der linearen Funktion

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Da die Gleichung

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

die Tangente zum Graph von f am Punkt (a, f(a)) bestimmt, so bedeutet (9.2) die Approximation des Graphes von f in der Nähe von a mit der Tangente.

Der Satz 8.14 besagt folgendes: ist f 2-fach differenzierbar in J, so gilt die asymptotische Identität

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o((x - a)^2)$$
 für $x \to a$. (9.3)

4

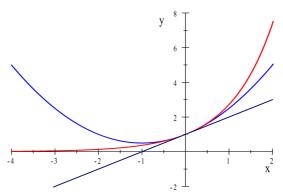
Diese Identität lässt sich betrachten als eine Approximation der Funktion f(x) in der Nähe von a mit der quadratischen Funktion

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Die Gleichung

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^{2}$$

bestimmt eine Parabel, die die *Schmiegparabel* zum Graph von f an (a, f(a)) heißt und eine bessere Approximation des Graphes von f liefert.



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ und $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

In diesem Abschnitt beweisen wir die Taylor formel, die eine Approximation der Funktion f mit Hilfe von Polynomen des beliebigen Grades n liefert. Wir fangen mit Taylor formel für Polynome an.

Lemma 9.1 Für jedes Polynom f von $Grad \leq n$ gilt für alle $a, x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$
(9.4)

Beweis. Induktionsanfang für n = 0. Ist deg f = 0 so ist f = const und $f' \equiv 0$, so dass die Identität (9.4) ist offensichtlich erfüllt.

Induktionsschritt von n nach n+1. Sei f ein Polynom des Grades $\leq n+1$. Wir müssen beweisen, dass für alle x

$$f\left(x\right) =g\left(x\right) ,$$

wobei

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (9.5)$$

Da deg $f' \leq n$, so können wir die Induktionsvoraussetzung für das Polynom f' verwenden. Da $(f')^{(k)} = f^{(k+1)}$, so erhalten wir

$$f'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$
 (9.6)

Ableiten der Funktion g aus (9.5) ergibt

$$g'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x - a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Vergleichen mit (9.6) ergibt die Identität f'(x) = g'(x). Somit gilt $(f - g)' \equiv 0$, und nach dem Konstantentest (Satz 8.10) beschließen wir, dass f - g = const. Da nach (9.5) g(a) = f(a), so erhalten wir dass const = 0, so dass die Identität f(x) = g(x) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Beispiel. Setzen wir x = a + b ein und schreiben (9.4) um wie folgt:

$$f(a+b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}b + \frac{f''(a)}{2!}b^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}b^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k.$$

Insbesondere für $f(x) = x^n$ erhalten wir den binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^{n} = a^{n} + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^{2} + \dots + \frac{n!}{n!}b^{n}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)a^{n-k}}{k!}b^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}.$$

Wir haben hier verwendet, dass

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Hauptsatz 9.2 (Taylorformel mit der Restgliedform nach Peano) Sei f(x) eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt es für jedes $a \in J$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$
(9.7)

für $x \to a$. Umgekehrt, gilt für einige $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$
(9.8)

 $f\ddot{u}r \ x \to a$, so gilt dann $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ f $\ddot{u}r$ alle k = 0, 1, ..., n.

Das Polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, (9.9)$$

heißt Taylor-Polynom von f der Ordnung n an der Stelle a. Die vollständige Notation von dem Taylor-Polynom ist $T_{n,f}(x;a)$, aber häufig schreibt man $T_n(x)$ wenn es klar ist was f und a sind.

Der Satz 9.2 besagt, dass

$$f(x) - T_n(x) = o((x - a)^n)$$
 für $x \to a$. (9.10)

Darüber hinaus ist $T_n(x)$ das einzige Polynom des Grades $\leq n$, das (9.10) erfüllt.

Die Differenz $f(x) - T_n(x)$ heißt das Restglied der Taylorformel. Die Darstellung des Restgliedes in der Form (9.10) heißt die Restgliedform nach Peano.

Satz 8.14 ist ein spezieller Fall des Satzes 9.2 für n = 2.

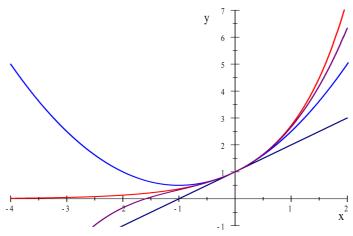
Beispiel. Sei $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(a) = e^a$ für alle n, so erhalten wir aus (9.9)

$$T_n(x) = e^a \left(1 + \frac{(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \right).$$

Insbesondere für a = 0 erhalten wir

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

was nicht anderes ist als die Partialsumme $S_n(x)$ der Exponentialreihe.



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$, $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ und $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (lila)

Beispiel. Sei $f(x) = x^p$, wobei x > 0 und $p \in \mathbb{R}$. Für b = x - a erhalten wir aus (9.7)

$$(a+b)^{p} = a^{p} + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^{2} + \dots + \binom{p}{n}a^{p-n}b^{n} + o(b^{n}), \qquad (9.11)$$

für $b \to 0$, wobei

$$\binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

eine Verallgemeinerung von Binomialkoeffizienten ist. Insbesondere für n=1 erhalten wir

$$(a+b)^{p} = a^{p} + pa^{p-1}b + o(b)$$
(9.12)

and für n=3

$$(a+b)^{p} = a^{p} + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}b^{2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}a^{p-3}b^{3} + o(b^{3}).$$
(9.13)

Zum Beispiel, (9.13) ergibt für p = 1/3

$$(a+b)^{1/3} = a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{-2/3}b + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right)a^{-5/3}b^2 + \frac{1}{6 \cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)a^{-8/3}b^3 + o\left(b^3\right)$$
$$= a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{-2/3}b - \frac{1}{9}a^{-5/3}b^2 + \frac{5}{81}a^{-8/3}b^3 + o\left(b^3\right).$$

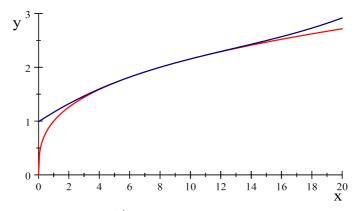
Für a = 8 und b = 1 erhalten wir

$$\sqrt[3]{9} \approx 8^{1/3} + \frac{1}{3}8^{-2/3} - \frac{1}{9}8^{-5/3} + \frac{5}{81}8^{-8/3}
= 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{9 \cdot 2^5} + \frac{5}{81 \cdot 2^8}
= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20736} = 2,08010...$$
(9.14)

In der Tat gilt es

$$\sqrt[3]{9} = 2,08008...$$

so dass der Approximationsfehler von (9.14) ca. 0,00002 ist.



Function $f(x) = x^{1/3}$ und ihres Taylor-Polynom an a = 8:

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} (x - 8) - \frac{1}{9 \cdot 2^5} (x - 8)^2 + \frac{5}{81 \cdot 2^8} (x - 8)^3$$

Beweis von dem Satz 9.2. Wir beweisen (9.10) per Induktion nach n. Induktionsanfang: für n = 1 gilt (9.10) nach (9.2).

Induktionsschritt von n nach n+1. Wir müssen beweisen, dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$
(9.15)

Leiten wir das Taylor-Polynom $T_{n+1}(x) = T_{n+1,f}(x;a)$ ab and erhalten folgendes:

$$T'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x-a)^{k-1}$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{(f')^{(l)}(a)}{l!} (x-a)^{l},$$

wobei l = k - 1. Wir sehen, dass die rechte Seite hier gleich das Taylor-Polynom der Ordnung n der Funktion f' ist, d.h.

$$T'_{n+1,f}(x;a) = T_{n,f'}(x;a).$$
 (9.16)

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$f'(x) - T_{n,f'}(x;a) = o((x-a)^n)$$
 für $x \to a$,

woraus folgt

$$f'(x) - T'_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$$
 für $x \to a$,

d.h.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$
(9.17)

19.10.2018

Da (9.15) ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ ist, so erhalten wir nach der Regel von l'Hôspital (Satz 8.12) und (9.17), dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(x)}{(n+1)(x-a)^n} = 0,$$

woraus (9.10) folgt.

Für die zweite Aussage bezeichnen wir

$$b_k = \frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!} - c_k$$

und bemerken, dass nach (9.7) und (9.8)

$$b_0 + b_1 (x - a) + \dots + b_n (x - a)^n = T_n (x) - (c_0 + c_1 (x - a) + \dots + c_n (x - a)^n)$$

= $o((x - a)^n)$ für $x \to a$. (9.18)

Leiten wir daraus her, dass $b_k = 0$ für alle k = 0, ..., n. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $b_k \neq 0$ für einige k und setzen

$$m = \min\left\{k : b_k \neq 0\right\}.$$

Dann gilt

$$b_m (x-a)^m + b_{m+1} (x-a)^{m+1} + \dots + b_n (x-a)^n = o((x-a)^n)$$
 für $x \to a$.

Dividieren durch $(x-a)^m$ ergibt

$$b_m + b_{m+1}(x-a) + \dots + b_n(x-a)^{n-m} = \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-m} \to 0 \text{ für } x \to a.$$

Andererseits, der Limes der linken Seite hier ist gleich b_m , woraus folgt $b_m = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome für sin x an a=0. Wir haben die folgende Reihe für sin x:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Zeigen wir, dass das Taylor-Polynom $T_{2n+1}(x)$ von sin x ist gleich die Partialsumme

$$S_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

In der Tat gilt es für $|x| \le 1$

$$|\sin x - S_{2n+1}(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right|$$

$$\leq |x|^{2n+3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$$

$$\leq \operatorname{const} |x|^{2n+3}$$

so dass

$$\sin x - S_{2n+1}(x) = o(x^{2n+1})$$
 für $x \to 0$.

Nach dem Eindeutigkeit-Aussage des Satzes 9.2 erhalten wir $T_{2n+1} = S_{2n+1}$.

Analog bestimmt man die Taylor-Polynome von $\cos x$. Alternativ kann man die Taylor-Polynome von $\cos x$ mit Hilfe von (9.16) erhalten d.h. als die Ableitungen von Taylor-Polynomen von $\sin x$:

$$T_{2n,\cos}(x) = T'_{2n+1,\sin}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Mit Hilfe von dem Satz 9.2 erhält man auch die folgenden Taylorformeln:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
 für $x \to 0$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$
 für $x \to 0$

(siehe Aufgaben 33 und 38).

9.3 Taylorformel mit Lagrange-Restglied

Wir verbessern hier die Taylorformel, indem wir eine bessere Abschätzung des Restgliedes $f(x) - T_n(x)$ beweisen.

Hauptsatz 9.3 (Taylorformel mit der Restgliedform nach Lagrange) Sei f(x) eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann, für alle $a, x \in J$, $x \neq a$, gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$
(9.19)

für ein c zwischen a und x (d.h. $c \in (a, x)$ oder $c \in (x, a)$).

Für n = 1 sieht (9.19) wie folgt aus:

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a),$$

was nicht anderes als Mittelwertsatz von Lagrange ist (Satz 8.9). Für n=2 erhalten wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2}(x - a)^{2},$$

was mit dem Satz 8.15 übereinstimmt.

Die Identität (9.19) ergibt die folgende Darstellung des Restgliedes:

$$f(x) - T_{n-1}(x; a) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - a)^n, \qquad (9.20)$$

die die Restgliedform nach Lagrange heißt.

Beweis von dem Satz 9.3. Wir wechseln im Beweis die Notation und beweisen, dass für alle $a, b \in J$, $a \neq b$, gilt

$$f(b) - T_{n-1}(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n,$$
 (9.21)

für ein c zwischen a und b. Dafür verwenden wir den Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 8.13) zu den folgenden Funktionen F und G:

$$F(x) = f(b) - \left(f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right),$$

$$(9.22)$$

$$G(x) = (b-x)^n.$$

Nach Voraussetzungen ist F in J differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz von Cauchy existiert ein c zwischen a und b mit

$$G'(c)(F(a) - F(b)) = F'(c)(G(a) - G(b)).$$
 (9.23)

Bestimmen wir alle Werte in dieser Identität. Wir haben

$$F(a) - F(b) = (f(b) - T_{n-1}(b)) - 0 = f(b) - T_{n-1}(b)$$

und

$$G(a) - G(b) = (b - a)^{n}.$$

Auch gilt

$$G'(x) = -n(b-x)^{n-1}.$$

Leiten wir jedes Glied in (9.22) in x ab. Für jedes k = 1, ..., n - 1 gilt

$$\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^{k}\right)' = -\frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^{k}
= -\left[\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^{k}\right],$$

woraus folgt

$$F'(x) = -f'(x) + \left[\frac{f'(x)}{0!} - \frac{f''(x)}{1!} (b - x) \right]$$

$$+ \left[\frac{f''(x)}{1!} (b - x) - \frac{f'''(x)}{2!} (b - x)^{2} \right]$$

$$+ \left[\frac{f'''(x)}{2!} (b - x)^{2} - \frac{f^{(4)}(x)}{3!} (b - x)^{3} \right]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \left[\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!} (b - x)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b - x)^{n-1} \right].$$

Alle Glieder in diesem Ausdruck lassen sich wegkürzen, außer des letzten Glied. Somit erhalten wir

$$F'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} (b-x)^{n-1}.$$
 (9.24)

Einsetzen von den Werten von F, G, F', G' in (9.23) ergibt

$$n (b-c)^{n-1} (f (b) - T_{n-1} (b)) = \frac{f^{(n)} (c)}{(n-1)!} (b-c)^{n-1} (b-a)^{n}.$$

Da $c \neq b$, so dividieren durch $n(b-c)^{n-1}$ ergibt (9.21).

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ und ihre Taylor-Polynome an 0

$$T_4(x) = T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Nach dem Satz 9.3 gilt für alle $x \neq 0$

$$\sin x - T_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$$

für ein c zwischen 0 und x. Da $f^{(5)}(c) = \cos c$ und $|\cos c| \le 1$, so erhalten wir die Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$\left|\sin x - T_4\left(x\right)\right| \le \frac{\left|x\right|^5}{120},$$

12

die für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt. Zum Beispiel, für x=0,1erhalten wir

$$\sin 0, 1 \approx T_4(0, 1) = 0, 1 - \frac{0, 1^3}{6} = 0,0998333...$$

und der Approximationsfehler ist kleiner gleich

$$\frac{0,1^5}{120} < 10^{-7}.$$

Chapter 10

Integralrechnung: unbestimmtes Integral

Wir betrachten hier das folgende Problem:

wie lässt sich eine Funktion durch ihre Ableitung wiederherstellen?

Diese Frage entsteht in vielen Anwendungen von Mathematik. Zum Beispiel, die Bestimmung der Position x(t) von einem bewegenden Körper durch die gegebene Geschwindigkeit v(t) = x'(t) führt zu diesem Problem. Noch allgemeineres Problem bekommt man aus dem Aktionsprinzip (Zweites Newtonsches Gesetz)

$$ma = F$$
.

wobei m die Masse des Körpers ist, a = a(t) die Beschleunigung an der Zeit t und F die bewegende Kraft. Da a(t) = x''(t), so erhalten wir die Gleichung

$$x''(t) = \frac{F}{m}.$$

Ist F als eine Funktion von Zeit t bekannt, so bestimmt man erst x' und danach x. Ist F eine Funktion von x und x' wie häufig der Fall ist, so erhält man eine Differentialgleichung – eine Beziehung zwischen x'', x', x die x wiederherstellen lässt.

10.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition. Gilt F' = f auf einem Intervall J, so heißt die Funktion F eine Stammfunktion von f auf J.

Nicht alle Funktionen haben Ableitung. Auch nicht alle Funktion haben Stammfunktion. Im nächsten Kapitel beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 10.1 Jede stetige Funktion auf einem Interval J hat eine Stammfunktion auf diesem Intervall.

Für die Eindeutigkeit von Stammfunktion gilt folgendes.

Satz 10.2 Ist F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall J, so hat jede Stammfunktion von f die Form F(x) + C, wobei C eine beliebige Konstante ist.

Beweis. Gilt F' = f, so gilt auch (F + C)' = F' = f. Somit ist F + C auch eine Stammfunktion von f. Umgekehrt, ist G eine Stammfunktion von f so gilt auf J die Identität F' = G' = f woraus folgt (G - F)' = 0 on J. Nach dem Konstantentest (Satz 8.10) ist die Funktion G - F gleich eine Konstante C auf J, woraus folgt G(x) = F(x) + C für alle $x \in J$, was zu beweisen war.

Zum Beispiel, we wissen, dass

$$\left(x^2\right)' = 2x,$$

so dass x^2 eine Stammfunktion von 2x ist. Es folgt, dass jede Stammfunktion von 2x gleich $x^2 + C$ ist.

Definition. Die Menge von allen Stammfunktionen von f(x) wird mit

$$\int f(x) \, dx$$

bezeichnet ("Integral von f von x dx"). Dieser Ausdruck heißt auch unbestimmtes Integral von f. Nach dem Satz 10.2 ist $\int f(x) dx$ eine Funktion plus beliebige Konstante.

Jetzt erklären wir den Grund für diese Notation. Das Symbol \int heißt *Integral* und stamm aus dem Buchstabe "S" von "Summe". Allerdings passt der Buchstabe "S" auch zum Wort "Stammfunktion".

Definition. Für differenzierbare Funktion F heißt der Ausdruck F'(x) dx das Differential von F und wird mit dF bezeichnet, d.h.

$$dF = F'(x) dx, (10.1)$$

wobei dx eine unabhängige Variable ist, die das Differential von x heißt.

Nach Definition der Ableitung gilt es für $dx \to 0$

$$F(x+dx) - F(x) = F'(x) dx + o(dx)$$

$$= dF + o(dx).$$
(10.2)

Somit ist das Differential dF eine lineare bezüglich dx Approximation der Differenz F(x + dx) - F(x).

Gegeben sei eine stetige Funktion f auf einem Intervall J, versuchen wir die Stammfunktion F von f zu bestimmen. Fixieren wir einen Punkt $x_0 \in J$ und für beliebigen Punkt $x \in J$ betrachten eine Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$ mit $x_n = x$ so dass die Differenzen $dx_k = x_{k+1} - x_k$ klein genug sind (d.h. n reichend groß ist). Dann gilt nach (10.2)

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) \approx \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k) dx_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) dx_k.$$

Im nächsten Kapitel beweisen wir, dass der Grenzwert der rechten Seite für $n \to \infty$ existiert und gleich $F(x) - F(x_0)$ ist. So, die Notation $\int f(x) dx$ spiegelt die Konstruktion der Stammfunktion als der Grenzwert von $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) dx_k$ für $n \to \infty$ wider.

24.10.18

Die Operation $f \mapsto \int f(x) dx$ heißt unbestimmte Integration oder Integrieren. Das Wort "unbestimmt" bezieht sich auf die unbestimmte Konstante C im Satz 10.2. Die Funktion f(x) heißt der Integrand, die Variable x heißt die Integrationsvariable. Natürlich ist der Wert von Integral unabhängig von der Notation der Integrationsvariable.

In diesem Kapitel lernen wir die Methoden von unbestimmten Integration. Da Integrieren eine inverse Operation von Ableiten ist, so erhält man meist die Rechenregeln von Integrieren als Umkehrung von den Rechenregeln von Ableiten.

Für jede differenzierbare Funktion F auf einem Intervall J gilt auf J nach dem Satz 10.2 die Identität

$$\int F'(x) dx = F(x) + C. \tag{10.3}$$

Diese Identität lässt uns eine Tabelle von Stammfunktionen zu erstellen.

Zum Beispiel, da $(x^{a+1})' = (a+1)x^a$ so für $a \neq -1$ erhalten wir

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a,$$

woraus folgt, für $a \neq -1$,

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

Für reelles a gilt diese Identität auf $(0, +\infty)$, für nichtnegative ganze a – auf \mathbb{R} , und für negative ganze a – auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$.

Insbesondere erhalten wir

$$\int dx = x + C, \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

Da $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$ (Aufgabe 5), so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

auch auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$.

Umkehrung von Ableitung von Exponentialfunktion ergibt

$$\int e^x dx = e^x + C$$

und auch

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

für a > 0, $a \neq 1$. Einsetzen $b = \ln a$ ergibt, für $b \neq 0$,

$$\int e^{bx} dx = \frac{e^{bx}}{b} + C.$$

Umkehrung von Ableitungen von trigonometrischen Funktionen ergibt:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

auf jedem Intervall wo $\cos x$ nicht verschwindet,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

auf jedem Intervall wo $\sin x$ nicht verschwindet.

Umkehrung von Ableitungen von inversen trigonometrischen Funktionen ergibt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \text{ auf } (-1,1),$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \text{ auf } (-\infty, \infty).$$

Umkehrung von Ableitungen von den Hyperbelfunktionen ergibt

$$\int \sinh x = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

auf $(0,\infty)$ und $(-\infty,0)$ (die Ableitung von tanh und coth wurden in Aufgabe 3 bestimmt).

Aus den Aufgaben 5, 6, 21 erhalten wir auch die Identitäten

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C = \operatorname{arsinh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C \quad \text{auf } (1, +\infty) \text{ und } (-\infty, -1),$$

Die Funktion $\ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$ heißt der lange Logarithmus. Auf $(1, +\infty)$ stimmt diese Funktion mit arcosh x überein.

Die Funktion $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ heißt der hohe Logarithmus. Auf (-1,1) stimmt diese Funktion mit artanh x überein.

Die obigen Identitäten liefern eine Tabelle von Stammfunktionen, die auch *Integraltabelle* heißt. Die Einträge dieser Tabelle heißen *Grundintegrale*. Es gibt längere Tabellen von Stammfunktionen mit tausenden Einträgen. Es gibt auch Programme wie Mathematica, Maple, MuPAD usw., die Stammfunktion explizit bestimmen können. Diese Programme benutzen die ausführlichen Tabellen von Stammfunktionen und die Rechenregeln.

Integrieren ist normalerweise viel schwieriger als Ableiten. Darüber hinaus ist es nicht immer möglich das Integral explizit durch elementare Funktionen auszudrücken. Z.B. die Integrale $\int e^{x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (und viele andere) lassen sie als elementare Funktionen nicht darstellen.

Unterhalb entwickeln wir die Technik des Integrierens für explizite Bestimmung von Integralen (wenn möglich). Diese Technik besteht aus drei allgemeinen Regeln – Linearität, partielle Integration und Substitution, die häufig ein gegebenes Integral auf Grundintegrale zurückzuführen helfen.

Es gibt auch spezielle Integrationsverfahren für spezielle Klassen von Integranden.

10.2 Linearität des unbestimmten Integrale

Satz 10.3 Seien f und g zwei stetige Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt

$$\int (f+g) dx = \int f dx + \int g dx.$$
 (10.4)

Auch für beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gilt

$$\int afdx = a \int fdx.$$

Beweis. Wir müssen beweisen, dass die Ableitung der rechten Seite von (10.4) gleich f + g ist. Die Summenregel der Ableitung ergibt

$$\left(\int f dx + \int g dx\right)' = \left(\int f dx\right)' + \left(\int g dx\right)' = f + g,$$

was zu beweisen war. Die zweite Identität lässt sich analog beweisen:

$$\left(a\int fdx\right)' = a\left(\int fdx\right)' = af.$$

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$. Es gilt

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x},$$

und somit

$$\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int x^2 dx + 2 \int x^{1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{4x^{3/2}}{3} + \ln|x| + C.$$

2. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$ Bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x},$$

woraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

3. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Dann erhalten wir

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{n} \int c_k x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$
$$= C + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \dots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

10.3 Partielle Integration

Seien u(x) und v(x) zwei Funktionen auf einem Intervall J. Ist v differenzierbar, so betrachten wir den Ausdruck

$$\int u dv \equiv \int u(x) dv(x) := \int u(x) v'(x) dx.$$

Satz 10.4 Seien u, v zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem Intervall J. Dann gilt auf diesem Intervall die Identität

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{10.5}$$

Beweis. Die Identität (10.5) lässt sich ausführlicher wie folgt umschreiben:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx. \tag{10.6}$$

Da die Funktionen uv' und vu' stetig sind, so die beiden Integrale in (10.6) existieren. Um (10.6) zu beweisen, es reicht zu zeigen, dass die Ableitung der rechten Seite gleich uv' ist. In der Tat gilt es nach der Produktregel der Ableitung, dass

$$\left(uv - \int vu'dx \right)' = (uv)' - vu'$$

$$= (u'v + uv') - vu'$$

$$= uv',$$

was zu beweisen war.

Beispiel. 1. Bestimmen $\int \ln x dx$. Für $u = \ln x$ und v = x haben wir

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C,$$

so dass

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

2. Bestimmen $\int x^2 e^x dx$. Wir benutzen, dass $e^x dx = de^x$. Für $u = x^2$ und $v = e^x$ haben wir

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Um $\int xe^x dx$ zu bestimmen, wir benutzen den Satz 10.4 wieder, diesmal mit u=x und $v=e^x$:

$$\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Somit erhalten wir

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

3. Bestimmen $\int \sqrt{1+x^2} dx$. Für $u=\sqrt{1+x^2}$ und v=x, erhalten wir

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(1+x^2) dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Wir sehen, dass dasselbe Integral in den Beiden Seiten erscheint. Verschieben das Integral nach links und Dividieren durch 2 ergibt

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

10.4 Substitutionsregel

Satz 10.5 Sei f eine Funktion mit der Stammfunktion F auf einem Intervall I, d.h.

$$\int f(y) dy = F(y) + C. \tag{10.7}$$

Sei u eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $u(J) \subset I$. Dann gilt auf J

$$\int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C.$$
(10.8)

Beweis. Die beiden Funktionen f(u(x)) und F(u(x)) haben den Definitionsbereich J. Da

$$\int f(u(x)) du(x) = \int f(u(x)) u'(x) dx,$$

so ist die Identität (10.8) äquivalent zu

$$(F(u(x)))' = f(u(x)) u'(x).$$

In der Tat erhalten wir nach der Kettenregel und F' = f, dass

$$(F(u(x)))' = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x),$$

was zu beweisen war.

Bemerkung. Die Identität (10.8) bedeutet folgendes: die Integrationsvariable y in (10.7) lässt sich durch eine differenzierbare Funktion y = u(x) ersetzen. Die Formel (10.8) heißt die Substitutionsregel von Integration. Es ist klar aus dem Beweis, dass die Substitutionsregel eine Umkehrung der Kettenregel ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int \left(ax+b\right)^n dx$$

wobei $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{R}$. Da

$$d\left(ax+b\right) = adx$$

und somit

$$dx = \frac{1}{a}d\left(ax + b\right),$$

so erhalten wir mit der Substitution u = ax + b

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \int (ax+b)^n d(ax+b) = \frac{1}{a} \int u^n du.$$

Betrachten wir weiter u als neue Integrationsvariable (ohne y einzuführen) und erhalten

$$\int u^n du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1, \\ \ln|u| + C, & n = -1. \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\int (ax+b)^n dx = \begin{cases} \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, & n \neq 1, \\ \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, & n = -1. \end{cases}$$
(10.9)

2. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

Das ist ein Grundintegral, aber trotzdem zeigen wir, wie man dieses Integral unabhängig berechnen kann. Da

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right),$$

so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x - 1)}{x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + 1)}{x + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C.$$

3. Bestimmen wir

$$\int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Da

$$xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d\left(1 + x^2\right),$$

so haben wir

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Substitution $u = 1 + x^2$ ergibt

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

4. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Mit der Substitution $u = \cos x$ erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\sin^2 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1} = \int \frac{du}{u^2 - 1}$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C.$$

Um die Antwort weiter zu vereinfachen, benutzen wir die trigonometrische Identität ¹

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \frac{x}{2},\tag{10.10}$$

26.10.18

was ergibt

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

5. Bestimmen wir

$$\int \arcsin x dx.$$

Wir haben:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x d \arcsin x \quad \text{(partielle Integration)}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{(Substitution } u = 1 - x^2\text{)}$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du \quad \text{(Grundintegral)}$$

$$= x \arcsin x + u^{1/2} + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Somit gilt es

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

6. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

im Definitionsbereich $x \in (0,1)$. Es ist nicht offensichtlich, welche Substitution y = u(x) zu benutzen. Versuchen wir

$$y = \sqrt{x}$$
.

Da $x = y^2$ (wobei $y \in (0,1)$) so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{d(y^2)}{\sqrt{y^2(1-y^2)}} = \int \frac{2ydy}{y\sqrt{1-y^2}}$$
$$= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\arcsin y + C$$
$$= 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

$$2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$$

woraus folgt

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

Ersetzen x durch x/2 ergibt (10.10).

¹In der Tat gilt

7. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}$$

mit Hilfe von Substitution $y = e^x$, d.h. $x = \ln y$ wobei y > 0. Wir erhalten

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{d\ln y}{y + 1} = \int \frac{dy}{y(y + 1)}$$
$$= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + 1}\right) dy$$
$$= \ln y - \ln(y + 1) + C$$
$$= x - \ln(e^x + 1) + C.$$

In den beiden letzten Beispielen haben wir tatsächlich die *inverse Substitution* x = v(y) benutzt. Man kann das immer machen, vorausgesetzt, dass v eine invertierbare differenzierbare² Funktion ist, so dass x = v(y) äquivalent zur Substitution $y = v^{-1}(x)$ ist.

8. Bestimmen wir

$$\int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Man kann es mit Hilfe von partieller Integration berechnen (Aufgabe 42), aber wir machen es mit Hilfe von der inversen Substitution. Da in diesem Integral $x \in [-1, 1]$, so wählen wir die Substitution $x = \sin y$ mit $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ so dass sin invertierbar ist und $y = \arcsin x$. Dann erhalten wir

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - \sin^2 y} d\sin y$$

$$= \int \cos y (\cos y dy)$$

$$= \int \cos^2 y dy = \int \frac{1 + \cos 2y}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y + C$$

$$= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin y \cos y + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + C.$$

Wir haben benutzt dass $\cos y \ge 0$ für $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Somit ist die Antwort

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$$

²Hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit einer differenzierbaren Funktion f auf einem Intervall J ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ (Aufgabe 8)

10.5 Integration von rationalen Funktionen

Eine Funktion f heißt rational falls f als Quotient zweier Polynome darstellbar ist, d.h.

$$f\left(x\right) = \frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)},$$

wobei P(x) und Q(x) Polynome mit reellwertigen Koeffizienten sind. Der Definitionsbereich von f ist jedes Intervall wo Q(x) nicht verschwindet, insbesondere, jedes Intervall zwischen aufeinanderfolgenden reellen Nullstellen von Q(x).

Die rationalen Funktionen lassen sich immer in elementaren Funktionen integrieren. Das Verfahren von Berechnung des Integrals

$$\int f(x) \, dx$$

besteht aus drei Schritten.

(i) Faktorisieren den Nenner Q(x) in Produkt von linearen und quadratischen Funktionen wie folgt:

$$Q(x) = \alpha (x - r_1)^{k_1} \dots (x - r_l)^{k_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_n x + q_n)^{m_n}, \quad (10.11)$$

wobei $l, n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha, r_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $k_i, m_j \in \mathbb{N}$, wobei die quadratische Polynome $x^2 + p_j x + q_j$ keine reelle Nullstelle haben. Darüber hinaus alle Zahlen r_i sind verschieden und die Paaren (p_j, q_j) sind auch verschieden³. Die Zahl k_i heißt die Vielfachheit von $(x - r_i)$ und m_j – die Vielfachheit von $(x^2 + p_j x + q_j)$.

(ii) Zerlegen der Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ in die Summe von einem Polynom und einigen $Partialbr\"{u}chen$ der Form

$$\frac{a}{(x-r)^k}, \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}.$$
 (10.12)

Jeder lineare Faktor $(x-r_i)^{k_i}$ in (10.11) trägt zu solcher Zerlegung von f(x) eine Summe

$$\frac{a_1}{(x-r_i)} + \frac{a_2}{(x-r_i)^2} + \dots + \frac{a_{k_i}}{(x-r_i)^{k_i}}$$

bei, und jeder quadratische Faktor $(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}$ in (10.11) trägt zu f(x) eine Summe

$$\frac{b_1x + c_1}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{b_2x + c_2}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{b_2x + c_2}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}}$$

bei. Somit gilt

$$f(x) = R(x) + \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{a_{i1}}{(x - r_i)} + \frac{a_{i2}}{(x - r_i)^2} + \dots + \frac{a_{ik_i}}{(x - r_i)^{k_i}} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{b_{j1}x + c_{j1}}{(x^2 + p_jx + q_j)} + \dots + \frac{b_{jm_j}x + c_{jm_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}} \right), \quad (10.13)$$

³Existenz der Faktorisierung (10.11) für beliebiges Polynom folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, aber wir brauchen solchen Darstellung nur für einige Beispiele wo sie fast offensichtlich ist.

wobei R(x) ein Polynom ist, r_i, p_j, q_j, k_i, m_j sind wie in (10.11), und $a_{ik}, b_{jm}, c_{jm} \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten a_{ik}, b_{jm}, c_{jm} müssen noch aus dieser Identität bestimmt werden⁴

(iii) Integrieren f mit Hilfe von der Partialbruchzerlegung (10.13). Integrieren von dem Polynom $R\left(x\right)$ ist offensichtlich. Die Partialbrüche lassen sich wie folgt integrieren.

Der Partialbruch erster Art $\frac{a}{(x-r)^k}$ wird nach (10.9) integriert:

$$\int \frac{a}{(x-r)^k} dx = a \int (x-r)^{-k} dx = a \begin{cases} \frac{(x-r)^{1-k}}{1-k} + C, & k \neq 1, \\ \ln|x-r| + C, & k = 1. \end{cases}$$

Integrieren den Partialbruch zweiter Art $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}$ ist schwieriger. Dafür verwenden wir die quadratische Ergänzung und stellen x^2+px+q in der Form

$$x^{2} + px + q = (x + p/2)^{2} + (q - p^{2}/4) = u^{2} + s^{2}$$

dar mit u = x + p/2 und $s = \sqrt{q - p^2/4} > 0$. Wir erhalten

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m} dx = \int \frac{b(u-p/2)+c}{(u^2+s^2)^m} du$$
$$= b \int \frac{udu}{(u^2+s^2)^m} + (c-bp/2) \int \frac{du}{(u^2+s^2)^m}.$$

Somit bleibt es die folgenden Integrale zu bestimmen:

$$\int \frac{udu}{(u^2 + s^2)^m} \text{ und } \int \frac{du}{(u^2 + s^2)^m}.$$
 (10.14)

Das erste Integral ist einfach:

$$\int \frac{udu}{(u^2 + s^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 + s^2)}{(u^2 + s^2)^m} \quad \text{(Substitution } v = u^2 + s^2\text{)}$$

$$= \frac{1}{2} \int v^{-m} dv = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{v^{1-m}}{1-m} + C, & m \neq 1, \\ \ln|v| + C, & m = 1, \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{(u^2 + s^2)^{1-m}}{1-m} + C, & m \neq 1, \\ \ln(u^2 + s^2) + C, & m = 1. \end{cases}$$

Das zweite Integral in (10.14) lässt sich per Induktion nach m berechnen. Dafür setzen wir

$$F_m(u) = \int \frac{du}{(u^2 + s^2)^m}$$

und bemerken, dass

$$F_1(u) = \int \frac{du}{u^2 + s^2} = \int \frac{du}{s^2((u/s)^2 + 1)} = \frac{1}{s} \int \frac{d(u/s)}{(u/s)^2 + 1} = \frac{1}{s} \arctan \frac{u}{s} + C,$$

 $^{^4}$ Die Existenz von Darstellung (10.13) für beliebige rationale Funktion lässt sich mit Hilfe von Division von Polynomen beweisen.

26

d.h.

$$\int \frac{du}{u^2 + s^2} = \frac{1}{s} \arctan \frac{u}{s} + C.$$

Partielle Integration von F_m ergibt

$$F_{m}(u) = \frac{u}{(u^{2} + s^{2})^{m}} - \int u d\frac{1}{(u^{2} + s^{2})^{m}}$$

$$= \frac{u}{(u^{2} + s^{2})^{m}} + 2m \int \frac{u^{2} du}{(u^{2} + s^{2})^{m+1}}$$

$$= \frac{u}{(u^{2} + s^{2})^{m}} + 2m \int \frac{u^{2} + s^{2}}{(u^{2} + s^{2})^{m+1}} du - 2ms^{2} \int \frac{du}{(u^{2} + s^{2})^{m+1}}$$

$$= \frac{u}{(u^{2} + s^{2})^{m}} + 2mF_{m} - 2ms^{2}F_{m+1}.$$

Daraus folgt die Relation zwischen F_m und F_{m+1}

$$F_{m+1} = \frac{1}{2ms^2} \left(\frac{u}{(u^2 + s^2)^m} + (2m - 1) F_m \right),$$

was F_m per Induktion nach m bestimmen lässt.

Wir sehen, dass jede rationale Funktion f(x) in elementaren Funktionen integrierbar ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^3 - x}.$$

Der Nenner lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$x^{3} - x = x(x-1)(x+1)$$
.

Somit has die Funktion $\frac{1}{x^3-x}$ die folgende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1},$$
 (10.15)

wobei die Koeffizienten a, b, c noch bestimmt werden sollen. Diese Identität gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. Um a zu bestimmen, multiplizieren wir (10.15) mit x:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = a + x \left(\frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}\right)$$
 (10.16)

und bemerken, dass diese Identität für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ gilt, genau wie (10.15). Aber die beiden Seiten von (10.16) sind auch für x = 0 definiert. Nach der Stetigkeit der beiden Seiten von (10.16) gilt die Gleichheit (10.16) auch in x = 0. Setzen wir in (10.16) x = 0 ein und erhalten

$$a = -1$$
.

Analog ergibt Multiplizieren von (10.15) mit x-1 die folgende Identität

$$\frac{1}{x(x+1)} = b + (x-1)\left(\frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}\right),$$

und für x = 1 erhalten wir

$$b = \frac{1}{2}.$$

Multiplizieren von (10.15) mit x + 1 ergibt

$$\frac{1}{x(x-1)} = c + (x+1)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}\right),$$

woraus für x = -1 folgt

$$c = \frac{1}{2}.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1}$$

und

$$\int \frac{dx}{x^3 - x} = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x - 1| + \frac{1}{2}\ln|x + 1| + C.$$

2. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2 \left(x^2+1\right)}.$$

Die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}$ hat die Form

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{bx+c}{x^2+1},$$
 (10.17)

wobei die Koeffizienten a_i, b, c noch bestimmt werden sollen. Multiplizieren diese Identität mit $(x-1)^2$ ergibt

$$\frac{1}{x^2+1} = a_2 + a_1 (x-1) + (x-1)^2 g(x),$$

wobei $g(x) = \frac{bx+c}{x^2+1}$. Für x = 1 erhalten wir

$$a_2 = \frac{1}{2}.$$

Subtrahieren aus (10.17) das Glied $\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2}$ ergibt

$$\left(\frac{1}{(x^2+1)} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{a_1}{x-1} + g(x)
-\frac{1}{2} \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{a_1}{x-1} + g(x)
-\frac{1}{2} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{a_1}{x-1} + g(x).$$
(10.18)

Multiplizieren mit x-1 ergibt

$$-\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1} = a_1 + (x-1)g(x),$$

woraus für x = 1 folgt

$$a_1 = -\frac{1}{2}.$$

Einsetzen von a_1 in (10.18) lässt uns g(x) bestimmen wie folgt:

$$g(x) = -\frac{1}{2} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{x^2+1-(x+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1},$$

so dass g(x) wirklich die Form $\frac{bx+c}{x^2+1}$ mit $b=\frac{1}{2}$ und c=0 hat. Somit erhalten wir die folgende Partialbruchzerlegung von f:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}.$$

Jetzt können wir jedes Glied von f(x) integrieren:

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C,$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C,$$

woraus folgt

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + C.$$

3. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 2x + 5\right)^2}.$$

Das Polynom $x^2 + 2x + 5$ hat keine Nullstelle, und somit ist die Funktion $\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}$ schon ein Partialbruch zweiter Art. Wir haben

$$x^{2} + 2x + 5 = (x+1)^{2} + 4,$$

und mit Substitution u = x + 1 erhalten wir

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \int \frac{du}{(u^2 + 4)^2}.$$

Zuerst berechnen wir

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(u/2)}{(u/2)^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} + C.$$

31.10.18

Partielle Integration ergibt

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{u}{u^2 + 4} - \int u d\frac{1}{u^2 + 4}$$

$$= \frac{u}{u^2 + 4} + \int u \frac{2u}{(u^2 + 4)^2} du$$

$$= \frac{u}{u^2 + 4} + 2 \int \frac{u^2 + 4 - 4}{(u^2 + 4)^2} du$$

$$= \frac{u}{u^2 + 4} + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4} - 8 \int \frac{du}{(u^2 + 4)^2}.$$

Daraus folgt, dass

$$8\int \frac{1}{(u^2+4)^2}du = \frac{u}{u^2+4} + \int \frac{1}{u^2+4}du = \frac{u}{u^2+4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + C,$$

und somit

$$\int \frac{1}{(u^2+4)^2} du = \frac{u}{8(u^2+4)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{u}{2} + C,$$

und

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \frac{x + 1}{8(x^2 + 2x + 5)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x + 1}{2} + C.$$

In allen Fällen oberhalb gilt deg $P < \deg Q$, so dass das Polynom R in der Zerlegung (10.13) verschwindet. Im Fall deg $P \ge \deg Q$ bekommt man in der Zerlegung (10.13) ein nicht-triviales Polynom R(x) indem man zunächst P durch Q mit Rest dividiert:

$$P = QR + \widetilde{P},$$

wobei $\deg \widetilde{P} < \deg Q$. Es folgt

$$\frac{P}{Q} = R + \frac{\widetilde{P}}{Q},$$

und weiter zerlegt man $\frac{\tilde{P}}{O}$ in Partialbrüche wie oberhalb.

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{x^9 - 2}{x^4 - 1} dx.$$

Zunächst dividieren wir x^9-2 durch x^4-1 mit Rest:

$$x^{9}-2 = x^{5}(x^{4}-1) + x^{5}-2$$

$$= x^{5}(x^{4}-1) + x(x^{4}-1) + x-2$$

$$= (x^{5}+x)(x^{4}-1) + x-2$$

so dass

$$\frac{x^9 - 2}{x^4 - 1} = x^5 + x + \frac{x - 2}{x^4 - 1}.$$

Weiter zerlegen wir die Funktion $\frac{x-2}{x^4-1}$ in Partialbrüche. Der Nenner lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$x^{4} - 1 = (x^{2} - 1)(x^{2} + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^{2} + 1)$$

so dass

$$\frac{x-2}{x^4-1} = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Multiplizieren mit x - 1 und Einsetzen x = 1 ergibt:

$$a_1 = \frac{x-2}{(x+1)(x^2+1)}\Big|_{x=1} = -\frac{1}{4}.$$

Multiplizieren mit x + 1 und Einsetzen x = -1 ergibt:

$$a_2 = \frac{x-2}{(x-1)(x^2+1)}\bigg|_{x=-1} = \frac{3}{4}.$$

Es folgt

$$\frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{x+1}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{x-2}{x^2+1}$$

so dass

$$\frac{x-2}{x^4-1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{x-2}{x^2+1}.$$

Wir erhalten

$$\int \frac{x^9 - 2}{x^4 - 1} dx = \int (x^5 + x) dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{x - 2}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{3}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{3}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \arctan x + C.$$

Chapter 11

Integralrechnung: bestimmtes Integral

11.1 Riemann-Integral

Sei f(x) eine Funktion auf einem Intervall [a,b] wobei $a,b \in \mathbb{R}$ und a < b. Wir definieren hier den Begriff von bestimmten Integral

$$\int_{a}^{b} f(x) dx. \tag{11.1}$$

Das ist eine reelle Zahl, die man als der Flächeninhalt unter dem Graph der Funktion f betrachten kann. Das Verfahren für Definition des bestimmten Integrale wurde von Riemann eingeführt. Somit heißt das Integral (11.1) auch Riemann-Integral oder Riemannsches Integral.

Definition. Eine Zerlegung von dem Intervall [a, b] ist jede endliche streng monoton steigende Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$ und $x_n = b$, d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Wir bezeichnen eine Zerlegung mit Z, d.h. Z ist die ganze Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$ wie oberhalb.

Gegeben sei eine Zerlegung Z von [a,b], betrachten wir noch eine Folge $\xi=\{\xi_k\}_{k=1}^n$ von Zahlen ξ_k mit $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$. Dann heißen ξ_k die Zwischenstellen von Z

Definition. Für jede Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ und für jede Zerlegung Z von [a,b] mit den Zwischenstellen ξ definieren wir die *Riemann-Summe* mit

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

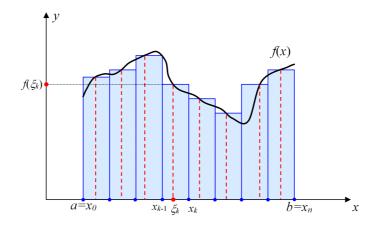
wobei

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}.$$

Geometrische Bedeutung der Summe $S(f,Z,\xi)$ ist wie folgt. Ist f auf [a,b] nichtnegative, so heißt die folgende Menge

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x) \right\}$$

der *Untergraph* von f. Die Riemann-Summe $S(f, Z, \zeta)$ ist gleich die Summe von Flächeninhalten von Rechtecken mit der Basis $[x_{k-1}, x_k]$ und der Höhe $f(\xi_k)$, was eine Annäherung von dem Flächeninhalt des Untergraphes von f(x) ist.



Der Approximationsfehler dieser Annäherung wird fallen wenn die Feinheit der Zerlegung gegen 0 geht. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ definieren wir die Feinheit von Z mit

$$\varphi\left(Z\right) = \max_{1 \le k \le n} \left\{ \Delta x_k \right\}.$$

Der Grenzwert von Riemann-Summen $S(f, Z, \xi)$ für $\varphi(Z) \to 0$ wird wie folgt definiert.

Definition. Wir schreiben

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S\left(f, Z, \xi\right) = A$$

mit einem $A \in \mathbb{R}$, fall für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für jede Zerlegung Z mit $\varphi(Z) < \delta$ und für jede Folge ξ von Zwischenstellen von Z gilt

$$|S(f,Z,\xi)-A|<\varepsilon.$$

Definition. Eine Funktion f auf [a,b] heißt Riemann-integrierbar falls der Grenzwert

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S\left(f, Z, \xi\right)$$

existiert. Der Wert des Grenzwertes heißt das Riemann-Integral (=bestimmtes Integral) von f und wird mit

$$\int_{a}^{b} f(x) dx$$

bezeichnet.

In anderen Wörtern, wir haben nach Definition

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{\varphi(Z) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k}) \Delta x_{k}, \qquad (11.2)$$

vorausgesetzt, dass lim existiert. Die Notation $\int_a^b f(x) dx$ wurde von Leibniz vorgeschlagen und bezieht sich auf die Summe $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$. Die Zahlen a und b heißen untere bzw obere Grenzen des Integrals $\int_a^b f(x) dx$.

Für nichtnegative Funktion f heißt der Wert von $\int_a^b f(x) dx$ auch der Flächeninhalt des Untergraphes von f.

Die folgenden Fragen werden in diesem Kapitel behandelt werden:

- 1. Wie bestimmt man den Wert von Riemann-Integral? Insbesondere welche Beziehung gibt es zum unbestimmten Integral $\int f(x) dx$?
- 2. Wie lässt sich das Riemann-Integral verwenden?

Wir fangen mit zwei Beispielen an.

Beispiel. 1. Sei $f(x) \equiv c$ eine Konstantefunktion. Dann ist f Riemann-integrierbar da für jede Zerlegung Z mit Zwischenstellen ξ gilt

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = c \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c (b - a)$$

und somit der Grenzwert in (11.2) existiert und ist gleich c(b-a), d.h.

$$\int_{a}^{b} c dx = c \left(b - a \right). \tag{11.3}$$

Da der Untergraph von f der Rechteck $[a,b] \times [0,c]$ ist, so beschließen wir, dass der Flächeninhalt dieses Rechteckes gleich c(b-a) ist, wie erwartet.

2. Sei f die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
 (11.4)

Zeigen wir, dass f auf jedem Intervall [a,b] nicht Riemann-integrierbar ist. Gegeben sei eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$, wählen wir alle Zwischenstellen ξ_k irrational. Dann gilt $f(\xi_k) = 0$ und somit

$$S(f, Z, \xi) = 0.$$

Andererseits, für die gleiche Zerlegung wählen wir jetzt die anderen Zwischenstellen ξ_k so dass ξ_k rational sind. Dann gilt $f(\xi_k) = 1$ und somit

$$S(f, Z, \xi) = b - a.$$

Wir sehen, dass $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi)$ nicht existiert.

11.2 Darboux-Integrierbarkeit

Gegeben sei eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z von [a,b], definieren wir die *obere Darboux-Summe* von f und Z mit

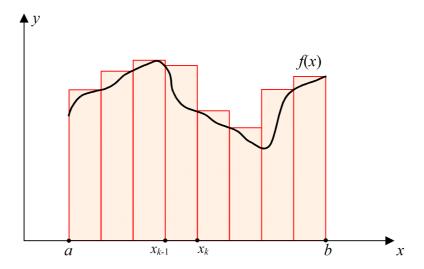
$$S^* (f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f) \Delta x_k$$

und die untere Darboux-Summe mit

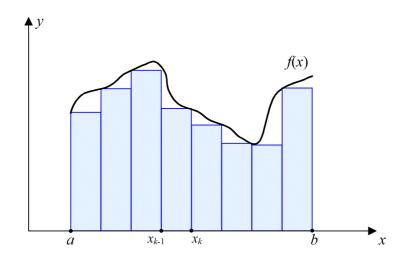
$$S_*(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f) \Delta x_k.$$

Bemerken wir, dass $S^*(f, Z)$ Element von $(-\infty, +\infty]$ ist und $S_*(f, Z)$ Element von $[-\infty, +\infty)$ ist.

Die Darboux-Summen brauchen keine Zwischenstellen. Die obere Summe S^* (f, Z) ist die Summe von den Flächeninhalten von Rechtecken, die den Untergraph von f überdecken:



und die untere Summe $S_*(f, Z)$ ist die Summe von den Flächeninhalten von Rechtecken, die im Untergraph enthalten werden:



Da für jede Zwischenstelle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt

$$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \le f(\xi_k) \le \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f,$$

so erhalten wir, dass für jeder Wahl Zwischenstellen ξ von Z gilt

$$S_*(f, Z) \le S(f, Z, \xi) \le S^*(f, Z)$$
. (11.5)

Definition. Funktion f heißt Darboux-integrierbar wenn

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^* \left(f, Z \right) - S_* \left(f, Z \right) \right) = 0, \tag{11.6}$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall Z \ \text{mit} \ \varphi(Z) < \delta \ \text{gilt} \ |S^*(f, Z) - S_*(f, Z)| < \varepsilon.$$

Beispiel. Für die Dirichlet-Funktion (11.4) gilt auf jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$

$$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = 1 \text{ und } \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = 0$$

woraus folgt

$$S^*(f, Z) = b - a$$
 und $S_*(f, Z) = 0$.

Die Bedingung (11.6) ist somit nicht erfüllt und f ist nicht Darboux-integrierbar.

Satz 11.1 Sei f eine Funktion auf [a,b]. Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:

- (a) Funktion f ist Riemann-integrierbar.
- (b) Funktion f ist Darboux-integrierbar.
- (c) Die Grenzwerte $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z)$ und $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z)$ existieren (in \mathbb{R}) und sind gleich.

Darüber hinaus unter jeder von Bedingungen (a), (b), (c) gelten die Identitäten:

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^* (f, Z) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S_* (f, Z) = \int_a^b f(x) \, dx = \sup_Z S_* (f, Z) = \inf_Z S^* (f, Z).$$
(11.7)

Definition. Die Funktion f heißt integrierbar fall f eine (\Leftrightarrow jede) von den Bedingungen (a), (b), (c) erfüllt ist.

Beweis. $(a) \Rightarrow (c)$ Setzen wir

$$A = \int_{a}^{b} f(x) \, dx$$

02.11.2018

ein. Nach Definition gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \text{so dass für jede Zerlegung} \; Z = \{x_k\}_{k=0}^n \; \text{mit } \varphi(Z) < \delta \; \text{und für jede Folge von Zwischenstellen} \; \xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n \; \text{gilt}$

$$A - \varepsilon < S(f, Z, \xi) < A + \varepsilon.$$

 Da^1

$$S^{*}(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\substack{\xi_{k} \in [x_{k-1}, x_{k}] \\ 1 \le k \le n}} f(\xi_{k}) (x_{k} - x_{k-1})$$

$$= \sup_{\substack{\xi_{k} \in [x_{k-1}, x_{k}] \\ 1 \le k \le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k}) (x_{k} - x_{k-1})$$

$$= \sup_{\xi} S(f, Z, \xi)$$

und analog

$$S_* (f, Z) = \inf_{\xi} S (f, Z, \xi),$$

so erhalten wir

$$A - \varepsilon \le S_*(f, Z) \le S^*(f, Z) \le A + \varepsilon.$$

und somit

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*\left(f,Z\right) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*\left(f,Z\right) = A. \tag{11.8}$$

Somit haben wir sowohl die Aussage (c) als auch die beiden linken Identitäten in (11.7) bewiesen.

 $(c) \Rightarrow (b)$ Trivial: gilt

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*\left(f,Z\right) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*\left(f,Z\right),$$

so gilt auch

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^* \left(f, Z \right) - S_* \left(f, Z \right) \right) = 0.$$

 $(b)\Rightarrow(a)$ Für zwei Zerlegungen Z und Z' von [a,b] schreiben wir $Z'\subset Z$ falls Z' als Menge eine Teilmenge von Z ist. Man sagt, dass Z eine Verfeinerung von Z' ist.

Behauptung 1. Falls $Z' \subset Z$, dann gelten die Ungleichungen

$$S^*\left(f,Z\right) \le S^*\left(f,Z'\right)$$

und

$$S_*(f, Z) \ge S_*(f, Z')$$
.

D.h. die obere Summe fällt nach Verfeinerung und die untere Summe steigt.

$$\sup (A_1 + ... + A_n) = \sup A_1 + ... + \sup A_n$$
.

 $^{^1 \}text{Wir}$ benutzen dass für beliebige Teilmengen $A_1,...,A_n$ von $\mathbb R$ gilt

Seien $Z = \{x_i\}_{i=0}^n$ und $Z' = \{y_k\}_{k=0}^N$. Da $Z' \subset Z$, jedes Intervall $[y_{k-1}, y_k]$ von Z' stimmt mit einem Intervall $[x_l, x_m]$ überein so dass

$$y_{k-1} = x_l < x_{l+1} < \dots < x_m = y_k.$$

Daraus folgt, dass

$$(\sup_{[y_{k-1},y_k]} f) (y_k - y_{k-1}) = \sum_{i=l+1}^m (\sup_{[y_{k-1},y_k]} f) (x_i - x_{i-1})$$

$$\geq \sum_{i=l+1}^m (\sup_{[x_{i-1},x_i]} f) (x_i - x_{i-1}) .$$

Addieren solche Ungleichungen für alle k ergibt $S^*(f, Z') \geq S^*(f, Z)$. Die Ungleichung für S_* wird analog bewiesen.

Behauptung 2. Für beliebige zwei Zerlegungen Z' und Z'' von [a,b] gilt

$$S_*(f, Z') \le S^*(f, Z'')$$
. (11.9)

Die Vereinigung $Z = Z' \cup Z''$ ist auch eine Zerlegung von [a, b]. Da $Z' \subset Z$ und $Z'' \subset Z$, so erhalten wir nach Behauptung 1 und (11.5), dass

$$S_*(f, Z') \le S_*(f, Z) \le S^*(f, Z) \le S^*(f, Z'')$$

woraus (11.9) folgt.

Jetzt beweisen wir, dass eine Darboux-integrierbare Funktion f auch Riemann-integrierbar ist. Setzen wir

$$A = \sup_{Z} S_*(f, Z) \text{ und } B = \inf_{Z} S^*(f, Z)$$
 (11.10)

ein. Es folgt aus der Behauptung 2, dass

$$A \le B. \tag{11.11}$$

Nach (11.10) und (11.11) gilt

$$S_*(f, Z) \le A \le B \le S^*(f, Z)$$
. (11.12)

Beweisen wir, dass

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi) = A = B, \tag{11.13}$$

was sowohl die Riemann-Integrierbarkeit von f als auch die beiden rechten Identitäten in (11.7) ergeben wird. Nach (11.5) gilt

$$S_*(f,Z) \leq S(f,Z,\xi) \leq S^*(f,Z)$$
.

Vergleich mit (11.12) zeigt, dass die Werte A, B und $S(f, Z, \xi)$ im gleichen Intervall $[S_*(f, Z), S^*(f, Z)]$ liegen, woraus folgt

$$|S(f, Z, \xi) - A| \le S^*(f, Z) - S_*(f, Z),$$

 $|S(f, Z, \xi) - B| \le S^*(f, Z) - S_*(f, Z).$

Da nach der Darboux-Integrabilität

$$S^*(f, Z) - S_*(f, Z) \to 0$$

für $\varphi(Z) \to 0$, so erhalten wir (11.13), was zu beweisen war.

11.3 Integrierbare Funktionen

Korollar 11.2 (Notwendige Bedingung für Integrabilität) Ist eine Funktion f auf [a,b] integrierbar, so ist f auf [a,b] beschränkt.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\sup_{[a,b]} f = +\infty$. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ gibt es ein Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ wo $\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = +\infty$, woraus folgt

$$S^*\left(f,Z\right) = +\infty.$$

Da immer $S_*(f,Z) < +\infty$, so erhalten wir

$$S^*(f, Z) - S_*(f, Z) = +\infty,$$

und f ist nicht Darboux-integrierbar. Somit muss es gelten $\sup_{[a,b]} f < +\infty$, und analog $\inf_{[a,b]} f > -\infty$, was zu beweisen war.

Der folgende Satz gibt uns viele Beispiele von integrierbaren Funktionen.

Satz 11.3 (Hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)

- (a) Jede stetige Funktion f auf [a,b] ist auf diesem Intervall integrierbar..
- (b) Jede monotone Funktion f auf [a, b] ist auf diesem Intervall integrierbar.

Für dem Beweis von (a) brauchen wir den Begriff von gleichmäßiger Stetigkeit. **Definition.** Eine Funktion f auf einem Intervall J heißt gleichmäßig stetig falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in J \ \forall y \in J \ \text{mit} \ |x - y| < \delta \ \text{gilt} \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
 (11.14)

Erinnern wir uns, dass f stetig auf J ist, falls f stetig an jeder Stelle $x \in J$, d.h. for any $x \in J$ for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\forall x \in J \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in J \ \text{mit} \ |x - y| < \delta \ \text{gilt} \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (11.15)$$

In (11.15) hängt δ von x ab, wobei in (11.14) δ gleich für alle x ist, was das Wort "gleichmäßig" erklärt. Offensichtlich ist jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig, aber umgekehrt gilt es nicht immer.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf (0,1) aber nicht gleichmäßig stetig. In der Tat, für jedes $\delta > 0$, wählen wir $0 < x < \delta$ und y = x/2 so dass $|x - y| < \delta$, während

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{x}$$

beliebige groß werden kann, da x beliebig nahe zum 0 gewählt werden kann.

Lemma 11.4 Ist f(x) stetig auf einem beschränkten abgeschlossen Intervall J, so ist f auf J gleichmäßig stetig.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass f auf J nicht gleichmäßig stetig ist. Die Negation von (11.14) ergibt

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in J \ \exists y \in J \ \text{mit} \ |x - y| < \delta \ \text{und} \ |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon.$$

Wählen wir $\delta = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und somit bekommen $x_n, y_n \in J$ mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \tag{11.16}$$

und

$$|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon. \tag{11.17}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.9) hat die Folge $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Nach (11.16) erhalten wir, dass auch $\{y_{n_k}\}$ konvergiert und

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} =: c \in J.$$

Nach der Stetigkeit von f erhalten wir

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c) = \lim_{k \to \infty} f(y_{n_k}),$$

was im Widerspruch zu (11.17) steht.

Beweis von Satz 11.3(a). Nach Lemma 11.4 ist die Funktion f gleichmäßig stetig auf [a, b], d.h. sie die Bedingung (11.14) erfüllt. Betrachten wir beliebige Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von [a, b] mit $\varphi(Z) < \delta$. Für jede $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt $|x - y| < \delta$ und somit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass

$$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \le \varepsilon$$

und somit

$$S^{*}(f,Z) - S_{*}(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} (\sup_{[x_{k-1},x_{k}]} f - \inf_{[x_{k-1},x_{k}]} f) (x_{k} - x_{k-1})$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_{k} - x_{k-1})$$

$$= \varepsilon (b-a).$$

Da $\varepsilon(b-a)$ beliebig klein sein kann, so erhalten

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^* \left(f, Z \right) - S_* \left(f, Z \right) \right) = 0.$$

Somit ist f Darboux-integrierbar und nach dem Satz 11.1 auch integrierbar.

Beweis von Satz 11.3(b). Sei f monoton steigend. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von [a, b] gilt

$$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k) \text{ und } \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1})$$

woraus folgt

$$S^{*}(f,Z) - S_{*}(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1},x_{k}]} f - \inf_{[x_{k-1},x_{k}]} f \right) (x_{k} - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_{k}) - f(x_{k-1}) \right) (x_{k} - x_{k-1})$$

$$\leq \varphi(Z) \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_{k}) - f(x_{k-1}) \right)$$

$$= \varphi(Z) \left(f(b) - f(a) \right).$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^* \left(f, Z \right) - S_* \left(f, Z \right) \right) = 0,$$

woraus die Integrierbarkeit von f folgt. \blacksquare

07.11.2018

11.4 Fundamentalsatz der Analysis, 1

Der nächste Satz etabliert eine Beziehung zwischen bestimmten und unbestimmten Integrale.

Hauptsatz 11.5 (Fundamentalsatz der Analysis: Newton-Leibniz-Formel) $Sei\ f\ (x)$ eine integrierbare Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall [a,b] mit a < b. $Sei\ F\ (x)$ eine $Stammfunktion\ von\ f\ auf\ diesem\ Intervall$. Dann gilt die $Identit \ddot{a}t$

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a).$$
 (11.18)

Führen wir die folgende Notation ein:

$$\left[F\right]_{a}^{b} := F\left(b\right) - F\left(a\right).$$

Da $F = \int f(x) dx$, so lässt sich die Newton-Leibniz-Formel wie folgt umschreiben:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_{a}^{b}.$$

In dieser Form liefert die Newton-Leibniz-Formel eine direkte Beziehung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen.

Man kann (11.18) auch wie folgt umschreiben:

$$\int_{a}^{b} F'(x) dx = F(b) - F(a) = [F]_{a}^{b}.$$

Insbesondere gilt diese Identität für jede stetig differenzierbare Funktion F auf [a,b], da F' stetig und somit nach dem Satz 11.3 integrierbar ist.

Beweis. Nach Definition von Riemann-Integral haben wir

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{\varphi(Z) \to 0} S(f, Z, \xi).$$

Fixieren wir eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von [a,b] und wählen die Zwischenstellen $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ wie folgt. Nach dem Mittelwertsatz, es gibt $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Für dieses ξ_k erhalten wir

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

$$= F(b) - F(a).$$

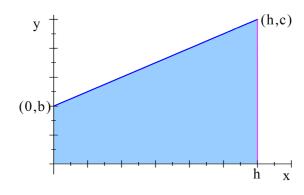
Somit muss der Grenzwert $\lim_{\varphi(Z)\to 0}S\left(f,Z,\xi\right)$ gleich $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ sein, woraus (11.18) folgt. \blacksquare

Mit Hilfe von der Newton-Leibniz-Formel kann man die Integrale $\int_a^b f(x) dx$ effektiv berechnen. Ist $f \geq 0$, so bestimmt man auf diese Weise den Flächeninhalt des Untergraphes von f.

Beispiel. 1. Der Graph der Funktion f(x) = ax + b auf dem Intervall [0, h], h > 0, ist eine Gerade zwischen den Punkten (0, b) und (h, c) wobei c = f(h) = ah + b. Es gilt

$$\int_0^h (ax+b) \, dx = \left[\int (ax+b) \, dx \right]_0^h = \left[a \frac{x^2}{2} + bx \right]_0^h = a \frac{h^2}{2} + bh = \frac{b+c}{2}h,$$

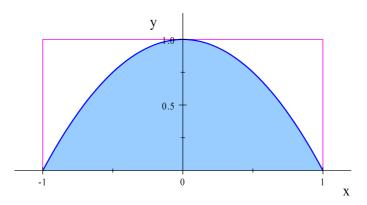
d.h. der Flächeninhalt von dem Trapez mit der Höhe h und den Grundseiten b and c ist gleich $\frac{b+c}{2}h$.



2. Für die Funktion $f(x) = 1 - x^2$ erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \left[\int (1 - x^2) dx \right]_{-1}^{1} = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Flächeninhalt zwischen der Parabel $y = 1 - x^2$ und der Achse x gleich 4/3 ist.

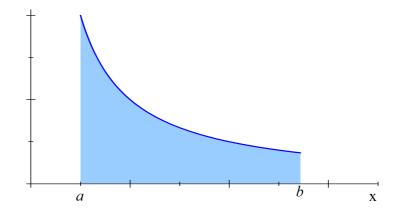


Insbesondere beträgt dieser Flächeninhalt genau 2/3 von den Flächeninhalt von dem umgeschriebenen Rechteck $[-1,1] \times [0,1]$. Diese Regel von $\frac{2}{3}$ wurde erst von Archimedes entdeckt. Er konnte den Flächeninhalt unter der Parabel direkt als der Grenzwert von Riemann-Summen berechnen, ohne Newton-Leibniz-Formel zu wissen.

3. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle 0 < a < b erhalten wir

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x} \right]_{a}^{b} = \left[\ln x \right]_{a}^{b} = \ln \frac{b}{a}. \tag{11.19}$$

Der Graph der Funktion $y=\frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel, und der Flächeninhalt unter der Hyperbel auf [a,b] ist gleich $\ln\frac{b}{a}$.



Insbesondere gilt

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x} = \ln e = 1.$$

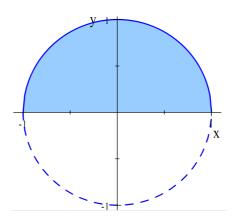
4. Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall (-1,1) ist Halbkreise. Der Flächeninhalt des Untergraphes des Halbkreises ist gleich

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arcsin 1 - \arcsin (-1) \right)$$

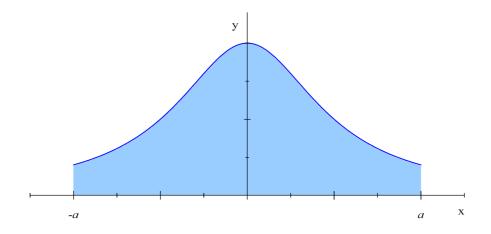
$$= \frac{1}{2} \left(\pi/2 + \pi/2 \right)$$

$$= \pi/2.$$



5. Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und a > 0 haben wir

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^{2}} = \left[\int \frac{dx}{1+x^{2}} \right]_{-a}^{a} = \left[\arctan x \right]_{-a}^{a} = 2 \arctan a.$$



Insbesondere, der Flächeninhalt des Untergraphes von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf [-1,1] ist gleich

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

11.5 Weitere Eigenschaften vom bestimmten Integral

Satz 11.6 (Linearität vom bestimmten Integral) Sind die Funktionen f und g integrierbar auf einem Intervall [a,b], so ist auch f+g integrierbar und

$$\int_{a}^{b} (f+g) dx = \int_{a}^{b} f dx + \int_{a}^{b} g dx.$$
 (11.20)

Auch für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist cf integrierbar und

$$\int_{a}^{b} (cf) dx = c \int_{a}^{b} f dx. \tag{11.21}$$

Beweis. Seien $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von [a,b] und $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ eine Folge von Zwischenstellen von Z. Dann

$$S(f+g,Z,\xi) = \sum_{k=0}^{n} (f+g)(\xi_k) \Delta x_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k$$
$$= S(f,Z,\xi) + S(g,Z,\xi).$$

Für $\varphi(Z) \to 0$ konvergiert die rechte Seite gegen

$$\int_{a}^{b} f(x) dx + \int_{a}^{b} g(x) dx.$$

Somit ist f + g Riemann-integrierbar und (11.20) gilt. Analog beweist man die Integrierbarkeit von cf und (11.21).

Satz 11.7 (Partielle Integration im bestimmten Integral) Für stetig differenzierbare Funktionen u, v auf einem Intervall [a, b] gilt

$$\int_{a}^{b} u dv = [uv]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v du.$$
 (11.22)

Beweis. Da die Funktionen uv' und vu' stetig sind, so existieren die Integrale

$$\int_{a}^{b} u dv = \int_{a}^{b} u v' dx \quad \text{und} \quad \int_{a}^{b} v du = \int_{a}^{b} v u' dx$$

nach dem Satz 11.3. Nach der Produktregel gilt

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Nach (11.20) erhalten wir

$$\int_{a}^{b} (uv)' dx = \int_{a}^{b} uv' dx + \int_{a}^{b} vu' dx = \int_{a}^{b} u dv + \int_{a}^{b} v du.$$

Andererseits, nach dem Satz 11.5 gilt

$$\int_a^b (uv)' dx = [uv]_a^b,$$

woraus (11.22) folgt. \blacksquare

Beispiel. Bestimmen wir $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$. Da $e^x dx = de^x$, so erhalten wir nach (11.22) mit $u = \cos x$ und $v = e^x$:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = [e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x d \cos x$$

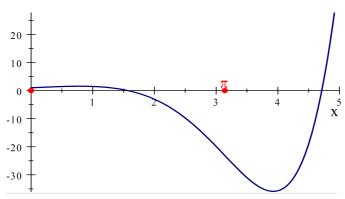
$$= -e^{\pi} - 1 + \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

$$= -(e^{\pi} + 1) + \int_0^{\pi} \sin x de^x$$

$$= -(e^{\pi} + 1) + [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx,$$

woraus folgt

$$\int_0^\pi e^x \cos x dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$



Funktion $e^x \cos x$

Alternativ kann man zunächst das unbestimmte Integral $\int e^x \cos x$ berechnen und erst danach die Newton-Leibniz-Formel anwenden.

Satz 11.8 (Additivität) Sei f eine integrierbare Funktion auf einem Intervall [a, b] mit a < b. Dann, für jedes $c \in (a, b)$, ist f auf den Intervallen [a, c] und [c, b] integrierbar und es gilt

$$\int_{a}^{b} f dx = \int_{a}^{c} f dx + \int_{c}^{b} f dx. \tag{11.23}$$

Beweis. Seien X und Y beliebige Zerlegungen von [a, c] bzw [c, b]. Dann ist $Z = X \cup Y$ eine Zerlegung von [a, b] und es gilt

$$\varphi\left(Z\right) = \max\left(\varphi\left(X\right), \varphi\left(Y\right)\right)$$

und

$$S^*(f, Z) = S^*(f, X) + S^*(f, Y). \tag{11.24}$$

Die gleiche Identität gilt für S_* . Da f auf [a,b] integrierbar ist, so haben wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^* \left(f, Z \right) - S_* \left(f, Z \right) \right) = 0. \tag{11.25}$$

Da

$$S^{*}(f,Z) - S_{*}(f,Z) = (S^{*}(f,X) - S_{*}(f,X)) + (S^{*}(f,Y) - S_{*}(f,Y)),$$

daraus folgt, dass

$$\lim_{\varphi(X)\to 0} \left(S^*\left(f,X\right) - S_*\left(f,X\right) \right) = 0 = \lim_{\varphi(Y)\to 0} \left(S^*\left(f,Y\right) - S_*\left(f,Y\right) \right).$$

Somit ist f integrierbar auf [a, c] und [c, b]. Für $\varphi(Z) \to 0$ erhalten wir aus (11.7) und (11.24)

$$\int_{a}^{b} f dx = \lim_{\varphi(Z) \to 0} S^{*}(f, Z) = \lim_{\varphi(X) \to 0} S^{*}(f, X) + \lim_{\varphi(Y) \to 0} S^{*}(f, Y)$$
$$= \int_{a}^{c} f dx + \int_{c}^{b} f dx,$$

was zu beweisen war.

Sei f eine integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall J. Nach dem Satz 11.8 ist f auch auf jedem kompakten Teilintervall von J integrierbar, d.h. $\int_a^b f(x) \, dx$ ist für alle $a, b \in J$, a < b, definiert. Erweitern wir die Definition von Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ für beliebige $a, b \in J$ wie folgt: im Fall a > b setzen wir

$$\int_{a}^{b} f(x) dx := -\int_{b}^{a} f(x) dx,$$
(11.26)

und im Fall a = b:

$$\int_{a}^{a} f(x) dx := 0.$$
 (11.27)

Die Newton-Leibniz-Formel gilt dann für beliebige $a,b\in J$: ist F eine Stammfunktion von f auf J, so gilt für alle $a,b\in J$

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = [F]_{a}^{b} := F(b) - F(a).$$

Im Fall a < b wurde diese Identität im Satz 11.5 bewiesen. Im Fall a = b sind die beiden Seiten gleich 0. Im Fall a > b gilt

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = -\int_{b}^{a} f(x) dx = -[F]_{b}^{a} = [F]_{a}^{b}.$$

Korollar 11.9 Sei f eine integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall J. Dann für alle $a, b, c \in J$ gilt (11.23).

Beweis. Für c=a oder c=b gilt (11.23) trivial nach (11.27). Für a=b ist (11.23) äquivalent zu

$$0 = \int_{a}^{c} f dx + \int_{c}^{a} f dx,$$

was nach (11.26) gilt. Seien jetzt a, b, c verschieden. Dann gibt es 6 Fälle wie folgt:

- 1. a < c < b
- 2. a < b < c
- 3. b < a < c
- 4. b < c < a
- 5. c < a < b
- 6. c < b < a

Im Fall a < c < b gilt (11.23) nach Satz 11.8. Im Fall a < b < c haben wir nach dem Satz 11.8

$$\int_{a}^{c} f dx = \int_{a}^{b} f dx + \int_{b}^{c} f dx,$$

woraus folgt

$$\int_{a}^{b} f dx = \int_{a}^{c} f dx - \int_{b}^{c} f dx = \int_{a}^{c} f dx + \int_{c}^{b} f dx.$$

Die anderen Fälle werden analog betrachtet.

11.6 Integration und Ungleichungen

Satz 11.10 Seien f und g integrierbare Funktionen auch einem Intervall [a, b], a < b.

(a) (Monotonie) Gilt $f \ge g$ auf [a, b] so gilt auch

$$\int_{a}^{b} f dx \ge \int_{a}^{b} g dx. \tag{11.28}$$

(b) (LM-Ungleichung) Es gilt

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f dx \le (b-a)\sup_{[a,b]} f.$$
 (11.29)

Beweis. (a) Für die Riemann-Summen haben wir

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \ge \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = S(g, Z, \xi).$$

Für $\varphi(Z) \to 0$ erhalten wir somit auch (11.28).

(a) Sei $M = \sup_{[a,b]} f$. Dann $f \leq M$ auf [a,b], und nach (a) erhalten wir

$$\int_{a}^{b} f dx \le \int_{a}^{b} M dx = M (b - a),$$

Die untere Abschätzung wird analog bewiesen. ■

Insbesondere erhalten wir: $f \ge 0$ impliziert $\int_a^b f dx \ge 0$, und $f \le 0$ impliziert $\int_a^b f dx \le 0$.

09.11.18

Korollar 11.11 Sei a < b und sei f eine stetige Funktion auf [a, b]. Dann gilt

$$\left| \int_{a}^{b} f dx \right| \le \int_{a}^{b} |f| \, dx. \tag{11.30}$$

Beweis. Nach dem Satz 11.3 sind f und |f| integrierbar. Da

$$-|f| \le f \le |f|$$
,

so erhalten wir nach dem Satz 11.10

$$-\int_a^b |f| \, dx \le \int_a^b f dx \le \int_a^b |f| \, dx,$$

woraus (11.30) folgt.

Bemerkung. Es gilt eine stärkere Aussage: ist f auf [a,b] integrierbar so ist |f| auch integrierbar und (11.30) gilt.

Satz 11.12 (Mittelwertsatz für Integration) Ist f stetig auf [a, b], a < b, so existiert $ein \xi \in [a, b]$ mit

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = f(\xi) (b - a).$$
 (11.31)

Beweis. Setzen wir

$$m = \inf_{[a,b]} f$$
 und $M = \sup_{[a,b]} f$.

Nach dem Extremwertsatz und Korollar 7.10 ist das Bild f([a, b]) gleich das Intervall [m, M]. Da nach (11.29)

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx \leq M,$$

so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f dx,$$

woraus (11.31) folgt. \blacksquare

11.7 Fundamentalsatz der Analysis, 2

Hauptsatz 11.13 (Fundamentalsatz der Analysis: Existenz der Stammfunktion) Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Dann für jedes $c \in J$ ist die Funktion

$$F\left(x\right) = \int_{c}^{x} f\left(t\right) dt$$

 $eine\ Stammfunktion\ von\ f\ auf\ J.\ Insbesondere\ hat\ jede\ stetige\ Funktion\ eine\ Stammfunktion.$

Somit wird auch der Satz 10.1 bewiesen.

Beweis. Da f stetig ist, so ist f nach dem Satz 11.3 integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von J so dass das Integral $\int_{c}^{x} f(t) dt$ wohldefiniert ist. Wir müssen beweisen, dass F'(x) = f(x) für jedes $x \in J$, d.h.

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x). \tag{11.32}$$

Nach der Additivität des Integrals gilt

$$F(y) - F(x) = \int_{c}^{y} f(t) dt - \int_{c}^{x} f(t) dt$$
$$= \int_{x}^{c} f(t) dt + \int_{c}^{y} f(t) dt$$
$$= \int_{x}^{y} f(t) dt.$$

Ist y > x so gibt es nach dem Satz 11.12 ein $\xi \in [x, y]$ mit

$$\int_{x}^{y} f(t) dt = f(\xi) (y - x).$$
 (11.33)

Ist y < x so gibt es analog ein $\xi \in [y, x]$ mit

$$\int_{y}^{x} f(t) dt = f(\xi) (x - y)$$

was wieder äquivalent zu (11.33) ist. In den beiden Fällen erhalten wir ein $\xi = \xi(y)$ zwischen x und y mit (11.33), woraus folgt

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(\xi).$$

Da $|\xi(y)-x| \leq |y-x|$ und somit $\xi(y) \to x$ für $y \to x$, so erhalten wir nach der Stetigkeit von f, dass

$$f(\xi) \to f(x)$$
 für $y \to x$,

woraus (11.32) folgt. \blacksquare

Die Sätze 11.5 und 11.13 ergeben folgendes.

Korollar 11.14 Für jede stetige Funktion f auf dem Intervall [a,b] existiert eine Stammfunktion F auf [a,b] und es gilt

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Die Existenz der Stammfunktion auf dem ganzen Intervall [a,b] ist wichtig. Hier ist ein Gegenbeispiel, wie man falsches Ergebnis erhält:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x} \right]_{-1}^{1} = \left[\ln|x| \right]_{-1}^{1} = 0.$$

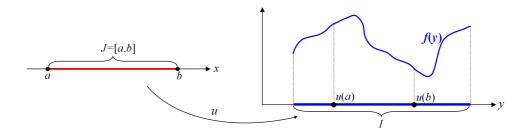
Warum ist diese Berechnung falsch? Die Stammfunktion $\ln |x|$ ist nicht auf dem ganzen Intervall [-1,1] definiert wie die Newton-Leibniz-Formel anfordert, sondern auf zwei disjunkten Intervallen $(0,+\infty)$ und $(-\infty,0)$. Somit lässt sich diese Formel für Berechnung von $\int_a^b \frac{dx}{x}$ nur dann anwenden wenn entweder $[a,b] \subset (0,\infty)$ oder $[a,b] \subset (-\infty,0)$. Darüber hinaus ist die Funktion $\frac{1}{x}$ auf [-1,1] nicht Riemannintegrierbar, da diese Funktion unbeschränkt ist.

11.8 Substitutionsregel

Satz 11.15 (Substitutions regel im bestimmten Integral) Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall I und $u: J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J = [a, b] mit a < b so dass die Komposition f(u(x)) auf [a, b] definiert ist. Dann gilt

$$\int_{a}^{b} f(u(x)) du(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y) dy.$$
 (11.34)

Die Identität (11.34) lässt sich als eine Substitution y = u(x) betrachten. Im Unterschied zur Substitutionsregel für unbestimmtes Integral soll man die Substitution auch in den Grenzen der Integration durchführen.



Beweis. Da f auf I stetig ist, so hat f nach dem Satz 11.13 eine Stammfunktion F im I, d.h.

$$\int f(y) \, dy = F(y) + C.$$

Nach dem Satz 10.5 gilt²

$$\int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C.$$
(11.35)

Nach der Newton-Leibniz-Formel des Satzes 11.5 gelten die Identitäten

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y) \, dy = \left[\int f(y) \, dy \right]_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a))$$
 (11.36)

$$F(u(x))' = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x).$$

²Man kann die Identität (11.35) auch direkt aus der Kettenregel erhalten, da

und

$$\int_{a}^{b} f(u(x)) du(x) = \left[\int f(u(x)) du(x) \right]_{a}^{b} = \left[F(u(x)) \right]_{a}^{b} = F(u(b)) - F(u(a)).$$
(11.37)

Vergleichen von (11.36) und (11.37) ergibt (11.34).

Der Satz 10.5 gilt auch für integrierbare Funktionen f, aber der Beweis in diesem Fall ist deutlich komplizierter.

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1}$. Wir haben

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{e^{x} - 1} = \int_{1}^{2} \frac{e^{x} dx}{e^{x} (e^{x} - 1)} = \int_{1}^{2} \frac{de^{x}}{e^{x} (e^{x} - 1)},$$

und die Substitution $y = u(x) = e^x$ ergibt

$$\begin{split} \int_{1}^{2} \frac{dx}{e^{x} - 1} &= \int_{u(1)}^{u(2)} \frac{dy}{y(y - 1)} \\ &= \int_{e}^{e^{2}} \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y}\right) dy \\ &= \left[\ln (y - 1)\right]_{e}^{e^{2}} - \left[\ln y\right]_{e}^{e^{2}} \\ &= \ln \frac{e^{2} - 1}{e - 1} - 1 = \ln (e + 1) - \ln e = \ln (1 + e^{-1}) \,. \end{split}$$

2. Bestimmen wir $\int_0^{5\pi} (2 + \cos x)^2 \sin x dx$. Wir erhalten mit Hilfe von der Substitution $y = u(x) = 2 + \cos x$:

$$\int_0^{5\pi} (2 + \cos x)^2 \sin x dx = -\int_0^{5\pi} (2 + \cos x)^2 d(2 + \cos x)$$
$$= -\int_{u(0)}^{u(5\pi)} y^2 dy = -\int_3^1 y^2 dy$$
$$= \int_1^3 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

In diesem Beispiel ist die Substitution y = u(x) nicht monoton (und muss nicht monoton sein).

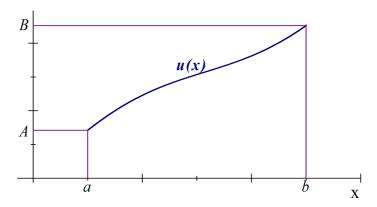
Korollar 11.16 (Inverse Substitution) Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall I = [A, B] mit A < B und $u : J \to I$ eine streng monotone stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit u(J) = I. Dann gilt

$$\int_{A}^{B} f(x) dx = \int_{u^{-1}(A)}^{u^{-1}(B)} f(u(t)) du(t).$$
 (11.38)

Man betrachtet die Identität (11.38) als die inverse Substitution $x=u\left(t\right)$ im bestimmten Integral.

Beweis. Die inverse Funktion u^{-1} existiert auf I nach dem Satz 7.11 (Existenz der inversen Funktion). Die Komposition f(u(t)) ist wohldefiniert, da $u(t) \in I$.

Setzen wir $a = u^{-1}(A)$ und $b = u^{-1}(B)$. Die Funktion u ist entweder streng monoton steigend oder fallend. Sei u steigend, dann a < b und J = [a, b].



Dann gilt nach der Substitutionsregel (11.34)

$$\int_{a}^{b} f(u(x)) du(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y) dy = \int_{A}^{B} f(y) dy.$$

Es bleibt nur die Integrationsvariablen x und y in t bzw x umbenennen. Im Fall von fallender Funktion u gilt a > b und somit J = [b, a], woraus folgt

$$\int_{a}^{b} f(u(x)) du(x) = -\int_{b}^{a} f(u(x)) du(x) = -\int_{u(b)}^{u(a)} f(y) dy$$
$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(y) dy = \int_{A}^{B} f(y) dy.$$

Beispiel. Bestimmen wir $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Verwenden wir die Substitution $x = \sin t$ mit $t \in [0, \pi/2]$, d.h. $t = \arcsin x$. Dann gilt

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^{2}} dx = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1 - \sin^{2} t} d \sin t$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^{2} t} \cos t dt$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2} t dt$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} [\sin 2t]_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Natürlich erhält man die gleiche Antwort mit Hilfe von dem unbestimmten Integral

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$$

und der Newton-Leibniz-Formel.

11.9 Länge von Kurve

Wir betrachten hier die Kurven in

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

Elemente von \mathbb{R}^n sind die Folgen

$$x = \{x_k\}_{k=1}^n = (x_1, ..., x_n)$$

von n reellen Zahlen. Die Zahlen x_k heißen die Komponenten (oder Koordinaten) von x, die Folgen x heißen auch Punkte oder Vektoren.

Die Menge \mathbb{R}^n heißt der *n-dimensionale Koordinatenvektorraum*. Der physikalische Raum ist 3-dimensional, aber in Anwendungen braucht man auch höherdimensionale Räume die nicht unbedingt physikalisch sind. Zum Beispiel, jede Folge $(x_1, ..., x_n)$ kann Ergebnisse von bestimmten Messungen enthalten, wo die Anzahl n beliebig gross sein kann.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir der Betrag |x| von x (wird auch die *Norm* genannt) wie folgt:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Zum Beispiel, die Elemente von \mathbb{R}^2 sind die Paare $x=(x_1,x_2)$, und der Betrag von x ist

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

was mit dem Betrag von komplexen Zahlen übereinstimmt. Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt |x - y| der Abstand zwischen x und y.

Sei J ein Intervall in \mathbb{R} . Jede Abbildung $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ hat der Form

$$\varphi \left(t\right) =\left(\varphi _{1}\left(t\right) ,...,\varphi _{n}\left(t\right) \right) ,\text{ }t\in J,$$

wobei die Komponenten $\varphi_{1}\left(t\right),...,\varphi_{n}\left(t\right)$ reellwertige Funktion von $t\in J$ sind.

Die Abbildung φ heißt stetig falls alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig ist, und stetig differenzierbar falls alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig differenzierbar sind. Im letzten Fall definieren wir die Ableitung φ' von φ mit

$$\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), ..., \varphi'_n(t)),$$

so dass φ' auch eine Abbildung von J nach \mathbb{R}^n ist.

Definition. Das Bild $K = \varphi(J)$ einer stetigen Abbildung $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ heißt Kurve. Die Abbildung φ heißt die Parametrisierung der Kurve K, und das Paar (K, φ) heißt Parametrisierte Parametrisierte Parametrisierte Parameter.

14.11.18

Das Intervall J kann man als ein Zeitintervall betrachten und $\varphi(t)$ – als die Position eines bewegenden Körpers in \mathbb{R}^n um Zeit t. Die Kurve $K = \varphi(J)$ ist die Spur des Körpers. Die Parametrisierung $\varphi(t)$ lässt sich als der Stundenplan des Körpers betrachten.

Definition. Seien $J = [\alpha, \beta]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall mit $\alpha < \beta$ und $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Definieren wir die Länge $L(K, \varphi)$ der parametrisierten Kurve (K, φ) mit

$$L(K,\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'_1(t)^2 + \dots + \varphi'_n(t)^2} dt.$$
 (11.39)

Die Ableitung $\varphi'(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor des Körpers und der Betrag $|\varphi'(t)|$ ist die skalare Geschwindigkeit um Zeitpunkt t. Die Integration von $|\varphi'(t)|$ über $[\alpha, \beta]$ ergibt den ganzen zurückgelegten Weg des Körpers im Zeitintervall J, was genau die Länge der Spur $\varphi(J)$ ist.

Beispiel. Fixieren wir zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ und betrachten die Parametrisierung

$$\varphi$$
: $[0,1] \to \mathbb{R}^n$
 $\varphi(t) = (1-t)a + tb$

Das Bild $K = \varphi(J)$ ist eine gerade Strecke zwischen a und b. Dann gilt

$$\varphi' = b - a$$

und

$$L(K,\varphi) = \int_{0}^{1} |\varphi'(t)| dt = |b - a|.$$

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung

$$\varphi$$
: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
 $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t)$

wobei r>0. Das Bild $K=\varphi\left(J\right)$ ist der Kreis in \mathbb{R}^2 von Radius r und Mittelpunkt 0. Da

$$\varphi' = (-r\sin t, r\cos t)$$

und

$$|\varphi'| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r,$$

so erhalten wir

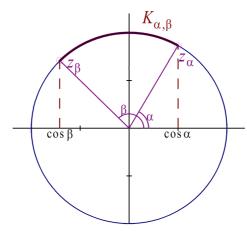
$$L\left(K,\varphi\right)=\int_{0}^{2\pi}\left|\varphi'\left(t\right)\right|dt=\int_{0}^{2\pi}rdt=2\pi r.$$

Fixieren wir zwei Punkte $z_{\alpha} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ und $z_{\beta} = r(\cos \beta + i \sin \beta)$ auf dem Kreis K wobei $0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi$, und sei $K_{\alpha,\beta}$ der Kreisbogen zwischen den Punkten

 z_{α} und z_{β} auf K. In anderen Wörtern, $K_{\alpha,\beta}$ ist eine parametrisierte Kurve mit der Parametrisierung

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$$

 $\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t),$



Der Bogen $K_{\alpha,\beta}$

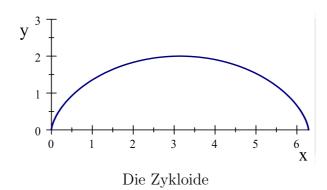
Es folgt

$$L(K_{\alpha,\beta},\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} r dt = (\beta - \alpha) r.$$

Somit erhalten wir die geometrische Bedeutung von dem Begriff des Polarwinkels: die Differenz zwischen den Polarwinkeln von z_{α} und z_{β} ist gleich die Länge des Kreisbogens zwischen z_{α} und z_{β} dividiert durch den Radius.

Beispiel. Die Zykloide ist eine Kurve mit der Parametrisierung

$$\varphi$$
: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
 $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.



Dann gilt

$$|\varphi'| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2-2\cos t} = 2\sin\frac{t}{2}.$$

Somit ist die Länge der Zykloide gleich

$$L(K,\varphi) = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}dt = 4\int_0^{\pi} \sin s \, ds = -4\left[\cos s\right]_0^{\pi} = 8.$$

Beispiel. Betrachten wir den Graph

$$\Gamma = \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], y = f(x)\}$$

einer Funktion $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Der Graph lässt sich betrachten als eine Kurve mit Parametrisierung

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$$

 $\varphi(x) = (x, f(x))$

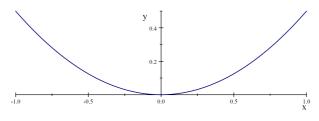
Ist f stetig differenzierbar, so erhalten wir

$$\varphi' = (1, f'(x)) \text{ und } |\varphi'| = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

woraus folgt

$$L(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \qquad (11.40)$$

Zum Beispiel, betrachten wir die Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf [0,1].



Die Parabel

Nach (11.40) erhalten wir die Länge der Parabel:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Sei $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Betrachten wir eine Substitution t=u(s) wobei $u: I \to J$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall I ist. Somit ist die folgende Komposition definiert

$$\psi := \varphi \circ u : I \to \mathbb{R}^n,$$

die auch eine stetig differenzierbare Abbildung ist.

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$$

Satz 11.17 Unter d.o.g. Bedingungen sei die Funktion u monoton und surjektiv $(d.h.\ u(I) = J)$. Dann bestimmen φ und ψ die gleiche Kurve $K = \varphi(J) = \psi(I)$, und die parametrisierten Kurven (K, φ) und (K, ψ) haben die gleichen Längen, d.h.

$$L(K,\varphi) = L(K,\psi)$$
.

Beweis. Da

$$\psi(I) = (\varphi \circ u)(I) = \varphi(u(I)) = \varphi(J),$$

so bestimmen φ und ψ die gleiche Kurve K.

Die Funktion u ist monoton steigend oder fallend. Sei u monoton steigend, so dass $u'(s) \ge 0$ für alle $s \in I$. Für jedes k = 1, ..., n haben wir nach der Kettenregel

$$\psi'_{k}(s) = (\varphi_{k}(u(s)))' = \varphi'_{k}(u(s))u'(s),$$

woraus folgt

$$\psi'(s) = \varphi'(u(s)) u'(s)$$

und somit

$$|\psi'(s)| = |\varphi'(u(s))| |u'(s)| = |\varphi'(u(s))| |u'(s)|,$$

wobei wir benutzt haben, dass u'(s) > 0.

Seien I = [a, b] und $J = [\alpha, \beta]$ wobei $\alpha < \beta$ und a < b. Da $u : I \to J$ monoton steigend und surjektiv ist, so erhalten wir $u(a) = \alpha$ und $u(b) = \beta$. Nach der Definition der Länge (11.39) und der Substitutionsregel (11.34) erhalten wir

$$L(K,\psi) = \int_{a}^{b} |\psi'(s)| ds = \int_{a}^{b} |\varphi'(u(s))| u'(s) ds \quad \text{(Substitution } t = u(s))$$
$$= \int_{u(a)}^{u(b)} |\varphi'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt = L(K,\varphi),$$

was zu beweisen war. Der Fall von monoton fallender Funktion u ist analog. \blacksquare

Beispiel. Betrachten wir den Kreisbogen $K_{\alpha,\beta}$ von Radius 1 mit der Parametrisierung

$$\varphi$$
: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$
 $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$.

Wir wissen schon, dass

$$L(K_{\alpha,\beta},\varphi) = \beta - \alpha.$$

Seien $0 < \alpha < \beta < \pi$. Auf dem Intervall $[0, \pi]$ ist $\cos t$ monoton fallend und hat die inverse Funktion arcsin auf [-1, 1]. Die Substitution $s = \cos t$ (was äquivalent zu $t = \arcsin s$) ergibt uns eine neue Parametrisierung

$$\psi$$
: $[\cos \beta, \cos \alpha] \to \mathbb{R}^2$
 $\psi(s) = (s, \sqrt{1 - s^2}),$

so dass $K_{\alpha,\beta}$ der Graph der Funktion $f(s) = \sqrt{1-s^2}$ auf $[\cos \beta, \cos \alpha]$ ist. Es gilt

$$L(K_{\alpha,\beta}, \psi) = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \sqrt{1 + f'(s)^2} = \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{s}{\sqrt{1 - s^2}}\right)^2} ds$$
$$= \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = [\arcsin s]_{\cos \beta}^{\cos \alpha}$$
$$= [\pi/2 - \arccos s]_{\cos \beta}^{\cos \alpha} = \beta - \alpha.$$

Somit gilt $L(K_{\alpha,\beta},\varphi) = L(K_{\alpha,\beta},\psi)$ wie erwartet.

11.10 * Wallis-Produkt

Für zwei Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen schreiben wir $a_n \sim b_n$ für $n \to \infty$ falls

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Offensichtlich ist die Relation \sim eine Äquivalenzrelation, d.h.

- 1. $a_n \sim a_n$
- 2. $a_n \sim b_n$ impliziert $b_n \sim a_n$
- 3. $a_n \sim b_n$ und $b_n \sim c_n$ implizieren $a_n \sim c_n$.

Satz 11.18 Es gelten die Äquivalenzen

$$\int_0^{\pi} \sin^n x dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad \text{für } n \to \infty$$
 (11.41)

and

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n} \quad \text{für } n \to \infty.$$
 (11.42)

Die äquivalenten Formulierungen von (11.42):

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \sim \sqrt{\pi n}$$

und

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))^2 n} = \pi.$$

Beweis. Bezeichnen wir für $n \in \mathbb{Z}_+$

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx.$$

Wir beweisen Eigenschaften von I_n in einer Reihenfolge von Schritten.

(a) $I_{n-1} \ge I_n > 0$. Da für $0 < x < \pi$ gilt $0 < \sin x \le 1$, so folgt es

$$0 < \sin^n x < \sin^{n-1} x.$$

woraus $0 < I_n \le I_{n-1}$ folgt.

(b) $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$, da

$$I_0 = \int_0^{\pi} dx = \pi$$
 und $I_1 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\left[\cos x\right]_0^{\pi} = 2.$

(c)
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
 für $n \ge 2$, da

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \, dx = -\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x d \cos x$$

$$= -\left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x d \sin^{n-1} x$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx$$

$$= (n-1) (I_{n-2} - I_n),$$

woraus $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ folgt. (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$. In der Tat folgt es aus (c) und (a), dass

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \le \frac{I_n}{I_{n-1}} \le 1.$$

Da $\frac{n-1}{n} \to 1$, so erhalten wir $\frac{I_n}{I_{n-1}} \to 1$ für $n \to \infty$.

(e) Für alle $k \in \mathbb{Z}_+$ gelten die Identitäten:

$$I_{2k+1} = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \quad \text{und} \quad I_{2k} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}$$
 (11.43)

Induktion nach k. Für k = 0 gelten (11.43) nach (b).

Induktionsschritt von k-1 nach k. Angenommen

$$I_{2k-1} = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)},$$

so erhalten wir nach (c)

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}.$$

Analog beweist man die zweite Identität in (11.43).

(f) $I_{n-1}I_n = \frac{2\pi}{n}$. Es folgt aus (e), dass für n = 2k + 1

$$I_{n-1}I_n = I_{2k}I_{2k+1} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)} \cdot 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} = \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2\pi}{n}.$$

Im Fall n = 2k erhalten wir analog

$$I_{n-1}I_n = I_{2k-1}I_{2k} = 2\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)} \cdot \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{2\pi}{n}.$$

(g) Jetzt beweisen wir (11.41), d.h. $I_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. Nach (f) haben wir

$$I_n^2 = I_n I_{n-1} \frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{2\pi}{n} \frac{I_n}{I_{n-1}},$$

woraus folgt nach (d)

$$\frac{I_n^2}{2\pi/n} = \frac{I_n}{I_{n-1}} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty,$$

und somit $I_n^2 \sim \frac{2\pi}{n}$, was äquivalent zu (11.41) ist. (h) Beweisen wir (11.42). Für n=2k+1 haben wir nach (e) und (g)

$$2\frac{2\cdot 4\cdot \ldots\cdot (2k)}{3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2k+1)} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{2k+1}} \ \text{für } k\to \infty,$$

woraus folgt

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(2k+1\right)} \sim \sqrt{\pi k}.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\frac{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k))^2}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!},$$

woraus (11.42) folgt.

Stirling-Formel 11.11

Hauptsatz 11.19 Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n f \ddot{u} r \quad n \to \infty.$$
 (11.44)

Beweis. Die asymptotische Identität (11.44) ist äquivalent zu

$$\frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 1 \text{ für } n \to \infty,$$

d.h. zu

$$\ln \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

was äquivalent zu

$$\left(\frac{1}{2}\ln n + n\ln\frac{n}{e}\right) - (\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n) \to \ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{für } n \to \infty$$

ist. Zunächst beweisen wir, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \left(n \ln \frac{n}{e} - \left(\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln (n-1) + \frac{1}{2} \ln n \right) \right)$$
 (11.45)

existiert und endlich ist. Danach bestimmen wir den Grenzwert.

Betrachten wir die folgende Funktion f(x) auf $[1, \infty)$:

- 1. $f(n) = \ln n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- 2. für $x \in [n, n+1]$ ist f(x) eine lineare Funktion, d.h.

$$f(x) = (n+1-x)\ln n + (x-n)\ln (n+1).$$

Da $\ln x$ konkav ist, so gilt

$$f(x) \le \ln x$$
 für alle $x \ge 1$.

Setzen wir

$$a_n := \int_1^n (\ln x - f(x)) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht negative und monoton steigend ist. Es gilt

$$\int_{1}^{n} \ln x \, dx = n \ln n - n + 1 = n \ln \frac{n}{e} + 1$$

und

$$\int_{1}^{n} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2}$$
$$= \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln (n-1) + \frac{1}{2} \ln n.$$

Somit erhalten wir

$$a_n = \int_1^n \ln x dx - \int_1^n f\left(x\right) dx = n \ln \frac{n}{e} + 1 - \left(\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln \left(n - 1\right) + \frac{1}{2} \ln n\right).$$

Somit ist der Grenzwert (11.45) gleich $\lim a_n+1$. Da die Folge $\{a_n\}$ monoton steigend ist, so existiert der Grenzwert $\lim a_n$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim a_n$ endlich

ist. Es gilt

$$a_{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} (\ln x - f(x)) dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} (\ln x - f(x)) dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) \ln \frac{k+1}{e} - k \ln \frac{k}{e} - \frac{\ln k + \ln (k+1)}{2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) \ln (k+1) - k \ln k - \frac{1}{2} \ln k - \frac{1}{2} \ln (k+1) - 1 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) (\ln (k+1) - \ln k) - 1 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) - 1 \right).$$

Die Taylorformel ergibt

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \text{ für } k \to \infty,$$

woraus folgt

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) - 1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k^2}\right) + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{12k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\sim \frac{1}{12k^2} \text{ as } k \to \infty.$$

Somit ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) - 1 \right)$$

konvergent da sie äquivalent zur konvergenten Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ ist. Somit ist die Folge $\{a_n\}$ beschränkt und $\lim a_n$ ist endlich.

Folglich der Grenzwert (11.45) existiert und ist endlich. Es folgt, dass auch der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}$$

existiert und eine positive Zahl ist, sei 1/c wobei c>0. Dann gilt

$$n! \sim c\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
 (11.46)

Um c zu bestimmen, berechnen wir

$$\frac{\left(2^{n} n!\right)^{2}}{(2n)!} \sim \frac{\left(2^{n} c \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n}\right)^{2}}{c \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \frac{c^{2} 2^{2n} n \, n^{2n} e^{-2n}}{c \sqrt{2n} \, 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}} = c \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Andererseits es gilt nach dem Satz 11.18

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n},$$

woraus folgt

$$c\sqrt{\frac{n}{2}} \sim \sqrt{\pi n},$$

und somit $c = \sqrt{2\pi}$. Einsetzen c in (11.46) ergibt (11.44).

Chapter 12

Konvergenz von Integralen

12.1 Uneigentliches Riemann-Integral

Das Riemann-Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist immer für eine Funktion f auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall [a, b] definiert ist. In diesem Abschnitt wird diese Definition zu anderen Typen von Intervallen erweitert.

Definition. Sei f eine Funktion auf einem beliebigen Intervall J. Die Funktion f heißt lokal integrierbar auf J falls f auf jedem abgeschlossen beschränkten Intervall $I \subset J$ Riemann-integrierbar ist.

Es folgt aus dem Satz 11.3, dass alle stetige Funktionen und alle monotone Funktionen lokal integrierbar sind.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem rechtsoffenen Intervall [a,b) mit $-\infty < a < b \le +\infty$. Dann definieren wir das *uneigentliche* Riemann-Integral von f mit

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{b-} f(x) dx := \lim_{c \to b-} \int_{a}^{c} f(x) dx,$$
 (12.1)

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert als Element von $\overline{\mathbb{R}}$. Die Notation $c \to b-$ bedeutet, dass c < b und $c \to b$; insbesondere ist das Riemann-Integral $\int_a^c f(x) \, dx$ wohldefiniert.

Ist der Grenzwert in (12.1) endlich, so sagt man, dass das Integral $\int_a^b f(x) dx$ an der Grenze b konvergiert.

Ist der Grenzwert unendlich, so sagt man, dass das Integral an der Grenze b bestimmt divergiert.

Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, dass das Integral an b unbestimmt divergiert. Im letzten Fall ist der Wert des Ausdrucks $\int_a^b f(x) dx$ nicht definiert.

Die Grenze b für das uneigentliche Integral in (12.1) heißt kritisch.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem linksoffenen Intervall (a, b] mit $-\infty \le a < b < +\infty$. Dann definieren wir

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a+}^{b} f(x) dx = \lim_{c \to a+} \int_{c}^{b} f(x) dx,$$
 (12.2)

16.11.18

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Die Notation $c \to a+$ bedeutet, dass c > a und $c \to a$. Die Grenze a für das uneigentliche Integral (12.2) heißt kritisch.

Beispiel. 1. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln x dx$ wobei die kritische Grenze 0 ist. Es gilt für $c \in (0,1)$

$$\int_{c}^{1} \ln x dx = \left[x \left(\ln x - 1 \right) \right]_{c}^{1} = -1 - c \left(\ln c - 1 \right) = -1 + c - c \ln c.$$

Da $c \ln c \to 0$ für $c \to 0$, so erhalten wir

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 \ln x dx = -1.$$

Somit ist das Integral an der Grenze 0 konvergent.

2. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_{1}^{+\infty} x^{p} dx$, wobei $p \in \mathbb{R}$ und die kritische Grenze $+\infty$ ist. Im Fall $p \neq -1$ haben wir für jedes $c \in (1, +\infty)$

$$\int_{1}^{c} x^{p} dx = \left[\int x^{p} dx \right]_{1}^{c} = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_{1}^{c} = \frac{c^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

Im Fall p>-1 gilt $c^{p+1}\to +\infty$ für $c\to +\infty$, woraus folgt

$$\int_{1}^{+\infty} x^{p} dx = +\infty,$$

d.h. das Integral an $+\infty$ bestimmt divergent ist.

Im Fall p < -1 gilt $c^{p+1} \to 0$ für $c \to +\infty$, woraus folgt

$$\int_{1}^{+\infty} x^{p} dx = -\frac{1}{p+1},$$

d.h. das Integral an $+\infty$ konvergent ist.

Im Fall p = -1 haben wir

$$\int_{1}^{c} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{1}^{c} = \ln c \to +\infty \text{ für } c \to +\infty,$$

woraus folgt

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-1} dx = +\infty.$$

Somit ist das Integral $\int_1^{+\infty} x^p dx$ konvergent für p < -1 und bestimmt divergent für $p \ge -1$.

3. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} \sin x dx$. Für jedes $1 < c < \infty$ gilt

$$\int_0^c \sin x dx = -\left[\cos x\right]_0^x = 1 - \cos c.$$

Aber der Grenzwert $\lim_{c\to\infty} \cos c$ existiert nicht. Somit beschließen wir, dass $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ an $+\infty$ unbestimmt divergiert und keinen Wert hat.

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion f auf einem kompakten Intervall [a,b]. Dann gibt es drei Begriffe von Integral $\int_a^b f(x) \, dx$: eigentliches (normales) Riemann-Integral, das uneigentliche Integral mit der kritischen Grenze a und das uneigentliche Integral mit der kritischen Grenze b.

Satz 12.1 Ist f auf [a,b] Riemann-integrierbar, so stimmen die drei Werte von $\int_a^b f(x) dx$ überein.

Beweis. Wir müssen beweisen, dass

$$\int_{a}^{b-} f(x) dx = \int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a+}^{b} f(x) dx.$$
 (12.3)

Betrachten wir die Funktion

$$F\left(x\right) = \int_{a}^{x} f\left(t\right) dt$$

und zuerst zeigen, dass F auch [a,b] stetig ist. Für beliebige $x,y\in [a,b]$ haben wir

$$F(x) - F(y) = \int_{a}^{x} f(t) dt - \int_{a}^{y} f(t) dt = \int_{y}^{x} f(t) dt.$$

Sei x > y. Dann erhalten wir nach der LM-Ungleichung:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_{y}^{x} f(t) dt \right| \le \int_{y}^{x} |f(t)| dt \le M |x - y|$$

wobei $M = \sup_{[a,b]} f$. Da f integrierbar auf [a,b], so ist M endlich nach dem Korollar 11.2. Analog beweist man die Ungleichung

$$|F(x) - F(y)| \le M|x - y|$$

im Fall x < y, woraus die Stetigkeit von F folgt.

Dann erhalten wir

$$\int_{a}^{b-} f(x) \, dx = \lim_{c \to b-} \int_{a}^{c} f(x) \, dx = \lim_{c \to b-} F(c) = F(b) = \int_{a}^{b} f(x) \, dx,$$

was die erste Identität in (12.3) beweist. Die zweite Identität lässt sich analog beweisen. \blacksquare

Die Eigenschaften von eigentlichem Integral lassen sich zum uneigentlichen Integral verallgemeinern. Erweitern wir die Notation $[F]_a^b$ zum Fall wenn F auf [a,b) definiert ist wie folgt:

$$[F]_{a}^{b} = [F]_{a}^{b-} = F(b-) - F(a),$$
 (12.4)

wobei

$$F\left(b-\right) = \lim_{x \to b-} F\left(x\right),\,$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert, endlich oder unendlich.

Ist F auf (a, b] definiert, so setzen wir analog

$$[F]_{a}^{b} = [F]_{a+}^{b} = F(b) - F(a+)$$

wobei

$$F\left(a+\right) = \lim_{x \to a+} F\left(x\right).$$

Satz 12.2 (Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral) Sei f(x) eine stetige Funktion auf einem halboffenen Intervall J = [a, b) oder J = (a, b]. Sei F eine Stammfunktion von f auf J. Dann gilt

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = [F]_{a}^{b},$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beweis. Betrachten wir den Fall J = [a, b). Nach Definition von dem uneigentlichen Integral und Newton-Leibniz-Formel für eigentliches Integral gilt

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{c \to b^{-}} \int_{a}^{c} f(x) dx = \lim_{c \to b^{-}} (F(c) - F(a))$$
$$= \lim_{c \to b^{-}} F(c) - F(a)$$
$$= F(b^{-}) - F(a) = [F]_{a}^{b}.$$

Analog betrachtet man den Fall J = (a, b].

Satz 12.3 (Partielle Integration) Seien u und v stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J = [a, b) oder J = (a, b]. Dann gilt

$$\int_{a}^{b} u dv = [uv]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v du \tag{12.5}$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist (d.h. der Wert $[uv]_a^b$ und das uneigentliche Integral $\int_a^b v du$ existieren und deren Differenz wohldefiniert ist).

Beweis. Sei J = [a, b). Für jedes $c \in (a, b)$ sind die Funktionen u, v auf [a, c] stetig differenzierbar. Somit gilt es nach dem Satz 11.7

$$\int_{a}^{c} u dv = [uv]_{a}^{c} - \int_{a}^{c} v du.$$

Für $c \to b-$ erhalten wir (12.5). Der Fall J=(a,b] ist analog.

Satz 12.4 (Substitutionsregel) Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall I. Sei $u: J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J = [a, b). Nehmen wir an, dass der Wert u(b-) existiert. Dann gilt

$$\int_{a}^{b} f(u(x)) du(x) = \int_{u(a)}^{u(b-)} f(y) dy, \qquad (12.6)$$

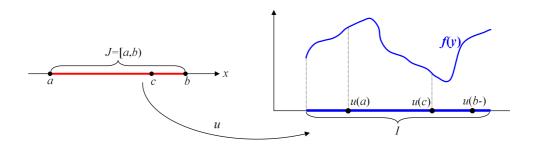
vorausgesetzt, dass mindestens eines von zwei Integralen wohldefiniert ist. Im Fall J = (a, b] gilt analog

$$\int_{a}^{b} f(u(x)) du(x) = \int_{u(a+1)}^{u(b)} f(y) dy,$$
(12.7)

vorausgesetzt, $dass\ u\ (a+)\ und\ mindestens\ eines\ von\ zwei\ Integralen\ wohldefiniert\ ist.$

Beweis. Sei J = [a, b). Für jedes $c \in (a, b)$ haben wir $u(c) \in I$ und

$$\int_{a}^{c} f(u(x)) du(x) = \int_{u(a)}^{u(c)} f(y) dy.$$



Es folgt, dass

$$\lim_{c \to b^{-}} \int_{a}^{c} f(u(x)) du(x) = \lim_{c \to b^{-}} \int_{u(a)}^{u(c)} f(y) dy, \tag{12.8}$$

vorausgesetzt, dass mindestens einer von zwei Grenzwerten in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Nach Definition des uneigentlichen Integrals gilt

$$\lim_{c \to b^{-}} \int_{a}^{c} f(u(x)) du(x) = \int_{a}^{b} f(u(x)) du(x).$$

Für $c \to b-$ erhalten wir $u\left(c\right) \to u\left(b-\right)$. Da $u\left(c\right) \in I$, so liegt $u\left(b-\right)$ im Abschluss von I. Liegt $u\left(b-\right)$ in I so gilt

$$\lim_{c \to b^{-}} \int_{u(a)}^{u(c)} f(y) \, dy = \int_{u(a)}^{u(b^{-})} f(y) \, dy, \tag{12.9}$$

da das Integral $\int_{u(a)}^{t} f(y) dy$ stetig in $t \in I$ ist. Ist u(b-) eine (linke oder rechte) Grenze von I, so gilt (12.9) nach der Definition des uneigentlichen Integrals. Somit folgt (12.6) aus (12.8).

Der Fall J = (a, b] ist analog.

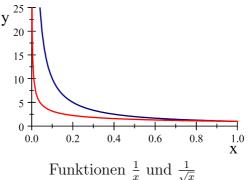
Analog formuliert und beweist man die weiteren Eigenschaften von Integral, wie Linearität, Monotonie, Additivität.

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Hier ist 0 die kritische Grenze. Nach Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\int x^{-1/2} dx \right]_0^1 = \left[2x^{1/2} \right]_0^1 = 2.$$

Analog erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x} \right]_0^1 = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln (0+) = +\infty.$$

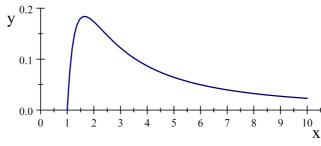


Funktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. Bestimmen $\int_1^{+\infty} x^{-2} \ln x dx$, wo die kritische Grenze $+\infty$ ist. Wir erhalten mit Hilfe von der partiellen Integration

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-2} \ln x dx = -\int_{1}^{+\infty} \ln x d\frac{1}{x} = -\left[\frac{1}{x} \ln x\right]_{1}^{+\infty} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} d\ln x$$
$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2}} dx = \left[\int x^{-2} dx\right]_{1}^{+\infty} = -\left[x^{-1}\right]_{1}^{+\infty} = -(0-1) = 1,$$

wo wir benutzt haben, das $\frac{\ln x}{x} \to 0$ für $x \to +\infty$.

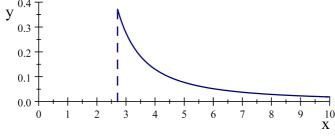


Funktion $x^{-2} \ln x$ auf $[1, +\infty)$

3. Bestimmen wir $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$, wobei die kritische Grenze $+\infty$ ist. Mit Hilfe von Substitution $y = u(x) = \ln x$ erhalten wir

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{2} x} dx = \int_{e}^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{2} x}$$

$$= \int_{u(e)}^{u(+\infty)} \frac{dy}{y^{2}} = \left[\int y^{-2} dy \right]_{1}^{+\infty} = -\left[y^{-1} \right]_{1}^{+\infty} = 1.$$



Funktion $\frac{1}{x \ln^2 x}$ auf $[e, +\infty)$

Betrachten wir jetzt uneigentliches Integral mit beiden kritischen Grenzen.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Integral (a, b) mit $-\infty \le a < b \le +\infty$. Definieren wir das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit zwei kritischen Grenzen a, b wie folgt:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a+}^{b-} f(x) dx := \int_{a+}^{c} f(x) dx + \int_{c}^{b-} f(x) dx, \qquad (12.10)$$

wobei $c \in (a, b)$, vorausgesetzt, dass die beiden Integrale in der rechten Seite existieren als uneigentliche Integrale mit einer kritischen Grenze und deren Summe auch wohldefiniert ist.

Behauptung. Der Wert von $\int_a^b f(x) dx$ in (12.10) ist unabhängig von der Wahl von $c \in (a, b)$.

Beweis. Sei c' noch ein Punkt in (a, b). Wir haben dann

$$\int_{a}^{c'} f dx + \int_{c'}^{b} f dx = \left(\int_{a}^{c} f dx + \int_{c}^{c'} f dx \right) + \left(\int_{c'}^{c} f dx + \int_{c}^{b} f dx \right)$$
$$= \int_{a}^{c} f dx + \int_{c}^{b} f dx + \left(\int_{c}^{c'} f dx + \int_{c'}^{c} f dx \right)$$
$$= \int_{a}^{c} f dx + \int_{c}^{b} f dx.$$

Bemerken wir, dass die Werte $\int_{c}^{c'} f dx$ und $\int_{c'}^{c} f dx$ endlich sind und deren Summe gleich 0 ist. \blacksquare

Alle Eigenschaften von uneigentlichen Integralen gelten auch für den Fall von zwei kritischen Grenzen. In diesem Fall wird die Notation $[F]_a^b$ noch weiter verallgemeinert wie folgt:

$$[F]_a^b = [F]_{a+}^{b-} = F(b-) - F(a+),$$
 (12.11)

vorausgesetzt, dass die beiden Werte F(b-) und F(a+) existiert und deren Differenz auch wohldefiniert ist. Bemerken wir, dass $[F]_a^b$ nicht definiert ist falls die rechte Seite von (12.11) ein unbestimmter Ausdruck der Form $\infty - \infty$ ist.

Zum Beispiel, beweisen wir die Newton-Leibniz-Formel in diesem Fall.

Satz 12.5 (Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral mit zwei kritischen Grenzen) Seien f(x) eine stetige Funktion auf (a,b) mit $-\infty \le a < b \le +\infty$ und F eine Stammfunktion von f auf (a,b). Dann gilt

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = [F]_{a}^{b},$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

21.11.18

Beweis. Es folgt aus der Definition (12.10) und dem Satz 12.2, dass für $c \in (a, b)$

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{c} f(x) dx + \int_{c}^{b} f(x) dx$$

$$= [F]_{a}^{c} + [F]_{c}^{b}$$

$$= F(c) - F(a+) + F(b-) - F(c)$$

$$= [F]_{a}^{b}.$$

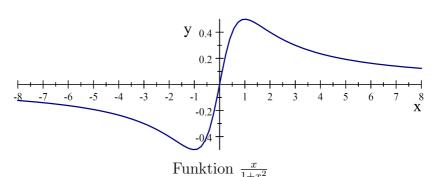
Beispiel. 1. Betrachten wir $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$, wobei die beiden Grenzen $\pm \infty$ kritisch sind. Da

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

so erhalten wir nach der Newton-Leibniz-Formel

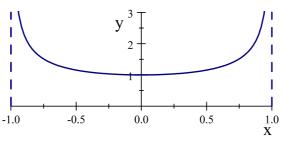
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + x^2 \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - (+\infty),$$

was unbestimmter Ausdruck ist. Somit ist das Integral nicht wohldefiniert.



2. Bestimmen wir $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist stetig auf (-1,1) aber nicht an ± 1 definiert, so dass die beiden Grenzen ± 1 kritisch sind. Nach de Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]_{-1}^{1} = \left[\arcsin x \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$



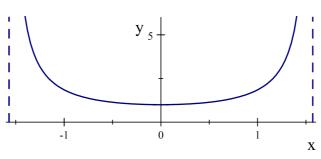
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Bestimmen wir $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$. Die Funktion $\frac{1}{\cos x}$ ist stetig auf $(-\pi/2, \pi/2)$ aber nicht an $\pm \pi/2$ definiert, so dass die beiden Grenzen $\pm \pi/2$ kritisch sind. Nach Aufgabe 44 gilt

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C,$$

woraus folgt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\ln \left(+ \infty \right) - \ln 0 \right) = \frac{1}{2} \left(+ \infty - (-\infty) \right) = +\infty.$$



Funktion $\frac{1}{\cos x}$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$

12.2 Konvergenzkriterien von uneigentlichen Integralen

Wir fangen mit der folgenden Beobachtung an.

Satz 12.6 Sei f eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a,b) mit $-\infty \le a < b \le +\infty$. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ mit dem Wert in $[0,+\infty]$. Insbesondere ist $\int_a^b f(x) \, dx$ genau dann konvergent, wenn

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx < \infty.$$

Beweis. Fixieren wir ein $c \in (a, b)$ und betrachten die Funktion

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t) dt.$$

Die Funktion F(x) ist monoton steigend, da für y > x gilt

$$F(y) - F(x) = \int_{c}^{y} f(t) dt - \int_{c}^{x} f(t) dt = \int_{x}^{y} f(t) dt \ge 0.$$

Somit existieren die Grenzwerte F(b-) und F(a+). Bemerken wir, dass $F(b-) \in [0,+\infty]$ da $F(b-) \ge F(c) = 0$ und analog $F(a+) \in [-\infty,0]$. Es gilt nach Definition

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{c} f(x) dx + \int_{c}^{b} f(x) dx$$
$$= F(b-) - F(a+) \in [0, +\infty],$$

da die Differenz F(b-) - F(a+) wohldefiniert ist.

Die zweite Aussage ist offensichtlich.

Vergleichen wir den Satz 12.6 mit der folgenden Eigenschaft von den Reihen: für jede nichtnegative Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist ihre Summe immer wohldefiniert als Element von $[0, +\infty]$, und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

(Satz 5.1). Der folgende Satz etabliert eine direkte Beziehung zwischen Konvergenz von Reihen und Integralen.

Satz 12.7 (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen) Sei f(x) eine nichtnegative monoton fallende Funktion auf $[m, +\infty)$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt die Äquivalenz

$$\int_{m}^{+\infty} f(x) dx < \infty \iff \sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty.$$

Beweis. Da f nichtnegativ und lokal integrierbar ist, so existieren $\int_{m}^{+\infty} f(x) dx$ und $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ als Elemente von $[0, +\infty]$. Wir beweisen, dass die beiden Werte gleichzeitig entweder endlich oder unendlich sind.

Fixieren wir ein n > m und betrachten die Zerlegung

$$Z = \{m, m+1, ..., n\}$$

von dem Intervall [m, n]. Da f(x) monoton fallend ist, so gilt auf jedem Intervall $[k-1, k] \subset [m, n]$

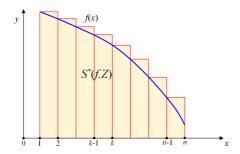
$$\sup_{[k-1,k]} f = f(k-1) \text{ und } \inf_{[k-1,k]} f = f(k).$$

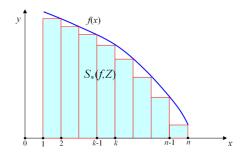
Somit sind die entsprechenden Darboux-Summen gleich

$$S^{*}(f,Z) = \sum_{k=m+1}^{n} (\sup_{[k-1,k]} f) (k - (k-1)) = \sum_{k=m+1}^{n} f (k-1) = f (m) + \dots + f (n-1),$$

und

$$S_* (f, Z) = \sum_{k=m+1}^{n} (\inf_{[k-1,k]} f) (k - (k-1)) = \sum_{k=m+1}^{n} f (k) = f (m+1) + \dots + f (n)$$





Da nach dem Satz 11.1 immer gilt

$$S_* (f, Z) \le \int_m^n f(x) dx \le S^* (f, Z),$$

so erhalten wir

$$f(m+1) + ... + f(n) \le \int_{m}^{n} f(x) dx \le f(m) + ... + f(n-1).$$

Für $n \to \infty$ ergeben diese Ungleichungen, dass

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \le \int_{m}^{\infty} f(x) dx \le \sum_{k=m}^{\infty} f(k).$$
 (12.12)

Somit ist $\int_{m}^{\infty} f(x) dx$ genau dann endlich wenn $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty$.

Beispiel. Untersuchen wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ wobei $p \in \mathbb{R}$. Im Fall $p \leq 0$ konvergiert die Folge $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ gegen 0 nicht, und somit ist die Reihe divergent. Sei p > 0. Die Funktion $f\left(x\right) = \frac{1}{x^p}$ ist dann monoton fallend auf $[1, +\infty)$. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergiert nach dem Satz 12.7 genau dann, wenn

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p}} < \infty. \tag{12.13}$$

Wir haben früher schon gesehen, dass (12.13) genau dann gilt wenn p > 1. Es folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann konvergiert wenn p > 1.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf (a, b). Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ heißt absolut konvergent, falls $\int_a^b |f(x)| dx$ konvergent ist, d.h.

$$\int_{a}^{b} |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Bemerken wir, dass |f| auch lokal integrierbar ist (Aufgabe 78). Da $|f| \ge 0$, so existiert das Integral $\int_a^b |f(x)| \, dx$ nach dem Satz 12.6.

Satz 12.8 Ist das Integral $\int_a^b f(x) dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent und es gilt

$$\left| \int_{a}^{b} f(x) dx \right| \le \int_{a}^{b} |f(x)| dx. \tag{12.14}$$

Beweis. Wählen wir ein $c \in (a, b)$ und setzen

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t) dt \quad \text{und} \quad G(x) = \int_{c}^{x} |f(t)| dt.$$

Da $|f| \ge 0$, so existieren die beiden Grenzwerte G(a+) und G(b-) und es gilt

$$\int_{a}^{b} |f(t)| dt = G(b-) - G(a+)$$

(wie im Beweis von dem Satz 12.6). Da $\int_a^b |f(t)| dt$ konvergent ist, so sind die Werte G(b-) und G(a+) endlich.

Beweisen wir dass auch der Grenzwert F(b-) existiert und endlich ist. Es reicht folgendes zu zeigen: für jede Folge $x_n \to b-$ ist die Folge $\{F(x_n)\}$ konvergent, d.h. $\{F(x_n)\}$ eine Cauchy-Folge ist. In der Tat für $x_n > x_m$ erhalten wir

$$|F(x_n) - F(x_m)| = \left| \int_c^{x_n} f(t) dt - \int_c^{x_m} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_m}^{x_n} f(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{x_m}^{x_n} |f(t)| dt = G(x_n) - G(x_m), \qquad (12.15)$$

wo wir das Korollar 11.11 benutzt haben. Somit gilt es

$$|F(x_n) - F(x_m)| \le |G(x_n) - G(x_m)|$$

für alle n, m. Nach der Voraussetzung gilt $G(x_n) - G(x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$, woraus auch $|F(x_n) - F(x_m)| \to 0$ folgt. Somit existiert der Grenzwert F(b-) und er ist endlich. Gleiches gilt für F(a+), woraus folgt, dass das Integral

$$\int_{a}^{b} f(t) dt = \int_{a}^{c} f(t) dt + \int_{c}^{b} f(t) dt = F(b-) - F(a+)$$

konvergiert.

Um die Ungleichung (12.14) zu beweisen, bemerken wir, dass für alle a < x < y < b nach (12.15) gilt

$$|F(y) - F(x)| \le G(y) - G(x),$$

woraus folgt für $x \to a + \text{ und } y \to b -$

$$|F(b-) - F(a+)| \le G(b-) - G(a+)$$

was äquivalent zu (12.14) ist. ■

Definition. Seien f(x) und g(x) zwei Funktionen auf (a,b), die im (a,b) nicht verschwinden. Man sagt, dass f(x) äquivalent zu g(x) für $x \to b-$ ist und schreibt

$$f(x) \sim g(x)$$
 für $x \to b-$,

falls

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$$
 für $x \to b - .$

Analog definiert man die Äquivalenz

$$f(x) \sim g(x)$$
 für $x \to a + ...$

Zum Beispiel, es gilt $\sin x \sim x$ für $x \to 0+$ (und $x \to 0-$) da $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

Lemma 12.9 (a) Die Relation $f \sim g$ für $x \to b-$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Gelten $f_1 \sim g_1$ und $f_2 \sim g_2$ für $x \rightarrow b-$ so gelten auch $f_1f_2 \sim g_1g_2$ und $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2} \text{ für } x \to b-.$ (c) Es gilt $f \sim g$ genau dann wenn f(x) = g(x) + o(g(x)) für $x \to b-.$

Beweis. (a) Nach Definition, soll eine Äquivalenzrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein. Offensichtlich gilt $f \sim f$ (Reflexivität) und $f \sim g$ ergibt $g \sim f$ (Symmetrie) da

$$\frac{g}{f} = \frac{1}{f/g} \to \frac{1}{1} = 1 \text{ für } x \to b -.$$

Gelten $f \sim g$ und $g \sim h$ so gilt auch $f \sim h$ (Transitivität), da

$$\frac{f}{h} = \frac{f}{g}\frac{g}{h} \to 1 \cdot 1 = 1 \text{ für } x \to b - .$$

(b) Die Äquivalenz $f_1f_2 \sim g_1g_2$ folgt aus

$$\frac{f_1f_2}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1}\frac{f_2}{g_2} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1 \text{ für } x \rightarrow b -$$

und $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ folgt aus

$$\frac{f_1}{f_2} / \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{g_1} \frac{g_2}{f_2} \to 1 \text{ für } x \to b - .$$

(c) Wir haben

$$\frac{f}{g} = \frac{f - g}{g} + 1,$$

woraus folgt, dass $\frac{f}{g} \to 1$ genau dann gilt wenn $\frac{f-g}{g} \to 0$, d.h. $f-g=o\left(g\right)$.

Beispiel. 1. Es gilt

$$x^2 + x \sim x^2$$
 für $x \to +\infty$

da

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} \to 1 \text{ für } x \to +\infty.$$

Andererseits, wir haben

$$x^2 + x \sim x$$
 für $x \to 0$

da

$$\frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \to 1 \quad \text{für } x \to 0.$$

23.11.18

2. Es gilt $\ln(1+x) \sim x$ für $x \to 0$ da nach der Taylorformel

$$ln (1+x) = x + o(x).$$

Es folgt, dass für $x \to 0$

$$(x^2 + x) \ln (1 + x) \sim x \cdot x = x^2.$$

Definieren wie das Landau-Symbol O.

Definition. Seien f, g zwei Funktionen auf (a, b) und g(x) > 0. Man schreibt

$$f(x) = O(g(x))$$
 für $x \to b-$

und sagt "f(x) ist groß O von g(x) für $x \to b$ —" falls für ein $c \in (a,b)$ und ein C > 0 gilt

$$|f(x)| \le Cg(x)$$

for alle $x \in (c, b)$. Aquivalente Definition:

$$f(x) = O(g(x))$$
 für $x \to b$ falls $\limsup_{x \to b^{-}} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$

Die Äquivalenz $f \sim g$ ergibt offensichtlich f = O(g). Zum Beispiel,

$$x^2 \cos x + x\sqrt{x} = O(x^2)$$
 für $x \to +\infty$,

da für x > 1

$$\frac{|x^2\cos x + x\sqrt{x}|}{x^2} \le |\cos x| + \frac{1}{\sqrt{x}} \le 2.$$

Satz 12.10 Seien f(x) und g(x) lokal integrierbare Funktionen auf [a,b). Sei g(x)positiv auch diesem Intervall.

- (a) (Majorantenkriterium) Gelten f(x) = O(g(x)) für $x \to b-$ und $\int_a^b g(x) dx < b \infty$, so ist das Integral $\int_a^b f(x) dx$ absolut konvergent. (b) (Vergleichskriterium) Sei auch f positiv. Gilt $f(x) \sim g(x)$ für $x \to b-so$
- sind die Integrale $\int_a^b f(x) dx$ und $\int_a^b g(x) dx$ gleichzeitig konvergent bzw divergent.

Die ähnliche Aussage gilt für Funktionen auf (a, b].

Beweis. (a) Da f(x) = O(g(x)) für $x \to b$, so existieren C > 0 and $c \in (a, b)$ mit

$$|f(x)| \le Cg(x)$$
 für alle $c \le x < b$. (12.16)

Wir haben

$$\int_{a}^{b} |f(x)| dx = \int_{a}^{c} |f(x)| dx + \int_{c}^{b} |f(x)| dx.$$

Die Funktion f ist auf [a, c] integrierbar, so dass das Integral $\int_a^c |f(x)| dx$ eigentlich ist. Nach (12.16) schätzen wir das zweite Integral wie folgt ab:

$$\int_{c}^{b} |f(x)| dx \le C \int_{c}^{b} g(x) dx < +\infty.$$

Daraus folgt $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$ d.h. $\int_a^b f(x) dx$ konvergiert absolut.

(b) Da f und g positiv sind, so sind die Integrale $\int_a^b f(x) dx$ und $\int_a^b g(x) dx$ konvergent oder bestimmt divergent. Die Relation $f(x) \sim g(x)$ ergibt f(x) = O(g(x)) und somit nach (a)

$$\int_{a}^{b} g(x) dx < +\infty \implies \int_{a}^{b} f(x) dx < +\infty.$$

Die umgekehrte Implikation folgt analog aus $g \sim f$.

Beispiel. 1. Untersuchen wir die Konvergenz von $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^4}}$ an der kritischen Grenze $+\infty$. Wir haben

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x^{-4}+1}} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-3/2} \text{ für } x \to +\infty,$$

d.h. $f(x) \sim x^{-3/2}$ für $x \to +\infty$. Da

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-3/2} dx < +\infty,$$

so beschließen wir nach dem Satz 12.10, dass

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^4}} < +\infty.$$

2. Untersuchen wir die Konvergenz von $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$. Da

$$\frac{\sin x}{x^2} = O\left(x^{-2}\right) \text{ für } x \to +\infty,$$

und $\int_1^\infty x^{-2} dx < +\infty$, so ist das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ absolut konvergent.

3. Untersuchen wir die Konvergenz von

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \tag{12.17}$$

wobei $0 < a < \pi/2$. Die kritische Grenze ist a wo der Nenner verschwindet. Nach der Taylorformel (9.2) gilt es für $x \to a$

$$\cos x - \cos a = -(\sin a)(x - a) + o(x - a) \sim (\sin a)(a - x),$$

woraus folgt

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sin a}\sqrt{a - x}} \text{ für } x \to a$$

Mit Hilfe von Substitution y = a - x erhalten wir

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = -\int_a^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y}} = [2\sqrt{y}]_0^a = 2\sqrt{a} < \infty,$$

woraus folgt, dass das Integral (12.17) absolut konvergent ist.

12.3 Bedingte Konvergenz

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a, b). Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ heißt bedingt konvergent falls es konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Der nächste Satz liefert zwei Kriterien für Konvergenz ohne absolute Konvergenz zu benutzen.

Satz 12.11 Seien f und g stetige Funktionen auf $[a, +\infty)$. Sei g(x) zusätzlich stetig differenzierbar und monoton auf $[a, +\infty)$. Dann das Integral

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) g(x) dx \tag{12.18}$$

konvergiert falls eine von den folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

- (a) (Abel-Kriterium) Das Integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ist konvergent und g(x) ist beschränkt.
- (b) (Dirichlet-Kriterium) Die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ist auf $[a, +\infty)$ beschränkt und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$.

Beweis. Partielle Integration ergibt

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_{a}^{+\infty} g(x) dF(x) = [Fg]_{a}^{+\infty} - \int_{a}^{+\infty} F(x) g'(x) dx. \quad (12.19)$$

Wir zeigen, dass die beiden Glieder am rechts endlich sind, woraus die Konvergenz von dem Integral (12.18) folgen wird.

Zunächst beweisen wir, dass der Wert des Ausdrucks $[Fg]_a^{+\infty}$ endlich ist, d.h. $Fg\ (+\infty)$ endlich ist. Im Fall (a) ergibt die Konvergenz von $\int_a^{+\infty} f dx$, dass $F\ (x)$ konvergent für $x \to +\infty$ ist, während $g\ (x)$ auch konvergent für $x \to +\infty$ ist, da g monoton und beschränkt ist. Es folgt, dass der Grenzwert

$$Fg(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

existiert und endlich ist.

Im Fall (b) ist F(x) beschränkt und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$, woraus folgt

$$Fg(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} (Fg)(x) = 0.$$

Jetzt beweisen wir, dass das Integral $\int_a^\infty F\left(x\right)g'\left(x\right)dx$ absolut konvergent ist. Die Funktion F ist in den beiden Fällen (a) und (b) beschränkt. Im Fall (b) ist es eine Voraussetzung, während im Fall (a) folgt es aus der Konvergenz von $F\left(x\right)$ für $x\to +\infty$. Sei C eine obere Schranke von |F|, d.h. $|F\left(x\right)|\leq C$ für alle $x\in [a,\infty)$. Dann gilt

$$\int_{a}^{\infty} |F(x) g'(x)| dx \le C \int_{a}^{\infty} |g'(x)| dx.$$

Die Funktion g ist monoton, woraus folgt, dass entweder immer $g'(x) \geq 0$ oder immer $g'(x) \leq 0$ ist. Angenommen, dass $g'(x) \geq 0$ (der Fall $g'(x) \leq 0$ ist dann analog), so erhalten wir

$$\int_{a}^{\infty} |g'(x)| dx = \int_{a}^{\infty} g'(x) dx = g(+\infty) - g(a) < \infty.$$

Somit erhalten wir, dass

$$\int_{a}^{\infty} |F(x)g'(x)| dx < \infty,$$

was zu beweisen war.

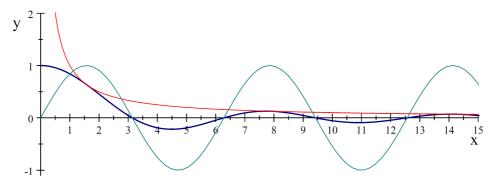
Beispiel. 1. Zeigen wir, dass das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

konvergent ist. Dafür betrachten wir die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x^{-1}$. Die Stammfunktion

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt = \int_{a}^{x} \sin x dx = -\cos x + \cos a$$

ist offensichtlich beschränkt, während g(x) monoton fallend ist und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$. Nach dem Dirichlet-Kriterium ist das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergent.



Die Funktionen $\sin x$, $\frac{1}{x}$ und $\frac{\sin x}{x}$

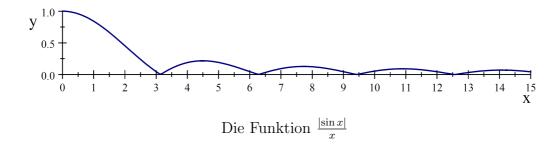
Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ heißt *Dirichlet-Integral*. Es ist auch konvergent, da die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ den Grenzwert 1 für $x \to 0$ hat und somit ist auf [0,1] integrierbar. Es ist möglich zu beweisen, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(siehe Abschnitt 12.6 unterhalb).

Zeigen wir, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ bedingt konvergent ist, d.h.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty. \tag{12.20}$$



Die Nullstellen von sin x auf $[1, \infty)$ sind $x_n = \pi n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir haben

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \ge \frac{1}{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\sin x| dx$$

$$\ge \frac{1}{x_{n+1}} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin x dx \right|$$

$$= \frac{1}{x_{n+1}} \left| [\cos x]_{x_n}^{x_{n+1}} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi (n+1)},$$

woraus folgt

$$\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n}}^{x_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi (n+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty,$$

d.h. (12.20).

2. Zeigen wir, dass das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \arctan x dx$$

konvergiert. Setzen wir $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $g(x) = \arctan x$. Die Funktion g ist beschränkt und monoton steigend, während $\int_{1}^{+\infty} f(x) dx$ konvergent ist, wie wir gleich bewiesen haben. Nach dem Abel-Kriterium ist das gegebene Integral konvergent.

12.4 * Alternative Definition von Elementarfunktionen

Wir geben hier eine alternative Definition von allen elementaren Funktionen mit Hilfe von Integralen. Dafür muss man die Differential- und Integralrechnung zuerst ohne Exponentialfunktion und ohne trigonometrische Funktionen entwickeln.

Mit Hilfe von Integral definieren wir zunächst die logarithmische Funktion: für alle x>0

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}.\tag{12.21}$$

Insbesondere gilt $\ln 1 = 0$. Es folgt, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Beweisen wir mit Hilfe von Definition (12.21) die Identität

$$ln (ab) = ln a + ln b$$
(12.22)

für alle a, b > 0. In der Tat gilt

$$\ln b = \int_{1}^{b} \frac{dx}{x} \quad \text{(Substitution } y = ax\text{)}$$
$$= \int_{a}^{ab} \frac{dy}{y} = \ln (ab) - \ln a,$$

woraus (12.22) folgt.

Die Funktion ln ist auf $(0, +\infty)$ definiert, ist differenzierbar und somit stetig, und ist streng monoton steigend. Beweisen wir, dass

$$\ln(0, +\infty) = \mathbb{R}$$

so dass die inverse Funktion \ln^{-1} auf $\mathbb R$ definiert ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

In der Tat gilt nach dem Satz 12.7

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Es folgt, dass

$$\lim_{x \to 0} \ln x = \lim_{y \to +\infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y \to +\infty} \ln y = -\infty.$$

Somit ist die inverse Funktion \ln^{-1} auf \mathbb{R} definiert und nimmt die Werte in $(0, +\infty)$ an. Diese Funktion heißt die Exponentialfunktion und wird mit exp bezeichnet, d.h.

$$\exp := \ln^{-1}.$$

Es folgt, dass für $y = \exp(x)$

$$(\exp(x))' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x).$$

Setzen wir

$$e := \exp(1),$$

d.h. die Zahl e die folgende Identität erfüllt:

$$\int_{1}^{e} \frac{dt}{t} = 1.$$

Beweisen wir die Haupteigenschaft: für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{12.23}$$

In der Tat ist (12.23) äquivalent zu

$$\ln\left(\exp\left(x+y\right)\right) = \ln\left[\exp\left(x\right)\exp\left(y\right)\right].$$

Da die linke Seite gleich x + y ist und die rechte Seite nach (12.22) gleich

$$\ln \exp(x) + \ln \exp(y) = x + y$$

ist, so erhalten wir die o.g. Identität.

Jetzt definieren wir arctan für alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\arctan x := \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Es folgt, dass

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Diese Funktion hat die inverse Funktion, die auf dem Intervall $(-\tau, \tau)$ definiert ist, wobei

$$\tau := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2}.$$

In der Tat gilt $\tau < 2$ da

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} < 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1 + 1 = 2.$$

Setzen wir

$$tan := arctan^{-1}$$
,

so dass der Definitionsbereich von tan gleich $(-\tau,\tau)$ ist. Es folgt, dass für $y=\tan x$

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\arctan y)'} = 1 + y^2 = 1 + \tan^2 x.$$

Definieren wir für alle $x \in [-1, 1]$

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Auf (-1,1) ist $\arcsin x$ differenzierbar und

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Funktion $\arcsin x$ ist somit streng monoton steigend auf (-1,1). Es ist klar, dass $\arcsin 0 = 0$. Beweisen wir, dass $\arcsin 1 < \infty$:

$$\arcsin 1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \quad \text{(Substitution } s = 1-t)$$
$$= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(2-s)}} \le \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left[2\sqrt{s}\right]_0^1 = 2 < \infty.$$

Wir definieren die Zahl π durch

$$\frac{\pi}{2} := \arcsin 1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Somit ist $\arcsin x$ eine stetige streng monotone steigende Funktion auf [-1,1] mit dem Bildmenge $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Definieren wir die inverse Funktion auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ mit den Werten in [-1,1]:

$$\sin = \arcsin^{-1}$$
.

Es folgt, dass für $y = \sin x$

$$(\sin x)' = \frac{1}{(\arcsin y)'} = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Analog definieren wir für $x \in [-1, 1]$

$$\arccos x := \int_{x}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Diese Funktion has die Bildmenge $[0, \pi]$ da

$$\arccos 1 = 0$$

und

$$\arccos(-1) = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

Offensichtlich gilt

$$\arccos x + \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{\pi}{2},$$

und somit

$$(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzen wir

$$\cos = \arccos^{-1}$$
,

so dass $\cos x$ auf $[0, \pi]$ definiert ist mit den Werten in [-1, 1].

Es gilt für $y = \cos x$

$$(\cos x)' = \frac{1}{(\arccos y)'} = -\sqrt{1 - y^2} = -\sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Beweisen wir für alle $x \in [0, \pi/2]$ die Identität

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{12.24}$$

Setzen wir $a = \cos x$ und $b = \sin x$ so dass

$$\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x = \int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Wir müssen beweisen, dass $a^2 + b^2 = 1$. Die Substitution

$$u = t^2$$
, $du = 2tdt$

ergibt

$$\int_{0}^{b} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^{2}}} = \int_{0}^{b^{2}} \frac{du}{2\sqrt{u(1 - u)}}$$

$$\int_{a}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^{2}}} = \int_{a^{2}}^{1} \frac{du}{2\sqrt{u(1 - u)}} = \int_{0}^{1 - a^{2}} \frac{dv}{2\sqrt{v(1 - v)}}$$

wobei v = 1 - u. Es folgt $b^2 = 1 - a^2$ und somit $a^2 + b^2 = 1$.

Es folgt, dass

$$(\sin x)' = \cos x$$
 und $(\cos x)' = -\sin x$.

Bemerken wir, dass

$$\tau = \int_0^\infty \frac{dt}{1+s^2} = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-t^2}} = \pi/2,$$

da die Substitution

$$s = \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad ds = \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad t = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}$$
 (12.25)

ergibt

$$\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^1 (1-t^2) \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Somit ist tan x auf $(-\pi/2, \pi/2)$ definiert.

Beweisen wir jetzt, dass für alle $x \in [0, \pi/2)$ gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Setzen wir $a = \cos x$, $b = \sin x$, $c = \tan x$ so dass

$$\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^c \frac{ds^2}{1+s^2}.$$

Wir müssen beweisen, dass $c = \frac{b}{a}$. Die gleiche Substitution (12.25) ergibt

$$\int_0^c \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} \left(1-t^2\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Es folgt $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = b$ und somit $c = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{b}{a}$. Somit erhalten wir

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Um die Potenzreihen für die elementaren Funktionen zu bestimmen, benutzt man die Taylorformel mit einer Abschätzung des Restgliedes (siehe Abschnitt 13.6 unterhalb). Man erhält

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Die Funktion $\exp{(x)}$ wurde bisher für $x \in \mathbb{R}$ definiert, \sin{x} – für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ und \cos{x} – für $x \in [0, \pi]$. Diese Potenzreihen lassen uns die Funktionen $\exp{(x)}$, \cos{x} und \sin{x} für alle $x \in \mathbb{C}$ fortsetzen. Allerdings muss man noch beweisen, dass die Haupteigenschaft (12.23) für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt.

Es folgt aus den obigen Potenzreihen, dass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(ix) = \cos x + i\sin x.$$

Insbesondere gilt

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

und

$$\exp(i\pi) = -1, \ \exp(i2\pi) = 1,$$

woraus auch die Periodizität von exp, sin und cos folgt.

12.5 * Gammafunktion

Definition. Definieren wir die Gammafunktion $\Gamma(x)$ für jedes x > 0 mit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$
 (12.26)

Lemma 12.12 Das Integral (12.26) konvergiert für alle x > 0.

Beweis. Die beiden Grenzen 0 und $+\infty$ sind kritisch (genauer zu sagen, 0 ist kritisch nur wenn x < 1). Setzen wir

$$f(t) = t^{x-1}e^{-t}$$

und beweisen, dass

$$\int_0^1 f(t) dt < +\infty \text{ und } \int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty,$$

woraus die Konvergenz von (12.26) folgen wird.

Da $f(x) \le t^{x-1}$ und

$$\int_0^1 t^{x-1} dt = \left\lceil \frac{t^x}{x} \right\rceil_0^1 = \frac{1}{x} < \infty,$$

So erhalten wir, dass auch $\int_0^1 f(t) dt < \infty$.

Beweisen wir jetzt die Konvergenz des zweiten Integral. Beweisen wir dafür die Ungleichung

$$t^{x-1} < Ce^{\frac{1}{2}t}$$
 für alle $t > 1$,

wobei C = C(x). Wir haben

$$e^{\frac{1}{2}t} = 1 + t/2 + \frac{(t/2)^2}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}(t/2)^n + \dots$$

Wählen wir eine natürliche Zahl n > x - 1. Dann gilt für alle $t \ge 1$

$$e^{\frac{1}{2}t} \ge \frac{1}{n!} (t/2)^n = ct^n \ge ct^{x-1},$$

mit $c = \frac{1}{n!2^n}$. Setzen wir $C = c^{-1} = n!2^n$ und erhalten

$$f(t) = t^{x-1}e^{-t} \le Ce^{\frac{1}{2}t}e^{-t} = Ce^{-\frac{1}{2}t}$$

d.h. $f(t) = O\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)$ für $t \to +\infty$. Da $\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}t} dt < \infty$, so erhalten wir auch $\int_1^{+\infty} f(t) dt < \infty$.

Lemma 12.13 Für alle x > 0 gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Beweis. Die partielle Integration ergibt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -\int_0^{+\infty} t^x de^{-t} = -\left[t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt^x$$
$$= \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

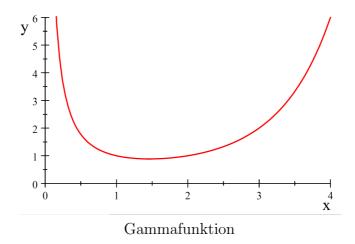
Bemerken wir, dass

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Nach Lemma (12.13) erhalten wir per Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Der Graph von $\Gamma(x)$ ist da.



12.6 * Dirichlet-Integral

Wir beweisen hier, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.\tag{12.27}$$

Das Integral in der rechten Seite heißt das *Dirichlet-Integral*. Es reicht zu beweisen, dass

$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx \to \frac{\pi}{2} \quad \text{für } n \to +\infty.$$
 (12.28)

Setzen wir zunächst für jedes n=0,1,2,...

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$$

und zeigen, dass alle u_n gleich sind. In der Tat gilt für jedes $n \geq 1$

$$u_n - u_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos 2nx \sin x}{\sin x} dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos 2nx dx \quad (y = 2nx)$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \cos y dy = \frac{1}{n} [\sin y]_0^{n\pi} = 0.$$

Es folgt für alle $n \ge 0$

$$u_n = u_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

und somit

$$u_n = \frac{1}{2} (u_n + u_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x dx.$$

Es folgt

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Da

$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2ny}{2ny} d(2ny) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} dx,$$

so erhalten wir

$$\int_{0}^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} dx - \int_{0}^{\pi/2} \sin 2nx \cot x dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \sin 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) x dx$$

$$= \frac{1}{2n} \int_{0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) x d \cos 2nx$$

$$= \frac{1}{2n} \left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\right]_{0}^{\pi/2}$$

$$+ \frac{1}{2n} \int_{0}^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^{2} x} - \frac{1}{x^{2}}\right) dx. \qquad (12.29)$$

Bemerken wir, dass

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + o(x^3)}{x \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 / 3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = 0$$

so dass die Funktion $\frac{1}{x} - \cot x$ auf $[0, \pi/2]$ beschränkt ist. Somit gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} \left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) \right]_0^{\pi/2} = 0.$$

Da auf $(0, \pi/2)$ gilt $0 < \sin x \le x$, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} > 0$$

woraus folgt

$$0 \le \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx \le \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Da

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \right)^2}{x^2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \left(x^2 - 2x\frac{x^3}{6} \right) + o\left(x^4\right)}{x^2 \left(x^2 + o\left(x^2\right) \right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^4\right)} = \frac{1}{3},$$

so sehen wir, dass die Funktion $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ auf $[0,\pi/2]$ beschränkt ist, woraus folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 0.$$

Somit erhalten wir (12.28) aus (12.29).

Chapter 13

Gleichmäßige Konvergenz von Reihen

13.1 Funktionenfolgen

Seien J eine beliebige Menge und $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen auf J.

Definition. Man sagt, dass die Folge $\{f_k\}$ gegen eine Funktion f punktweise auf J konvergiert falls für jedes $x \in J$ gilt $f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$, d.h.

$$\forall x \in J \quad |f_k(x) - f(x)| \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Die punktweise Konvergenz bezeichnet man mit $f_k \to f$.

Für jede Funktion $f: J \to \mathbb{R}$ definieren wir die sup-Norm von f mit

$$||f|| = ||f||_J := \sup_{x \in J} |f(x)|.$$

Definition. Man sagt, dass $\{f_k\}$ gegen f gleichmäßig auf J konvergiert, falls

$$||f_k - f|| \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Die gleichmäßige Konvergenz bezeichnet man mit $f_k \rightrightarrows f$.

Die gleichmäßige Konvergenz ist offensichtlich eine stärkere Bedingung als die punktweise Konvergenz, da sie äquivalent zu

$$\sup_{I} |f_k - f| \to 0$$

ist, woraus $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ für jedes $x \in J$ folgt.

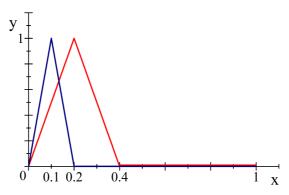
28.11.18

Die Umkehrung gilt nicht: es gibt punktweise konvergente Folgen die nicht gleichmäßig konvergent sind.

Beispiel. 1. Betrachten wir auf $J=(0,+\infty)$ die Funktionen $f_k(x)=\frac{x}{k}$. Für jedes $x \in J$ gilt offensichtlich $f_k(x) \to 0$ für $k \to \infty$ so dass $f_k \to 0$, aber $f_k \not \rightrightarrows 0$ da $||f_k|| = \infty$.

2. Betrachten wir auf J = [0, 1] die Funktionen

$$f_k(x) = \begin{cases} kx, & 0 \le x \le \frac{1}{k} \\ 2 - kx, & \frac{1}{k} \le x \le \frac{2}{k}, \\ 0, & \frac{2}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$



Die Graphen von f_5 und f_{10}

Zeigen wir, dass $f_k \to 0$, d.h. für jedes $x \in [0,1]$ gilt $f_k(x) \to 0$. Für x = 0 ist es offensichtlich, da $f_k(0) = 0$. Für x > 0 gilt x > 2/k für hinreichend große k, woraus $f_k(x) = 0$ folgt. Andererseits, da $||f_k|| = 1$, so sehen wir, dass $f_k \not \rightrightarrows 0$.

Die gleichmäßige Konvergenz ist wichtig da sie die Stetigkeit von Funktionen bewahrt.

Satz 13.1 Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Gilt $f_k \rightrightarrows f$ auf J so ist f auch stetig auf J.

Beweis. Fixieren wir einen Punkt $x \in J$ und beweisen, dass f in x stetig ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus J mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0$$
 gilt $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für fast alle n .

Bemerken wir, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f(x_n) - f(x)| \le |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)|.$$
 (13.1)

Da $||f_k - f|| \to 0$ für $k \to \infty$, so gibt es k mit

$$||f_k - f|| < \varepsilon/3,$$

woraus folgt, dass

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$
 und $|f_k(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon/3$ für alle n .

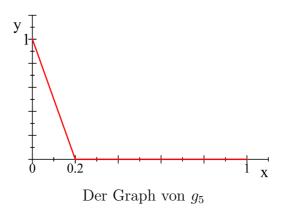
Da f_k stetig ist, so gilt

$$|f_k(x_n) - f_k(x)| < \varepsilon/3$$
 für fast alle n .

Einsetzen in (13.1) ergibt $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für fast alle n, was zu beweisen war.

Beispiel. Die punktweise Konvergenz bewahrt die Stetigkeit nicht. Betrachten wir zum Beispiel die Funktionen

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 - kx, & 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ 0, & \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$



Offensichtlich ist g_k stetig auf [0,1]. Für $k \to \infty$ erhalten wir $g_k(x) \to 0$ für x > 0 und $g_k(0) \to 1$, d.h. $g_k \to g$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Es ist klar, dass g unstetig an 0 ist.

13.2 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen auf einer Menge J. Betrachten wir die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ und ihre Partialsummen

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Definition. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert auf J punktweise bzw gleichmäßig falls die Folge $\{F_n\}$ von Partialsummen punktweise bzw gleichmäßig auf J konvergiert.

Die folgende Aussage gibt ein hilfreiches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen an.

Satz 13.2 (Weierstraßsches Majorantenkriterium; auch Weierstraßscher M-Test) $Sei \{f_k\}$ eine Funktionenfolge auf J mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ auf J absolut und gleichmäßig.

Somit folgt die gleichmäßige Konvergenz von einer Funktionenreihe aus der Konvergenz von der numerischen Reihe.

Beweis. Für jedes $x \in J$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k|| < \infty$$

so dass die Reihe $\sum f_k(x)$ absolut konvergent für jedes $x \in J$ ist. Insbesondere ist diese Reihe punktweise konvergent. Setzen wir

$$F\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(x\right)$$

und beweisen, dass $F_n \rightrightarrows F$ für $n \to \infty$. Für jedes $x \in J$ gilt

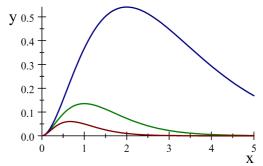
$$|F(x) - F_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||.$$

Da die rechte Seite unabhängig von $x \in J$ ist, so erhalten wir

$$||F - F_n|| = \sup_{x \in J} |F(x) - F_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k||.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, so erhalten wir, dass $||F - F_n|| \to 0$ und somit $F_n \rightrightarrows F$, was zu beweisen war.

Beispiel. Beweisen wir, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$ gleichmäßig auf $[0, +\infty)$ konvergiert. Die Funktion $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ ist positive für x > 0, aber verschwindet in x = 0 und konvergiert gegen 0 für $x \to +\infty$. Es folgt, dass f_k eine Maximumstelle auf $[0, \infty)$ hat.



Funktionen $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ für k = 1, 2, 3

An der Maximumstelle x von f_k gilt $f'_k(x) = 0$, was äquivalent zu $(\ln f_k)' = 0$, d.h.

$$(2\ln x - kx)' = 0,$$

woraus folgt $x = \frac{2}{k}$. Somit erhalten wir

$$||f_k|| = \max_{[0,+\infty)} f_k = f_k \left(\frac{2}{k}\right) = \left(\frac{2}{k}\right)^2 e^{-2} = \frac{4e^{-2}}{k^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, so erhalten wir nach dem Majorantenkriterium dass die Funktionenreihe absolut und gleichmäßig $\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$ auf $[0, +\infty)$ konvergiert.

Definition. Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen auf einem Intervall J. Die Folge $\{f_k\}$ konvergiert auf J lokal gleichmäßig, falls diese Folge auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert. Konvergiert $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig gegen f, so schreibt man $f_k \stackrel{loc}{\Rightarrow} f$.

Analog konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ auf J lokal gleichmäßig falls diese Reihe auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert.

Die Beziehung zwischen den Typen von Konvergenz ist wie folgt:

$$f_k \rightrightarrows f \implies f_k \stackrel{loc}{\rightrightarrows} f \implies f_k \to f.$$

Beispiel. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ ist auf (-1,1) lokal gleichmäßig konvergent, da jedes abgeschlossene beschränkte Intervall $I \subset J$ in einem Intervall [-a,a] mit 0 < a < 1 liegt und somit auf I gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| x^k \right\|_I \le \sum_{k=1}^{\infty} a^k < \infty.$$

Andererseits konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ auf (-1,1) nicht gleichmäßig (siehe Aufgabe 96).

Satz 13.3 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall J. Konvergiert die Folge $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig auf J, so ist der Grenzwert $f(x) = \lim f_k(x)$ stetig auf J. Die ähnliche Eigenschaft gilt auch für die Reihen: die Summe einer lokal gleichmäßig konvergenten Reihe von stetigen Funktionen ist stetig.

Beweis. Auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gilt $f_k \Rightarrow f$. Nach dem Satz 13.1 ist f stetig auf I und somit ist f stetig auch auf J. Die Aussage für die Reihen folgt, da die Partialsummen stetig und lokal gleichmäßig konvergent sind. \blacksquare

13.3 Potenzreihen

Betrachten wir eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{13.2}$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ und bezeichnen wir mit f(x) die Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Der Definitionsbereich von f ist die Menge von allen $x \in \mathbb{R}$ wo die Reihe konvergent ist.

Satz 13.4 Angenommen, dass die Potenzreihe (13.2) für ein $x = x_0 \neq 0$ konvergent ist. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und lokal gleichmäßig auf dem Intervall (-R, R) mit $R = |x_0|$. Folglich ist die Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine stetige Funktion auf (-R, R).

Beweis. Wir beweisen, dass für jedes 0 < r < R die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ auf [-r, r] absolut und gleichmäßig konvergiert. Für jedes $x \in [-r, r]$ gilt

$$\left|c_k x^k\right| = \left|c_k x_0^k \left(\frac{x}{x_0}\right)^k\right| \le \left|c_k x_0^k\right| \left(\frac{r}{R}\right)^k.$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ impliziert, dass $c_k x_0^k \to 0$ für $k \to \infty$. Insbesondere ist die Folge $\{c_k x_0^k\}$ beschränkt, zum Beispiel, $|c_k x_0^k| \leq C$ für alle k und eine Konstante C. Es folgt, dass

$$\left\|c_k x^k\right\|_{[-r,r]} \le C\left(\frac{r}{R}\right)^k.$$

Da $\frac{r}{R} < 1$ und somit die geometrische Reihe $\sum_k \left(\frac{r}{R}\right)^k$ konvergiert, so beschließen wir nach dem M-Test, dass die Potenzreihe $\sum_k c_k x^k$ absolut und gleichmäßig auf [-r,r] konvergiert. Somit konvergiert diese Reihe absolut und lokal gleichmäßig auf (-R,R). Die zweite Aussage folgt aus dem Satz 13.3.

Definition. Der Wert

$$R := \sup \left\{ |x| : \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ konvergiert} \right\} \in [0, +\infty]$$
 (13.3)

heißt der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Das Intervall (-R, R) heißt das Konvergenzintervall der Reihe.

Wir behaupten, dass diese Reihe lokal gleichmäßig auf (-R,R) konvergiert. In der Tat, für jedes $r \in (0,R)$ konvergiert die Reihe für ein x mit r < |x| < R (nach Definition (13.3) von R), woraus die gleichmäßige Konvergenz auf [-r,r] nach dem Satz 13.4 folgt. Andererseits, für jedes x außerhalb [-R,R] divergiert die Reihe einfach nach (13.3). An den Grenzpunkten R und -R kann die Reihe sowohl konvergieren als auch divergieren. Der Definitionsbereich der Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist somit eines von Intervallen (-R,R), [-R,R], (-R,R], [-R,R]. Nach dem Satz 13.3 die Funktion f ist stetig im (-R,R).

30.11.18

Satz 13.5 Für den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gilt die folgende Formel von Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k}}.$$
(13.4)

Beweis. Wir benutzen die folgende Eigenschaft von lim sup: gilt für eine Folge $\{y_k\}$

$$\limsup_{k \to \infty} y_k < c$$

so gilt $y_k < c$ für fast alle k. In der Tat, liegt im $[c, +\infty)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{y_k\}$ so gibt es im $[c, +\infty]$ eine Häufungspunkt der Folge, was unmöglich ist, dass der größte Häufungspunkt lim sup y_n kleiner als c ist.

Definieren wir R mit (13.4) und beweisen, dass die Reihe für |x| < R konvergiert und für |x| > R divergiert. Sei zuerst 0 < |x| < R. Es folgt, dass

$$\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k} = \frac{1}{R} < \frac{1}{|x|}.$$

Offensichtlich gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k} < \frac{1 - \varepsilon}{|x|},$$

woraus folgt, dass

$$(|c_k|)^{1/k} < \frac{1-\varepsilon}{|x|}$$
 für fast alle k .

Somit gilt

$$\left|c_k x^k\right| < \left(1 - \varepsilon\right)^k$$

für fast alle k. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Beweisen wir jetzt, dass für |x| > R die Reihe divergiert. Es gilt dann

$$\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k} > \frac{1}{|x|},$$

und somit gibt es eine Teilfolge $\{c_{k_i}\}$ mit

$$\lim_{i \to \infty} |c_{k_i}|^{1/k} > \frac{1}{|x|}.$$

Daraus folgt, dass für fast alle i gilt $\left|c_{k_i}x^{k_i}\right| > 1$ und somit die Reihe $\sum c_kx^k$ divergiert.

Beispiel. Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ ist konvergent für x=-1, woraus folgt, dass sie auf (-1,1) konvergent ist. Für |x|>1 gilt $\frac{|x|^k}{k}\to\infty$ so dass die Reihe divergiert. Somit ist das Konvergenzradius gleich 1 und das Konvergenzintervall (-1,1). Das Gleiche folgt auch aus (13.4) da $\left(\frac{1}{k}\right)^{1/k}=\frac{1}{k^{1/k}}\to 1$ für $k\to\infty$.

Der Definitionsbereich der Reihe ist [-1,1), da die Reihe an x=-1 konvergiert und an x=1 divergiert.

Nach dem Satz 13.4 ist die Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ stetig auf dem Konvergenzintervall (-R,R). Ist f am Grenzpunkt x=R oder x=-R definiert, so entsteht die Frage, ob f an diesem Grenzpunkt auch stetig ist. Die Antwort ist positive und wird im folgenden Satz gegeben.

Satz 13.6 (Satz von Abel) Die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist stetig in jedem Punkt $x = x_0 \neq 0$ wo die Reihe konvergiert.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x_0 = 1$ (sonst umbenennen x/x_0 in x) und f(1) = 0 (sonst c_0 ändern). Wir werden beweisen, dass f(x) stetig auf [0,1] ist, insbesondere an x=1.

Wir benutzen die abelsche partielle Summation um die Reihe $\sum c_k x_k$ umzuformen. Bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + \dots + c_n$$

und $s_{-1} = 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}_+$ gilt

$$c_k = s_k - s_{k-1}.$$

Da

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = f(1) = 0,$$

so ist die Folge $\{s_n\}$ konvergent und somit beschränkt, woraus folgt, das die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

nach dem Majorantenkriterium für alle $x \in (-1,1)$ konvergiert. Es gilt somit für alle $x \in (-1,1)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k.$$

Da der Glied $s_{k-1}x^k$ für k=0 verschwindet, so lässt sich der Index k in der letzten Summe von k=1 anfangen. Zudem umbenennen wir in dieser Summe k-1 in k und somit erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1}$$

und

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s_k (x^k - x^{k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-x) s_k x^k.$$
(13.5)

Für x=1 gilt die Identität (13.5) auch da f(1)=0. Beweisen wir, dass die Reihe (13.5) gleichmäßig auf [0,1] konvergiert, woraus die Stetigkeit von f auf [0,1] folgen wird. Die Partialsummen sind

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (1-x) s_k x^k,$$

und für alle $x \in [0, 1)$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-x) s_k x^k \right| \le \sup_{k \ge n} |s_k| (1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$$

$$\le \sup_{k \ge n} |s_k| (1-x) \frac{1}{1-x}$$

$$= \sup_{k \ge n} |s_k|.$$

Für x = 1 gilt diese Ungleichung auch, da $f(1) = f_n(1) = 0$. Somit erhalten wir für alle $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \le \sup_{k \ge n} |s_k|,$$

woraus folgt

$$||f - f_n||_{[0,1]} = \sup_{[0,1]} |f - f_n| \le \sup_{k \ge n} |s_k|.$$

Da $s_n \to 0$ für $n \to \infty$, so erhalten wir $\sup_{k \ge n} |s_k| \to 0$ und auch

$$||f - f_n||_{[0,1]} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

woraus die gleichmäßige Konvergenz $f_n \Rightarrow f$ auf [0,1] folgt. Nach dem Satz 13.1 ist f auf [0,1] stetig. \blacksquare

Beispiel. Es gilt die folgende Identität für alle $x \in (-1,1)$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
 (13.6)

(siehe Aufgabe 97). Die Potenzreihe (13.6) hat den Konvergenzradius 1, aber konvergiert auch an dem Grenzpunkt x=1, was aus dem Leibniz-Kriterium folgt, da die Folge alternierend ist und die Glieder monoton fallend sind. Nach dem Satz 13.6 ist die Summe der Reihe stetig an x=1. Da arctan x auch stetig an x=1 ist, so erhalten wir, dass die Identität (13.6) auch für x=1 gilt (und analog für x=-1). Da arctan x=10 arctan x=11 se erhalten wir die Identität

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

$$|s_k| < \varepsilon$$
 für alle $k > N$.

Daraus folgt, dass für alle $n \geq N$

$$\sup_{k \ge n} |s_k| \le \sup_{k \ge N} |s_k| \le \varepsilon$$

und somit $\sup_{k\geq n} |s_k| \to 0$ für $n\to\infty$.

¹Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit

13.4 Integrations unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.7 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall [a,b]. Konvergiert f_n gleichmäßig auf [a,b] gegen eine Funktion f, so gilt

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{k \to \infty} \int_{a}^{b} f_{k}(x) dx.$$
(13.7)

Man kann auch schreiben

$$\int_{a}^{b} \lim_{k \to \infty} f_{k}(x) dx = \lim_{k \to \infty} \int_{a}^{b} f_{k}(x) dx$$

so dass die Operationen gleichmäßiger lim und \int_a^b vertauschbar sind.

Beweis. Die Funktion f ist stetig nach dem Satz 13.1 und somit integrierbar. Es gilt

$$\left| \int_{a}^{b} f_{k}(x) dx - \int_{a}^{b} f(x) dx \right| = \left| \int_{a}^{b} (f_{k} - f) dx \right|$$

$$\leq \int_{a}^{b} |f_{k} - f| dx$$

$$\leq \sup_{[a,b]} |f_{k} - f| (b - a) = ||f_{k} - f|| (b - a),$$

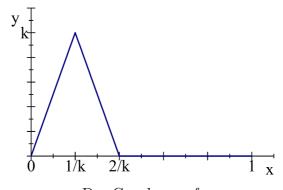
wo wir die LM-Ungleichung des Satzes 11.10 verwendet haben. Da $f_k \rightrightarrows f$ und somit $||f_k - f|| \to 0$, so erhalten wir

$$\left| \int_{a}^{b} f_{k}(x) dx - \int_{a}^{b} f(x) dx \right| \to 0,$$

was äquivalent zu (13.7) ist. ■

Beispiel. Die Voraussetzung von der gleichmäßigen Konvergenz ist wichtig für den Satz 13.7. Die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ ergibt die Konvergenz von Integralen nicht. Zum Beispiel, betrachten wir die folgenden Funktionen auf [0,1]:

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ 2k - k^2 x, & \frac{1}{k} \le x \le \frac{2}{k}, \\ 0, & \frac{2}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$



Der Graph von f_k

Es gilt die punktweise Konvergenz $f_k \to 0$ auf [0,1], aber

$$\int_{0}^{1} f_{k}(x) dx \ge \int_{0}^{1/k} f_{k} dx = \int_{0}^{1/k} k^{2} x dx = k^{2} \left[\frac{x^{2}}{2} \right]_{0}^{1/k} = \frac{1}{2}$$

und somit

$$\int_{0}^{1} f_{k}(x) dx \neq 0.$$

Korollar 13.8 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen auf [a,b] Funktionen. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf [a,b] so gilt

$$\int_{a}^{b} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a}^{b} f_k(x) dx.$$
 (13.8)

In anderen Wörtern, die Operationen \int_a^b und $\sum_{k=1}^\infty$ über einer Funktionenreihe sind vertauschbar, vorausgesetzt, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Noch eine Umformulierung von (13.8): die Reihe lässt sich *gliedweise* Integrieren vorausgesetzt dass sie gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Setzen wir

$$F_n = \sum_{k=1}^n f_k.$$

Da die Folge $\{F_n\}$ gleichmäßig auf [a,b] konvergiert, so gilt nach dem Satz 13.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{a}^{b} f_k dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{a}^{b} f_k dx = \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} F_n dx \to \int_{a}^{b} \lim_{n \to \infty} F_n dx = \int_{a}^{b} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) dx$$

was zu beweisen war.

Satz 13.9 Sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergent auf einem Intervall (-R,R) mit R>0 (insbesondere kann R der Konvergenzradius sein). Dann gilt für alle $x \in (-R,R)$

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}.$$
 (13.9)

Beweis. Für x = 0 ist (13.9) trivial. Sei $x \in (0, R)$. Nach dem Satz 13.4 konvergiert die Reihe $\sum c_k t^k$ gleichmäßig auf dem Intervall [0, x]. Nach dem Korollar 13.8 lässt sich die Identität

$$f\left(t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

auf dem Intervall [0, x] integrieren:

$$\int_{0}^{x} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0}^{x} c_{k} t^{k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k}}{k+1} x^{k+1}.$$

05.12.18

Analog betrachtet man den Fall x < 0.

Beispiel. Betrachten wir die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

die für |x| < 1 konvergiert. Nach (13.9) erhalten wir für alle $x \in (-1,1)$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{k+1}}{k+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Andererseits gilt

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln\left(1-x\right),\,$$

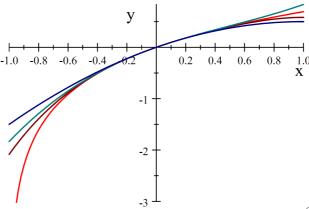
woraus folgt

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right).$$

Der Wechsel von x nach -x ergibt die folgende Identität

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \qquad (13.10)$$

die für alle $x \in (-1,1)$ gilt. Die Reihe in (13.10) heißt die Taylorreihe der Funktion $\ln(1+x)$. Die Partialsummen von dieser Reihe sind die Taylor-Polynome der gleichen Funktion.



Die Funktion $\ln(1+x)$ (rot) und die Partialsummen $x-\frac{x^2}{2}, x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},$ $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$

Bemerken wir, dass die Reihe in (13.10) für x=1 die Leibniz-Reihe ist, die konvergent ist. Nach dem Satz 13.6 ist die Summe der Reihe (13.10) stetig an x=1. Da $\ln{(1+x)}$ auch an x=1 stetig ist, so beschließen wir, dass (13.10) auch an x=1 gilt, d.h.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

An x = -1 divergiert die Reihe (13.10), und auch $\ln(1+x)$ ist nicht definiert.

13.5 Differenzieren unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.10 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass

- $f_k \to f$ punktweise auf J;
- $f'_k \stackrel{loc}{\Longrightarrow} g$ auf J.

Dann ist die Funktion f stetig differenzierbar und es gilt f' = g.

Äquivalente Formulierung: es gilt

$$\left(\lim_{k\to\infty} f_k\right)' = \lim_{k\to\infty} f_k',$$

vorausgesetzt, dass $\{f_k\}$ punktweise konvergiert und $\{f'_k\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. In diesem Fall sind die Operationen lim und Ableitung vertauschbar.

Beweis. Fixieren wir ein $c \in J$. Nach der Newton-Leibniz-Formel haben wir für alle $x \in J$

$$f_k(x) - f_k(c) = \int_c^x f'_k(t) dt.$$
 (13.11)

Da $f'_k \stackrel{loc}{\Longrightarrow} g$ auf J, so ist g stetig in J nach dem Satz 13.3. Da $f'_k \rightrightarrows g$ auf [x, c] (oder [c, x] falls x > c), so erhalten wir nach dem Satz 13.7

$$\int_{c}^{x} f'_{k}(t) dt \to \int_{c}^{x} g(t) dt \text{ as } k \to \infty.$$

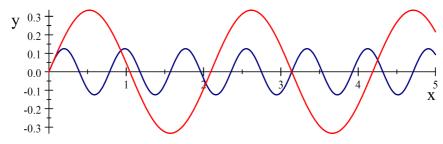
Es folgt aus (13.11) für $k \to \infty$, dass

$$f(x) - f(c) = \int_{c}^{x} g(t) dt.$$

Nach dem Satz 11.13 beschließen wir, dass f' = g, was zu beweisen war.

Bemerken wir, dass die Behauptung von dem Satz 13.10 über die Ableitung ist, während der Beweis auf Integration basiert.

Beispiel. Die Konvergenz $f_k \Rightarrow f$ allein ergibt $f'_k \to f'$ nicht. Zum Beispiel, die Folge $f_k = \frac{1}{k} \sin kx$ konvergiert gegen 0 gleichmäßig auf \mathbb{R} aber $f'_k = \cos kx$ konvergiert nicht.



Funktionen $\frac{1}{3}\sin 3x$ und $\frac{1}{8}\sin 8x$

Korollar 13.11 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass

- die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist auf J punktweise konvergent;
- die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ ist auf J lokal gleichmäßig konvergent.

Dann qilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'. \tag{13.12}$$

In anderen Wörtern: die Reihe lässt sich gliedweise ableiten vorausgesetzt dass sie punktweise konvergiert und die Reihe von Ableitungen lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Die Partialsummen $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ erfüllen alle Voraussetzungen des Satzes 13.10, woraus folgt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \left(\lim_{n \to \infty} F_n\right)' = \lim_{n \to \infty} F_n' = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n f_k' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k',$$

was zu beweisen war.

Satz 13.12 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius R > 0. Dann ist die Funktion

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

in (-R,R) unendlich oft differenzierbar, es gilt in (-R,R)

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1},$$
(13.13)

und der Konvergenzradius der Reihe (13.13) ist auch R.

Beweis. Sei R' der Konvergenzradius der Reihe $\sum_k c_k k x^{k-1}$. Nach dem Satz 13.5 gilt

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{k \to \infty} (k |c_k|)^{1/k} = \lim_{k \to \infty} k^{1/k} \limsup_{k \to \infty} (|c_k|)^{1/k} = \frac{1}{R},$$

da $k^{1/k} \to 1$ für $k \to \infty$. Somit erhalten wir R' = R. Insbesondere konvergiert die Reihe (13.13) lokal gleichmäßig in (-R, R).

Nach dem Korollar 13.11 gilt für alle $x \in (-R, R)$

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1},$$

da $\sum_k c_k x^k$ punktweise konvergiert und $\sum_k c_k k x^{k-1}$ lokal gleichmäßig in (-R,R) konvergiert. Somit ist f in (-R,R) differenzierbar und es gilt (13.13).

Es bleibt nur zu beweisen, dass f unendlich oft differenzierbar ist. Dafür bemerken wir, dass die Reihe $f'(x) = \sum_k c_k k x^{k-1}$ mit den gleichen Konvergenzradius R alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. Somit beschließen wir, dass f' in (-R,R) differenzierbar ist,

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k (k-1) x^{k-2},$$

und der Konvergenzradius dieser Reihe gleich R ist. Per Induktion erhalten wir weiter, dass f unendlich oft in (-R, R) differenzierbar ist.

Beispiel. Betrachten wir die Identität

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

in (-1,1). Ableiten davon ergibt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Wieder Ableiten ergibt

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2},$$

usw. Alle diese Identitäten gelten in (-1,1).

13.6 Taylorreihe

Sei die Potenzreihe

$$f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

konvergent in einem Intervall (-R,R) mit R>0. Nach dem Satz 13.12 erhalten wir per Induktion nach n

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k (k-1) \dots (k-n+1) x^{n-k}.$$

Insbesondere für x = 0 gilt

$$f^{n}(0) = c_{n}n(n-1)...(n-n+1) = c_{n}n!$$

und somit

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Umgekehrt, sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $0 \in J$. Betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
 (13.14)

und stellen die Frage ob diese Reihe gegen f(x) konvergiert.

Definition. Die Reihe (13.14) heißt die *Taylorreihe* der Funktion f an der Stelle 0 (oder Macklaurin-Reihe).

Es folgt aus dem obigen Argument, dass jede konvergente Potenzreihe mit der Taylorreihe seiner Summe übereinstimmt.

Die Umkehrung gilt nicht: obwohl die Taylorreihe für alle unendlich oft differenzierbare Funktionen definiert ist, muss sie nicht gegen f(x) konvergieren (oder überhaupt konvergieren).

Die Partialsummen der Taylorreihe (13.14) sind offensichtlich die Taylor-Polynome

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Somit konvergiert die Reihe (13.14) gegen f(x) genau dann, wenn

$$f(x) - T_n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Um diese Bedingung überprüfen zu können, brauchen wir Abschätzung des Restgliedes $f(x) - T_n(x)$.

Eine Darstellung des Restgliedes wurde im Satz 9.3 gegeben (die Taylorformel mit Lagrange-Restglied). Hier beweisen wir eine andere Darstellung.

Hauptsatz 13.13 (Taylorformel mit Integralrestglied) Sei f eine (n + 1)-fach stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $0 \in J$. Dann gilt für jedes $x \in J$

$$f(x) = T_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$
 (13.15)

Die Funktion

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$
(13.16)

heißt das Integralrestglied.

Beweis. Beweisen die Taylorformel

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$
(13.17)

per Induktion nach n. Für den Induktionsanfang für n=0 haben wir nach den Newton-Leibniz-Formel

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = T_0(x) + R_0(x).$$

Für den Induktionsschritt von n-1 nach n nehmen wir die Induktionsvoraussetzung

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$
(13.18)

an und beweisen die Induktionsbehauptung (13.17). Die partielle Integration ergibt

$$R_{n}(x) = \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^{n}}{n!} df^{(n)}(t)$$

$$= \left[f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n}}{n!} \right]_{0}^{x} - \int_{0}^{x} f^{(n)}(t) d\frac{(x-t)^{n}}{n!}$$

$$= -\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n} + \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

$$= -\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{n} + R_{n-1}(x).$$

woraus folgt

$$T_{n}(x) + R_{n}(x) = \left(T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}\right) + \left(-\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n} + R_{n-1}(x)\right)$$
$$= T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x),$$

was zu beweisen war.

Korollar 13.14 Sei f unendlich oft differenzierbar im Intervall J mit $0 \in J$. Sei $x \in J$. Die Identität

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
 (13.19)

gilt genau dann wenn $R_n(x) \to 0$.

Beweis. Offensichtlich folgt diese Aussage aus (13.15). ■

Beispiel. Bestimmen wir die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(x) = e^x$ und $f^{(n)}(0) = 1$, so erhalten wir die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wir wissen, dass die Summe dieser Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich e^x ist. Beweisen wir dies noch einmal, mit Hilfe von dem Korollar 13.14. Es gilt

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Da $e^t \leq e^{|x|}$ und $|x-t| \leq |x|$, so erhalten wir nach der LM-Ungleichung

$$|R_n(x)| \le e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} |x|.$$

Da $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$, so erhalten wir $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$, woraus folgt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

was natürlich uns schon bekannt ist.

Beispiel. Bestimmen wir die Taylorreihe für die Funktion

$$f\left(x\right) = \left(1 + x\right)^{p}$$

wobei $p \in \mathbb{R}$ und x > -1. Es gilt

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}, \quad f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \dots$$

und

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)...(p-n+1)(1+x)^{p-n}$$
.

Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(0) = p(p-1)...(p-n+1), n \in \mathbb{N},$$

und f(0) = 1. Somit ist die Taylorreihe von f wie folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n, \tag{13.20}$$

wobei

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\binom{p}{0} = 1.$$

Bemerken wir, dass für $p \in \mathbb{N}$ und $0 \le n \le p$ gilt

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} \frac{(p-n)!}{(p-n)!} = \frac{p!}{n!(p-n)!},$$

was mit der üblichen Definition von Binomialkoeffizienten übereinstimmt.

Beweisen wir, dass für jedes $p \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe (13.20) gegen f(x) für alle $x \in (-1, 1)$ konvergiert, d.h. es gilt

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n.$$
 (13.21)

Die Reihe in (13.21) heißt die binomische Reihe. Die Identität (13.21) ist eine Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatz. In der Tat, für $p \in \mathbb{N}$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} x^n,$$

was mit (13.21) übereinstimmt, da in diesem Fall alle Koeffizienten $\binom{p}{n}$ mit p > n verschwinden.

Um (13.21) zu beweisen, zeigen wir, dass für alle $x \in (-1, 1)$ gilt $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Wir haben

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

=
$$\frac{p(p-1)...(p-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)} dt.$$

Die Substitution t = xs ergibt

$$\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)} dt = \int_0^1 (x-xs)^n (1+xs)^{p-(n+1)} x ds$$
$$= x^n \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^n} (1+xs)^{p-1} x ds.$$

Da $1 - s \le 1 + xs$ (da $x \ge -1$), so erhalten wir

$$\frac{\left(1-s\right)^n}{\left(1+xs\right)^n} \le 1$$

und somit

$$\left| \int_{0}^{x} (x-t)^{n} (1+t)^{p-(n+1)} dt \right| \le C |x|^{n},$$

wobei $C = C(x) = \int_0^1 (1+xs)^{p-1} |x| ds < \infty.$

Es folgt, dass

$$|R_n(x)| \leq C \left| \frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} \right| |x|^n$$

$$= C|p| \left| \frac{(1-p)(2-p)\dots(n-p)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n} \right| |x|^n$$

$$= C|p| \left| \left(1 - \frac{p}{1}\right) x \left(1 - \frac{p}{2}\right) x \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) x \right|$$

$$= C|p| \prod_{k=1}^n \left|1 - \frac{p}{k}\right| |x|.$$

Da $1 - \frac{p}{k} \to 1$ für $k \to \infty$, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\left|1 - \frac{p}{k}\right| < 1 + \varepsilon$$
 für fast alle k ,

und somit

$$\left|1 - \frac{p}{k}\right| |x| < (1 + \varepsilon) |x| =: q.$$

Da |x| < 1, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass q < 1. Dann gilt es für fast alle n

$$|R_n(x)| \le \operatorname{const}(x) q^n$$

woraus $R_n(x) \to 0$ folgt.

Im Fall p > 0 kann man analog beweisen, dass die Identität (13.21) für alle $x \in [-1,1]$ gilt und die binomische Reihe in [-1,1] gleichmäßig konvergiert (siehe Aufgabe 106).

13.7 * Sätze von der majorisierten und monotonen Konvergenz

Satz 13.15 (Satz von der majorisierten Konvergenz) Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b) die lokal gleichmäßig auf (a,b) gegen f konvergiert. Sei g eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf (a,b) mit

$$\int_{a}^{b} g(x) dx < \infty. \tag{13.22}$$

Gilt für alle k

$$|f_k| \le g \quad auf \ (a,b) \tag{13.23}$$

so gilt

$$\int_{a}^{b} f_{k}(x) dx \to \int_{a}^{b} f(x) dx \quad f \ddot{u} r k \to \infty. \tag{13.24}$$

Die Funktion g mit (13.22)-(13.23) heißt integrierbare Majorante der Folge $\{f_k\}$. Beweis. Wählen wir ein $c \in (a,b)$ und beweisen, dass

$$\int_{a}^{c} f_{k}(x) dx \to \int_{a}^{c} f(x) dx. \tag{13.25}$$

Analoge Eigenschaft gilt auch für Integration von c bis b, woraus (13.24) folgen wird. Für jedes a < t < c haben wir

$$\int_{a}^{c} f_{k}(x) dx = \int_{a}^{t} f_{k}(x) dx + \int_{t}^{c} f_{k}(x) dx.$$

Da $f_k \rightrightarrows f$ auf [t, c], so auf [t, c] gilt

$$\int_{t}^{c} f_{k}(x) dx \to \int_{t}^{c} f(x) dx \text{ für } k \to \infty.$$

Andererseits,

$$\left| \int_{a}^{t} f_{k}(x) dx \right| \leq \int_{a}^{t} \left| f_{k}(x) \right| dx \leq \int_{a}^{t} g(x) dx$$

und analog

$$\left| \int_{a}^{t} f(x) \, dx \right| \le \int_{a}^{t} g(x) \, dx$$

Somit haben wir

$$\int_{a}^{c} f_{k}(x) dx - \int_{a}^{c} f(x) dx = \int_{a}^{t} f_{k}(x) dx - \int_{a}^{t} f(x) dx + \int_{t}^{c} f_{k}(x) dx - \int_{t}^{c} f(x) dx$$

woraus folgt

$$\left| \int_{a}^{c} f_{k}(x) dx - \int_{a}^{c} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{a}^{t} f_{k}(x) dx - \int_{a}^{t} f(x) dx \right| + \left| \int_{t}^{c} f_{k}(x) dx - \int_{t}^{c} f(x) dx \right|$$

$$\leq 2 \int_{a}^{t} g(x) dx + \left| \int_{t}^{c} f_{k}(x) dx - \int_{t}^{c} f(x) dx \right|.$$

Es folgt aus (13.22), dass

$$\int_{a}^{t} g(x) dx \to 0 \text{ für } t \to a - .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir t so dass

$$\int_{a}^{t} g(x) \, dx < \varepsilon/4.$$

Dann gilt es N so dass für alle k > N gilt

$$\left| \int_{t}^{c} f_{k}(x) dx - \int_{t}^{c} f(x) dx \right| < \varepsilon/2.$$

Es folgt, dass

$$\left| \int_{a}^{c} f_{k}(x) dx - \int_{a}^{c} f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

woraus (13.25) folgt.

Korollar 13.16 Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b). Angenommen seien die folgenden Bedingungen:

- (a) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert lokal gleichmäßig auf (a,b); (b) es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq g(x)$ wobei g eine lokal integrierbare nichtnegative Funktion auf (a,b) mit

$$\int_{a}^{b} g(x) \, dx < \infty.$$

Dann qilt

$$\int_{a}^{b} \sum_{k=1}^{\infty} f_{k}(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a}^{b} f_{k}(x) dx.$$
 (13.26)

Beweis. Bezeichnen wird

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx$$

und

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) dx.$$

Es folgt, dass $F_n \stackrel{loc}{\Longrightarrow} F$ auf (a,b) und

$$|F_n(x)| \le g(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Nach dem Satz 13.15 gilt

$$\int_{a}^{b} F_{n}(x) dx \to \int_{a}^{b} F(x) dx,$$

woraus (13.26) folgt. \blacksquare

Satz 13.17 (Satz von Dini) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall J die punktweise gegen eine stetige Funktion f auf J konvergiert. Dann gilt auch die gleichmäßige Konvergenz $f_n \Rightarrow f$ auf J.

Beweis. Bezeichnen wir $g_n = f - f_n$. Dann ist $\{g_n\}$ eine monoton fallende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen die auf J punktweise gegen 0 konvergiert. Zu beweisen ist, dass $g_n \rightrightarrows 0$ auf J, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \ge N \ \sup_{I} |g_n| < \varepsilon.$$

Da $g_n \ge 0$ und g_n monoton fallend ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } g_n(x) < \varepsilon \text{ für alle } x \in J.$$
 (13.27)

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$. Nach der Voraussetzung haben wir $g_n(x) \to 0$ für jedes $x \in J$, insbesondere

$$\forall x \in J \quad \exists n_x \text{ so dass } g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Da g_{n_x} stetig ist, so existiert ein offenes Intervall U_x mit Zentrum x so dass auch

$$g_{n_x} < \varepsilon \text{ auf } U_x \cap J.$$
 (13.28)

Das Mengensystem $\{U_x\}_{x\in J}$ ist eine Überdeckung von J mit offenen Intervallen. Nach dem Überdeckungssatz gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_i}\}$ von J. Setzen wir

$$n = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, ...).$$

Es folgt aus (13.28) und aus den Monotonie der Folge $\{g_n\}$, dass

$$g_n < \varepsilon$$
 auf $U_{x_i} \cap J$ für jedes $i = 1, ..., m$.

Da $\bigcup_{i=1}^m U_{x_i} \supset J$, so erhalten wir, dass

$$q_N < \varepsilon$$
 auf J.

Nach der Monotonie folgt es, dass auch für alle $n \geq N$ gilt $||g_n|| < \varepsilon$, was (13.27) beweist.

Satz 13.18 (Sätze von der monotonen Konvergenz)

(a) Sei $\{f_n\}$ eine monoton steigende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall (a,b), die gegen eine stetige Funktion f auf (a,b) punktweise konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} f_n(x) dx = \int_{a}^{b} f(x) dx. \tag{13.29}$$

(b) Sei $\{f_n\}$ eine monoton fallende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall (a,b), die gegen eine stetige Funktion f auf (a,b) punktweise konvergiert. Gilt für ein m

$$\int_{a}^{b} f_{m}(x) dx < \infty, \tag{13.30}$$

so gilt (13.29).

Beweis. Nach dem Satz von Dini (Satz 13.17) ist die Konvergenz in den beiden Fällen lokal gleichmäßig. Nach dem Satz 13.15, um (13.29) zu beweisen, reicht es eine integrierbare Majorante g zu erstellen, d.h. eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf (a,b) die die Bedingungen

$$\int_{a}^{b} g\left(x\right) dx < \infty$$

und

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \forall x \in (a,b) \ \forall n$$

erfüllt.

Im Fall (b) ist die Funktion $g=f_m$ die integrierbare Majorante (es reicht die Folge $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ zu betrachten).

Im Fall (a) gibt es zwei Möglichkeiten. Gilt

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx < \infty,$$

so ist g = f die integrierbare Majorante.

Im Fall

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \infty \tag{13.31}$$

müssen wir beweisen, dass

$$\int_{a}^{b} f_{n}(x) dx \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$
 (13.32)

Nach definition vom uneigentlichen Integral, (13.31) impliziert folgendes: für jedes E > 0 existiert ein Intervall $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ mit

$$\int_{a}^{\beta} f(x) \, dx > E.$$

Da $f_n \rightrightarrows f$ auf $[\alpha, \beta]$, so erhalten wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > E,$$

woraus folgt, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} f_n(x) \, dx > E.$$

Da E beliebig ist, so erhalten wir (13.32).

Die Bedingung (13.30) im Fall (b) ist wesentlich. In der Tat, für die Folge $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}$ auf $(0, \infty)$ gilt $f_n \rightrightarrows 0 = f$ aber

$$\int_{0}^{\infty} f_n(x) dx = \infty \neq 0 = \int_{0}^{\infty} f(x) dx.$$

Der Grund dafür ist, dass alle $\int_{0}^{\infty} f_{n}(x) dx$ divergent sind.

13.8 * Gauss-Integral

Satz 13.19 *Es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$
(13.33)

Für den Beweis brauchen wir das folgende lemma.

Lemma 13.20 Für die Funktion $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ auf $(0,+\infty)$ ist monoton steigend und konvergiert gegen e für $t\to +\infty$.

Beweis. Es reicht zu beweisen, dass $\ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ monoton steigend ist, d.h.

$$\left(t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)' \ge 0$$

für alle t > 0. Die Ableitung ist gleich

$$\left(t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)' = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) + t\frac{1}{1 + \frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{1 + t},$$

und wir müssen beweisen, dass

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \ge \frac{1}{1+t} \tag{13.34}$$

für alle t > 0. Setzen wir $x = \frac{1}{1+t}$ so dass 0 < x < 1. Dann gilt

$$1 + \frac{1}{t} = \frac{1}{1 - x},$$

und (13.34) ist äquivalent zu

$$\frac{1}{1-x} \ge e^x.$$

Diese Ungleichung gilt für alle 0 < x < 1 da

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x.$$

Um

$$\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$$

zu beweisen, bemerken wir, reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{t \to +\infty} t \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) = 1.$$

Mit der Substitution $x = \frac{1}{t}$ ist diese Identität äquivalent zu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+x\right)}{x} = 1,$$

was gilt, da nach der Taylorformel

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$
 für $x \to 0$.

Beweis von dem Satz 13.19. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f_n\left(x\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{x^2}}\right)^{x^2},$$

so folgt aus dem Lemma 13.20 die Folge $\left\{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotone steigend ist und gegen e^{x^2} für $n\to\infty$ konvergiert.

Somit ist die Folge $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und konvergiert für jedes $x\in\mathbb{R}$ gegen e^{-x^2} für $n\to\infty$.

Da für die Funktion

$$f_1\left(x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \pi < \infty,$$

so beschließen wir nach dem Satz 13.18(b) dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \tag{13.35}$$

Andererseits die Substitution $y = x/\sqrt{n}$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1 + y^2)^n}.$$

Die inverse Substitution $y = \cot t, t \in (0, \pi)$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \sqrt{n} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 t \left(1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)^n} = \sqrt{n} \int_0^{\pi} \sin^{2n-2} t dt.$$

Da nach dem Satz 11.18 gilt

$$\int_0^\pi \sin^{2n-2}t dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{2n-2}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \text{ für } n \to \infty,$$

so erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \to \sqrt{\pi},$$

was zusammen mit (13.35) ergibt (13.33).

Korollar 13.21 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Beweis. Nach Definition (12.26) von Γ -Funktion und nach (13.33) erhalten wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-t} d\left(t^{1/2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

13.9 * Approximationssatz von Weierstraß

Hauptsatz 13.22 Für jede stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall J gibt es eine Folge von Polynomen $\{P_n\}$ mit $P_n \rightrightarrows f$ auf J für $n \to \infty$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir J=[0,1] an. Wir verwenden die Bernstein-Polynome: für jedes $n \in \mathbb{N}$ und k=0,...,n setzen wir

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Zum Beispiel,

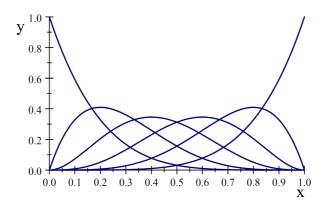
$$B_{1,0}(x) = 1 - x$$
, $B_{1,1}(x) = x$
 $B_{2,0}(x) = (1 - x)^2$, $B_{2,1}(x) = 2x(1 - x)$, $B_{2,2}(x) = x^2$.

Offensichtlich ist das Polynom $B_{n,k}$ immer nichtnegativ auf [0,1]. Sei 0 < k < n. Dann die Funktion $B_{n,k}(x)$ verschwindet an x = 0 und x = 1, und hat die Maximumstelle an $x = \frac{k}{n}$ da

$$(\ln B_{n,k}(x))' = (k \ln x + (n-k) \ln (1-x))'$$

= $\frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x}$

und die Gleichung $\frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x} = 0$ die einzige Nullstelle $x = \frac{k}{n}$ hat.



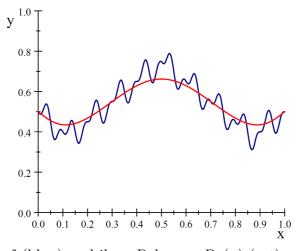
Polynome $B_{5,k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$
(13.36)

und beweisen, dass

$$P_n \rightrightarrows f$$
 auf $[0,1]$ für $n \to \infty$.



Funktion f (blau) und ihres Polynom $P_n(x)$ (rot) mit n = 20

Der Beweis basiert auf den folgenden Identitäten für Bernstein-Polynome, die für alle \boldsymbol{x} gelten:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1 \tag{13.37}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) = nx \tag{13.38}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(x) = n(n-1) x^{2}$$
(13.39)

und

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$
 (13.40)

Für den Beweis verwenden wir den binomischen Lehrsatz in der Form:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}.$$
 (13.41)

Für a = 1 - x erhalten wir

$$1 = \sum_{k=0}^{n} {n \choose k} x^{k} (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k} (x),$$

was mit (13.37) übereinstimmt.

Ableiten von (13.41) ergibt

$$n(x+a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} a^{n-k}.$$
 (13.42)

Einsetzen hier a = 1 - x und Multiplizieren mit x ergibt (13.38).

Weiteres Ableiten von (13.42) ergibt

$$n(n-1)(x+a)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} a^{n-k}.$$

Einsetzen hier a = 1 - x und Multiplizieren mit x^2 ergibt (13.39).

Es folgt aus (13.38) und (13.39), dass

$$\sum_{k=0}^{n} k^{2} B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k (k-1) B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x)$$
$$= n (n-1) x^{2} + nx.$$

Jetzt beweisen wir (13.40). Da

$$\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2},$$

so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^{2} B_{n,k}(x) = x^{2} \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - 2\frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}(x) + \frac{1}{n^{2}} \sum_{k=0}^{n} k^{2} B_{n,k}(x)$$

$$= x^{2} - 2\frac{x}{n} nx + \frac{1}{n^{2}} \left(n (n-1) x^{2} + nx \right)$$

$$= \frac{(1-x) x}{n}.$$

Jetzt können wir beweisen, dass die Polynome P_n aus (13.36) gegen f gleichmäßig auf [0,1] konvergieren. Nach Lemma 11.4, die Funktion f ist auf [0,1] gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass für alle $x,y \in [0,1]$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
 (13.43)

Fixieren wir ein solches Paar ε , δ und schätzen die Differenz $f(x) - P_n(x)$ wie folgt ab. Für jedes $x \in [0, 1]$ mit Hilfe von (13.37) erhalten wir

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x) B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x)$$

$$= \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x).$$

Im Bereich $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$ gilt nach (13.43)

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon$$

woraus folgt, dass

$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left(f\left(x \right) - f\left(\frac{k}{n} \right) \right) B_{n,k} \left(x \right) \right| \leq \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left| f\left(x \right) - f\left(\frac{k}{n} \right) \right| B_{n,k} \left(x \right)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} B_{n,k} \left(x \right) \leq \varepsilon.$$

Sei $C = \sup_{[0,1]} |f| < \infty$. Dann gilt

$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \ge \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \le 2C \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \ge \delta} B_{n,k}(x).$$

Nach (13.40) gilt

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \ge \delta} B_{n,k}\left(x\right) \le \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \ge \delta} \frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} B_{n,k}\left(x\right) \le \frac{1}{\delta^2} \frac{x\left(1-x\right)}{n} \le \frac{1}{\delta^2 n},$$

woraus folgt

$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \ge \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \le \frac{2C}{\delta^2 n}.$$

Somit erhalten wir für alle $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - P_n(x)| \le \varepsilon + \frac{2C}{\delta^2 n}.$$

Jetzt wählen wir n so gross dass

$$\frac{2C}{\delta^2 n} < \varepsilon$$

und somit erhalten

$$||f - P_n||_{[0,1]} \le 2\varepsilon$$

woraus $P_n \rightrightarrows f$ folgt.

Zweiter Beweis. Bezeichnen wir mit A[a,b] die Menge von allen stetigen Funktionen f auf [a,b] so dass es eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen gibt mit $P_n \rightrightarrows f$ auf [a,b]. We müssen beweisen, dass A[a,b] alle stetige Funktionen auf [a,b] enthält.

Schritt 1. Beweisen wir, dass die Funktion f(x) = |x| in A[-1,1] liegt. Wir haben

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1 + (x^2 - 1)} = (1 + y)^{1/2}$$

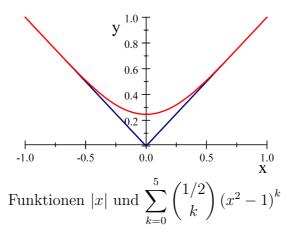
wobei $y=x^2-1$. Für $x\in[-1,1]$ gilt $y\in[-1,0]$. Es folgt aus der binomischen Taylorreihe (13.21), dass

$$(1+y)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} {1/2 \choose k} y^k,$$

wobei die Konvergenz auf [-1,1] gleichmäßig ist (siehe auch Aufgabe 106). Daraus folgt, dass

$$|x| = \sum_{k=0}^{\infty} {1/2 \choose k} (x^2 - 1)^k,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig auf [-1, 1] ist. Da die Partialsummen dieser Reihe Polynome sind, so erhalten wir, dass $|x| \in A[-1, 1]$.



Schritt 2. Bemerken wir die folgenden einfachen Eigenschaften von A[a,b], die direkt aus der Definition folgen.

(i) Gilt $f, g \in A[a, b]$ so gilt auch $\alpha f + \beta g \in A[a, b]$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (ii) Ist $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus A[a,b] mit $g_n \rightrightarrows f$ auf [a,b] so gilt auch $f \in A[a,b]$.
- (iii) Für jede Funktion $f(x) \in A[a, b]$ gilt $f\left(\frac{x-c}{\lambda}\right) \in A[\lambda a + c, \lambda b + c]$ für beliebige $\lambda > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Es folgt aus den Schritten 1 und 2, dass

$$\left| \frac{x-c}{\lambda} \right| \in A \left[-\lambda + c, \lambda + c \right].$$

Gegeben seien ein Intervall [a, b] und $c \in \mathbb{R}$, es gibt λ groß genug so dass

$$-\lambda + c < a < b < \lambda + c$$
.

Es folgt, dass

$$\left| \frac{x-c}{\lambda} \right| \in A[a,b],$$

und Multiplizieren mit λ ergibt, dass

$$|x-c| \in A[a,b]$$
.

Somit erhalten wir, dass für beliebige Folgen $\{c_j\}_{k=0}^n$ und $\{\alpha_j\}_{k=0}^n$

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |x - c_j| \in A[a, b].$$

Sei f eine stetige Funktion auf [a, b]. Da f auf [a, b] auch gleichmäßig stetig ist, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
 (13.44)

Wählen wir eine Zerlegung $\{c_k\}_{k=0}^n$ von [a,b] so dass $c_k-c_{k-1}<\delta$ für alle k=1,...,n. In jedem Intervall $[c_{k-1},c_k]$ gilt nach (13.44)

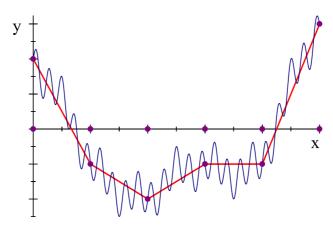
$$x, y \in [c_{k-1}, c_k] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Jetzt wählen wir eine Folge $\{\alpha_j\}_{j=0}^n$ von reellen Zahlen so dass für die Funktion

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j |x - c_j|$$
 (13.45)

gilt

$$g_n(c_k) = f(c_k)$$
 für alle $k = 0, ..., n$. (13.46)



Funktionen f (blau) und g_n (rot), n = 5

Wir beweisen unterhalb im Schritt 4, dass (13.46) immer möglich ist. Gilt (13.46), so leiten wir daraus her, dass

$$|f(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon$$
 für alle $x \in [a, b]$.

Jedes $x \in [a, b]$ liegt in einem Intervall $[c_{k-1}, c_k]$. Im Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ ist jede Funktion $|x - c_j|$ linear (da c_j außerhalb (c_{k-1}, c_k) liegt), woraus folgt, dass auch $g_n(x)$ im Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ linear ist. Somit gilt für jedes $x \in [c_{k-1}, c_k]$

$$|g_n(x) - g_n(c_k)| \le |g_n(c_{k-1}) - g_n(c_k)| = |f(c_{k-1}) - f(c_k)| < \varepsilon.$$

Da auch

$$|f(x) - f(c_k)| < \varepsilon,$$

so erhalten wir für alle $x \in [c_{k-1}, c_k]$

$$|f(x) - g_n(x)| \le |f(x) - f(c_k)| + |g_n(x) - g_n(c_k)| < 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$||f - g_n||_{[a,b]} \le 2\varepsilon,$$

und somit $g_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$. Da $g_n \in A[a,b]$, so erhalten wir $f \in A[a,b]$.

Schritt 4. Es bleibt zu beweisen, dass die Koeffizienten α_j für die Funktion g_n in (13.45) so gewählt werden können, dass (13.46) gilt, was äquivalent zum folgenden System von Gleichungen für α_j :

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |c_k - c_j| = f(c_k) \text{ für alle } k = 0, ..., n.$$

Das ist ein lineares System von n+1 Gleichungen mit n+1 Unbekannten α_j . Es hat eine eindeutige Lösung $\{\alpha_j\}$ für beliebige Folge $\{f(c_k)\}$ genau dann, wenn das homogene System

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |c_k - c_j| = 0 \text{ für alle } k = 0, ..., n$$
 (13.47)

nur die trivialle Lösung $\alpha_j = 0$ hat. Angenommen, dass (13.47) gilt, betrachten wir die Funktion

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j |x - c_j|.$$

Da g(x) an allen Stellen $x = c_k$ verschwindet und in jedem Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ die Funktion g(x) linear ist, so gilt

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in [c_{k-1}, c_k].$$

Für jedes $x \in (c_{k-1}, c_k)$ ist $x - c_j$ positiv für $j \le k - 1$ und negativ für $j \ge k$. Es folgt, dass für $x \in (c_{k-1}, c_k)$ gilt:

$$g(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1} x - \alpha_k x - \dots - \alpha_n x + \text{const}.$$

Da g'(x) = 0 für alle $x \in (c_{k-1}, c_k)$, so folgt es, dass für alle k = 1, ..., n

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} - \alpha_k - \alpha_{k+1} \dots - \alpha_n = 0.$$

Ist $k \leq n-1$, so Subtrahieren diese Gleichung aus

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + \alpha_k - \alpha_{k+1} - \dots - \alpha_n = 0$$

ergibt $\alpha_k = 0$, für alle k = 1, ..., n - 1. Somit erhalten wir für alle $x \in [a, b]$

$$g(x) = \alpha_0 |x - c_0| + \alpha_n |x - c_n|$$

= $\alpha_0 (x - c_0) - \alpha_n (x - c_n)$
= $(\alpha_0 - \alpha_n) x - \alpha_0 c_0 + \alpha_n c_n$.

Da g(x) = 0 so folgt es $\alpha_0 = \alpha_n$ und $\alpha_0 c_0 = \alpha_n c_n$ woraus folgt $\alpha_0 = \alpha_n = 0$. Wir beschließen, dass $\alpha_k = 0$ für alle k = 0, ..., n, was zu beweisen war.

Eine interessante Folgerung aus diesem Beweis ist, dass

$$\det\left(\left|c_{i}-c_{j}\right|\right)_{i,j=0}^{n}\neq0$$

für beliebige Folge $\{c_k\}_{k=0}^n$ von verschiedenen reellen Zahlen.

13.10 * Fourier-Reihen

A Fourier series is a series of the form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right), \tag{13.48}$$

where $x \in \mathbb{R}$ and a_k , b_k are the coefficients of the series. Partial sums are

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

and they are called a trigonometric polynomial for the obvious reason.

In this section, we consider the question whether a given function can be represented as a sum of the Fourier series. We start with the following lemma.

Lemma 13.23 Let the Fourier series (13.48) converge uniformly on \mathbb{R} to a function f(x). Then, for all k,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad and \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$
 (13.49)

Beweis. Note that the integrals in (13.49) are defined because function f(x) is continuous as the uniform limit of continuous functions. Fix non-negative integer n and multiply the identity

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
 (13.50)

by $\cos nx$. The resulting series still converges uniformly (because $|\cos nx| \le 1$), whence by Theorem 13.7

$$\int_{0}^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_0}{2} \int_{0}^{2\pi} \cos nx dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{0}^{2\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{0}^{2\pi} \sin kx \cos nx dx \right).$$
(13.51)

Using the identity

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left(\cos \left(a - b \right) + \cos \left(a + b \right) \right),$$

we obtain

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(k-n)x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(k+n)x \, dx. \quad (13.52)$$

Now, use the following formula: for any integer l,

$$\int_0^{2\pi} \cos lx \, dx = \begin{cases} 2\pi, & l = 0\\ 0, & l \neq 0, \end{cases}$$
 (13.53)

because in the case $l \neq 0$ the integral is proportional to $[\sin lx]_0^{2\pi} = 0$. It follows from (13.52) that

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx dx = \begin{cases} 2\pi, & k = n = 0\\ \pi, & k = n \neq 0,\\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Next, similarly we have, for all k, n,

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(k+n)x + \sin(k-n)x) dx = 0$$

because

$$\int_0^{2\pi} \sin lx \ dx = 0 \text{ for all } l \in \mathbb{Z}.$$
 (13.54)

It follows from (13.51) that the only non-zero term in the right hand side is the one with k = n. If n = 0 then we obtain

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} 2\pi = \pi a_0.$$

If n > 0 then

$$\int_{0}^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \pi a_n$$

so that in both cases we have (13.49).

The coefficients b_k are found similarly by multiplying (13.50) by $\sin nx$.

Note that all the terms in the Fourier series are 2π -periodic functions on \mathbb{R} . Therefore, whenever the sum exists it will be also 2π -periodic. In what follows we'll deal with either functions defined on $[0, 2\pi]$ or 2π -periodic functions on \mathbb{R} .

Lemma 13.23 motives the following definition.

Definition. For any Riemann integrable function f on $[0, 2\pi]$, define its Fourier coefficients by

for all integers $k \geq 0$. The Fourier series of function f is the series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right).$$

Since we do not know yet whether this series converges and if so then whether its sum is f(x), we'll write

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$
(13.56)

meaning that the coefficients a_k and b_k are those associated with f. We are going find out under what conditions of f the sign \sim can be replaced by = and in what sense the series converges.

Beispiel. 1. If $f(x) \equiv 1$ then we obtain from (13.55), (13.53), and (13.54), that $a_0 = 1$ while $a_k = b_k = 0$ for all $k \geq 1$. Hence, in this case the Fourier series of f(x) is identically equal to 1 and, hence, coincides with f(x).

2. Consider on $[0, 2\pi]$ a step function

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Then

$$a_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx = 1,$$

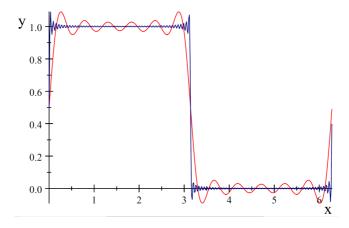
$$a_{k} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos kx \, dx = 0, \quad k > 0,$$

$$b_{k} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin kx \, dx = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k} \right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi k} \left(1 - (-1)^{k} \right) = \begin{cases} 0, & k \text{ even,} \\ \frac{2}{\pi k}, & k \text{ odd.} \end{cases}$$

Hence, the Fourier series has the form

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{\pi (2l+1)} \sin(2l+1) x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

It is not obvious at all whether one has equality here. Below are the graphs of the partial sums with $l \leq 5$ (rot) and $l \leq 50$ (blau) of this series that do suggest that there is convergence excepts for the points $x = 0, \pi, 2\pi$:



For what follows it is useful to consider a complex form of the Fourier series. First of all, note that the Riemann integral $\int_a^b f(x) dx$ can be defined when f is a complex valued function simply by

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{b} \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_{a}^{b} \operatorname{Im} f(x) dx,$$

provided both Re f and Im f are integrable. Most properties of integration are easily transferred to the complex values functions (in particular, linearity, additivity, LM-inequality, the Newton-Leibniz formula, integration-by-parts).

Definition. For any complex valued integrable function f on $[0, 2\pi]$, define its complex Fourier coefficients for all $k \in \mathbb{Z}$ by

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$
 (13.57)

The complex Fourier series of f is the series

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$
.

Lemma 13.24 The complex Fourier series coincides with the Fourier series provided the both converge.

Beweis. Indeed, the complex Fourier series is a double series, that can be written down as follows:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx}$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \right).$$

Using definitions of a_k , b_k , c_k and the Euler formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, we obtain

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2}$$

and for k > 0

$$c_{k} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx - i \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{a_{k} - ib_{k}}{2},$$
$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx = \frac{a_{k} + ib_{k}}{2}.$$

Therefore,

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = \frac{1}{2} (a_k - ib_k) (\cos kx + i\sin kx)$$
$$+ \frac{1}{2} (a_k + ib_k) (\cos kx - i\sin kx)$$
$$= a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

It follows that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

which was to be proved.

To state the next theorem, we need the following notation

$$f\left(x-\right) = \lim_{y \to x-} f\left(y\right)$$

and

$$f\left(x+\right) = \lim_{y \to x+} f\left(y\right).$$

Let a function f have the left limit at x. We say that f is left differentiable at x if the limit

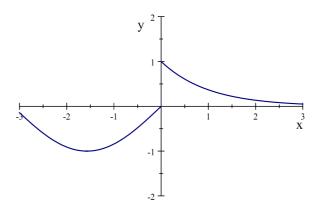
$$\lim_{y \to x^{-}} \frac{f(y) - f(x^{-})}{y - x}$$
 exists and is finite.

The value of this limit is called the left derivative of f and is denoted by f'(x-). Similarly one defines the right differentiability from the right and the right derivative f'(x+).

For example, for the function

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0, \\ \sin x, & x \le 0 \end{cases}$$

we have f(0+) = 1, f(0-) = 0, f'(0+) = -1, f'(0-) = 1.



Of course, if f is differentiable at x then f is left and right differentiable.

Hauptsatz 13.25 Let f be an 2π -periodic integrable function that is right and left differentiable at some $x \in \mathbb{R}$. Then the Fourier series of f at x converges to $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$. If in addition f(x) is continuous at x then the Fourier series of f at x converges to f(x).

Beweis. Let

$$S_n(x) = \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikx}.$$

We need to prove that

$$S_n(x) \to \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \text{ as } n \to \infty.$$

Substituting

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

into $S_n(x)$, we obtain

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le n} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{|k| \le n} e^{ik(x-t)} \right) dt.$$

Let us compute the sum in the brackets setting u = x - t. Denoting this sum by D(u) (it is called the Dirichlet kernel) we obtain for $u \neq 0$, using the formula for the sum of a geometric series,

$$D(u) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \sum_{k=-n}^{n} (e^{iu})^k = e^{-inu} \sum_{k=0}^{2n} (e^{iu})^k$$
$$= e^{-inu} \frac{(e^{iu})^{2n+1} - 1}{e^{iu} - 1} = \frac{e^{iu(n + \frac{1}{2})} - e^{-iu(n + \frac{1}{2})}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}.$$

If u = 0 then D(u) = 2n + 1, which is equal to $\lim_{u\to 0} D(u)$. Hence, D(u) is continuous function of u, and we obtain

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D(x-t) dt \text{ (change } u = x-t)$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u) D(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^x f(x-u) D(u) du.$$

Since the functions f and D are 2π -periodic, the integral in the right hand side is the same over any interval of length 2π . Therefore,

$$S_{n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D(u) du \text{ (using } D(u) = D(-u) \text{)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x-u) + f(x+u)) D(u) du.$$
(13.58)

Applying this formula for function $f \equiv 1$ and using that $S_n(x) = 1$ we obtain

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D(u) \, du = 1.$$

Therefore,

$$S_{n}(x) - \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[f(x-u) + f(x+u) \right] D(u) du$$
$$-\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x-) + f(x+)}{2} D(u) du$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left[(f(x-u) - f(x+)) + (f(x+u) - f(x+)) \right] D(u) du.$$

Define function $F_{+}(u)$ for u > 0 by

$$F_{+}(u) = \frac{f(x+u) - f(x+u)}{u}$$

so that F_+ is locally integrable in $(0, +\infty)$. By the hypotheses, $\lim_{u\to 0} F_+(u)$ exists and is finite so that F_+ can be extended by continuity at u=0. This implies that F_+ is integrable on any interval [0, a], in particular, on $[0, \pi]$. Similarly, define for u>0 the function

$$F_{-}(u) = \frac{f(x-u) - f(x-u)}{u}$$

and observe that F_{-} is integrable on $[0, \pi]$.

Next, we write

$$[(f(x-u) - f(x-u)) + (f(x+u) - f(x+u))] D(u) = \frac{F_{-}(u) u + F_{+}(u) u}{\sin \frac{u}{2}} \sin(n + \frac{1}{2}) u$$
$$= G(u) \sin(n + \frac{1}{2}) u,$$

where

$$G(u) = \frac{F_{-}(u) + F_{+}(u)}{\sin \frac{u}{2}} u.$$

Function G(u) is integrable on $[0, \pi]$ because so are functions $F_{-}(u)$, $F_{+}(u)$ while the function $\frac{u}{\sin u/2}$ can be considered as continuous on $[0, \pi]$: its is obviously continuous on $[0, \pi]$ and extends continuously to u = 0 since it tends to 2 as $u \to 0$. Since

$$S_n(x) - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} G(u) \sin(n + \frac{1}{2}) u du,$$

we conclude by Riemann's lemma (see Exercises) that the both sides of this identity go to 0 as $n \to \infty$, which finishes the proof.

Beispiel. Let f(x) be a 2π -periodic function on \mathbb{R} , which is defined on $[0,2\pi)$ by

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

As we have seen above, the Fourier series for this function is

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{\pi (2l+1)} \sin(2l+1) x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$$

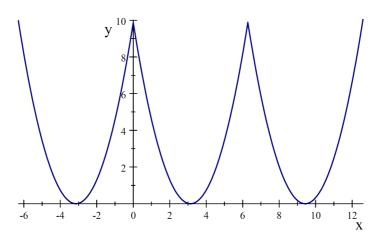
If $x=\pi$ then the sum of the Fourier series is $\frac{1}{2}$, which coincides with $\frac{f(\pi-)+f(\pi+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$. At all other points in $(0,2\pi)$ the function f is differentiable; therefore, the Fourier series converges to f(x). For example, take $x=\pi/2$. Replacing \sim by = and using $\sin{(2l+1)}\frac{\pi}{2}=(-1)^l$, we obtain

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1},$$

whence

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Beispiel. Consider function $f(x) = (x - \pi)^2$ on $[0, 2\pi]$ that is extended 2π -periodically to \mathbb{R} – see the graph below.



Let us compute the real Fourier coefficients of function f:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \text{(change } y = x - \pi)$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 dy = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3},$$

and for $k \geq 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos k (y + \pi) dx$$
$$= (-1)^k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos ky dx.$$

The latter integral is evaluated by twice integrating by parts:

$$\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos ky dx = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 d\sin ky = \frac{1}{k} \left[y^2 \sin ky \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin ky dy$$

$$= 0 + \frac{2}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} y d\cos ky = \frac{2}{k^2} \left[y \cos ky \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ky dy$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} (-1)^k + 0,$$

whence

$$a_k = \frac{4}{k^2}.$$

Finally,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \sin kx dx = (-1)^k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \sin ky dx = 0$$

because the function $y^2 \sin ky$ is odd (obviously, the integral of an odd function over a symmetric interval [-a, a] is zero). Hence, we obtain the Fourier series

$$(x-\pi)^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$
 (13.59)

Since the function f(x) is continuous and right- and left-differentiable at all x, by Theorem 13.25, we have here equality for all x.

For example, setting x = 0 we obtain a remarkable identity

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Setting $x = \pi$, we obtain

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Chapter 14

Metrische Räume und stetige Abbildungen

12.12.18

In diesem Kapitel entwickeln wir die Grundlagen für Analysis in \mathbb{R}^n und somit auch Analysis der Funktionen von mehreren Variablen. Wir definieren und untersuchen die Konvergenz von Folgen und Funktionen in \mathbb{R}^n und sogar in allgemeineren metrischen Räumen, die mit Hilfe von Abstandsfunktion definiert werden.

14.1 Abstandsfunktion

Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine Metrik (=Abstandsfunktion) auf X ist eine Funktion $d: X \times X \to \mathbb{R}$ die die folgenden Axiome erfüllt:

- 1. Positivität: $d(x,y) \ge 0$ für alle $x,y \in X$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (somit d(x,y) > 0 für alle $x \ne y$).
- 2. Symmetrie: d(x,y) = d(y,x) für alle $x, y \in X$.
- 3. Dreiecksungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$.

Ist d eine Metrik auf X, so heißt das Paar (X, d) metrischer Raum.

Beispiel. 1. Sei $X = \mathbb{R}$. Dann ist d(x,y) = |x-y| eine Metrik auf \mathbb{R} .

2. Für beliebige Menge X ist die folgende Funktion

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

eine Metrik. Diese Metrik heißt $diskrete\ Metrik\ auf\ X$.

Unser Hauptbeispiel ist die Menge

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ times}}$$

deren Elemente alle n-Tupel $(x_1, ..., x_n)$ von reellen Zahlen sind, die auch Vektoren oder Punkte heißen. Für den Vektor $x = (x_1, ..., x_n)$ heißen die Zahlen x_k die Komponenten (oder Koordinaten) von x.

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Summe

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

die auch ein Vektor ist. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das Produkt λx mit

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Menge \mathbb{R}^n mit den obigen Addition und Multiplikation ist ein Vektorraum über \mathbb{R} .

Erinnern wir uns die Definition von Vektorraum über \mathbb{R} (die reellen Zahlen heißen dann Skalare).

Definition. Sei V eine Menge wo die folgenden zwei Operationen definiert werden: Addition

$$x, y \in V \mapsto x + y \in V$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda \in \mathbb{R}. \ x \in V \mapsto \lambda x \in V$$

Die Menge V mit diesen Operationen heißt Vektorraum über $\mathbb R$ falls die folgenden Axiome erfüllt werden:

- 1. Nullvektor: es gibt ein $0 \in V$ mit x + 0 = 0 + x = x für alle $x \in V$.
- 2. Das inverse Element: für jedes $x \in V$ existiert ein $-x \in V$ mit x + (-x) = (-x) + x = 0.
- 3. Assoziativgesetz für Addition: (x + y) + z = x + (y + z).
- 4. Kommutativgesetz für Addition: x + y = y + x.
- 5. Skalarmultiplikation mit 1: 1x = x für alle x.
- 6. Assoziativgesetz für Skalarmultiplikation: $(\lambda \mu) x = \lambda (\mu x)$.
- 7. Distributivgesetz für Addition von Skalaren: $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$.
- 8. Distributivgesetz für Addition von Vektoren: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

Die Operationen Addition und Skalarmultiplikation heißen zusammen *lineare* Operationen.

Beispiel. Sei S eine beliebige Menge. Bezeichnen wir mit F(S) die Menge von allen reellwertigen Funktionen auf S. Definieren wir Addition von Funktionen $f, g \in F(S)$ mit

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad \forall s \in S$$

und die Skalarmultiplikation mit

$$(\lambda f)(s) = \lambda f(s) \quad \forall s \in S$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist F(S) ein Vektorraum.

Insbesondere betrachten wir die Menge $\mathcal{E}_n = \{1, 2, ..., n\}$, die aus n Elementen besteht. Jede Funktion f auf \mathcal{E}_n bestimmt eine Folge $\{f(1), ..., f(n)\}$ von n reellen Zahlen, d.h. ein Vektor in \mathbb{R}^n . Somit erhalten wir eine Abbildung

$$F(\mathcal{E}_n) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

 $f \mapsto (f(1), ..., f(n)).$

Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv, da jedes Element $x \in \mathbb{R}^n$ eine Funktion $f \in F(\mathcal{E}_n)$ mit $f(k) = x_k$ eindeutig bestimmt. Diese Abbildung bewahrt die linearen Operationen so dass die Vektorräume $F(\mathcal{E}_n)$ und \mathbb{R}^n isomorph sind.

Definition. Eine Funktion $N:V\to\mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V heißt Norm falls sie die folgenden Axiome erfüllt:

- 1. Positivität: $N(x) \ge 0$ und $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (somit N(x) > 0 für alle $x \in V \setminus \{0\}$).
- 2. Absolute Homogenität: $N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \forall x \in V.$
- 3. Dreiecksungleichung: $N(x + y) \le N(x) + N(y)$.

Das Paar (V, N) heißt normierter Vektorraum. Die übliche Notation von Norm ist ||x|| anstatt N(x).

Beispiel. 1. Die Funktion N(x) = |x| auf \mathbb{R} ist eine Norm.

2. Sei V = B(S) der Vektorraum von allen beschränkten reellwertigen Funktionen auf S. Die Menge B(S) ist offensichtlich ein Unterraum von F(S) und somit auch ein Vektorraum. Die folgende Funktion ist eine Norm in B(S):

$$||f|| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Diese Norm heißt die sup-Norm oder ∞ -Norm und wird auch mit $||f||_{\infty}$ bezeichnet.

3. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Die Identifizierung von \mathbb{R}^n mit $B(\mathcal{E}_n) = F(\mathcal{E}_n)$ ergibt die folgende sup-Norm in \mathbb{R}^n :

$$||x||_{\infty} = \sup_{1 \le k \le n} |x_k| = \max_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

Eine andere Norm in \mathbb{R}^n , die 1-Norm, ist wie folgt definiert:

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$
 (14.1)

Behauptung. Ist (V, N) ein normierter Vektorraum, so ist d(x, y) = N(x - y) eine Metrik auf V.

Die Metrik d heißt die *induzierte Metrik* der Norm N.

Beweis. Beweisen wir alle Axiome von der Metrik, wo wir die Axiome der Norm benutzen.

Positivität: $d(x,y) = N(x-y) \ge 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow N(x-y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Symmetrie:

$$d(x,y) = N(y-x) = N((-1)(x-y)) = N(x-y) = d(y,x).$$

Dreiecksungleichung:

$$d(x,y) = N(x-y) = N((x-z) + (z-y)) \le N(x-z) + N(z-y) = d(x,z) + d(z,y)$$
.

Jeder normierter Vektorraum (V,N) ist somit auch ein metrischer Raum (V,d) mit der induzierten Metrik d.

Beispiel. Für V = B(S) mit der sup-Norm erhalten wir die sup-Metrik:

$$d_{\infty}(f,g) = ||f - g||_{\infty} = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|.$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ erhalten wir die sup-Metrik

$$d_{\infty}(x,y) = ||x - y||_{\infty} = \max_{1 \le k \le n} \{|x_k - y_k|\}$$

und die 1-Metrik

$$d_1(x,y) = ||x - y||_1 = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

14.2 Die *p*-Norm in \mathbb{R}^n

Definition. Für jedes $1 \leq p < \infty$ definieren wir die *p-Norm* in \mathbb{R}^n mit

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}.$$
 (14.2)

Zum Beispiel, für p=1 stimmt diese Definition mit (14.1) überein. Für p=2 erhalten wir

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

was mit dem Betrag |x| des Vektors x übereinstimmt.

Wir beweisen unterhalb, dass die p-Norm eine Norm ist. Die ersten zwei Axiome von Norm sind offensichtlich:

Positivität. Es ist klar aus (14.2), dass $||x||_p \ge 0$ und

$$||x||_n = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$$
 für alle $k = 1, ..., n \Leftrightarrow x = 0$.

Absolute Homogenität: für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda|^p |x_p|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \|x\|.$$

Die Dreiecksungleichung wird später bewiesen.

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das Skalarprodukt

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(nicht mit der Skalarmultiplikation zu vermischen). Bemerken wir, dass $x \cdot y$ eine reelle Zahl ist. Das Skalarprodukt erfüllt offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

- 1. Positivität: $x \cdot x \ge 0$ und $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 2. Symmetrie: $x \cdot y = y \cdot x$
- 3. Linearität:

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$$

und

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Diese drei Eigenschaften sind die Axiome von Skalarprodukt in beliebigen Vektorräumen.

Satz 14.1 (Hölder-Ungleichung) Für alle p, q > 1 mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\tag{14.3}$$

gilt die folgende Ungleichung

$$|x \cdot y| \le ||x||_p ||y||_q \tag{14.4}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Die (14.3) erfüllenden Zahlen heißen die konjugierten Hölder-Exponenten. Die Identität (14.3) ist äquivalent zu $p=\frac{q}{q-1}$ und $q=\frac{p}{p-1}$. Da p=2 und q=2 konjugierte Hölder-Exponenten sind, so erhalten wir nach

Da p=2 und q=2 konjugierte Hölder-Exponenten sind, so erhalten wir nach der Hölder-Ungleichung

$$|x \cdot y| \le ||x||_2 ||y||_2.$$

Dieser spezielle Fall der Hölder-Ungleichung heißt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Bemerken wir auch, dass

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x \cdot x}.$$

Beweis. Gilt x=0 oder y=0 so ist (14.4) trivial. Nehmen wir an, dass $x,y\neq 0$. Die Ungleichung (14.4) ändert sich nicht wenn x durch λx ersetzt wird. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $||x||_p=1$. Analog nehmen wir an, dass $||y||_q=1$.

Weiter benutzen wir die Young-Ungleichung

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge ab,$$

die unter der Bedingung (14.3) für alle $a,b\geq 0$ gilt. Für $a=|x_k|$ und $b=|y_k|$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q} \right) \ge \sum_{k=1}^{n} |x_k| |y_k| \ge |x \cdot y|.$$
 (14.5)

Mit Hilfe von $||x||_p = ||y||_q = 1$ und (14.3) erhalten wir, dass die linke Seite von (14.5) ist gleich

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q,$$

woraus (14.4) folgt.

Satz 14.2 (Minkowski-Ungleichung) Die p-Norm erfüllt die Dreiecksungleichung

$$||x+y||_{p} \le ||x||_{p} + ||y||_{p} \tag{14.6}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Folglich ist die p-Norm eine Norm in \mathbb{R}^n für alle $p \in [1, \infty)$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_k \ge 0$ und $y_k \ge 0$. Der Fall p=1 ist offensichtlich, sei jetzt p>1. Wir haben

$$||x+y||_p^p = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^n x_k (x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n y_k (x_k + y_k)^{p-1}.$$
 (14.7)

Setzen wir $z_k = (x_k + y_k)^{p-1}$ und bemerken, dass nach der Hölder-Ungleichung gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k z_k \le ||x||_p ||z||_q,$$

wobe
i $q=\frac{p}{p-1}$ der zu pkonjugierte Hölder-Exponent ist. Es gilt

$$||z||_q = \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} = ||x + y||_p^{p/q},$$

wobei wir die Identität (p-1)q=p benutzt haben. Somit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k (x_k + y_k)^{p-1} \le ||x||_p ||x + y||_p^{p/q}$$

und analog

$$\sum_{k=1}^{n} y_k (x_k + y_k)^{p-1} \le ||y||_p ||x + y||_p^{p/q}.$$

Addieren diese Ungleichungen und Einsetzen in (14.7) ergibt

$$||x+y||_p^p \le (||x||_p + ||y||_p) ||x+y||_p^{p/q}.$$

Daraus folgt, dass

$$||x+y||_p^{p-p/q} \le ||x||_p + ||y||_p$$
.

Da

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

so erhalten wir (14.6).

Die folgende Aussage erklärt die Beziehung zwischen p-Norm und ∞ -Norm in \mathbb{R}^n .

Behauptung. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{p \to +\infty} ||x||_p = ||x||_{\infty}$$

(siehe Aufgabe 112).

Bemerken wir, dass $p=\infty$ und q=1 auch konjugierte Hölder-Exponenten sind, da $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{1}=1$. Die Hölder-Ungleichung gilt auch für $p=\infty$ und q=1 wie folgt:

$$|x \cdot y| \le ||x||_{\infty} ||y||_1$$

(siehe Aufgabe 112).

Folglich erhalten wir in \mathbb{R}^n die folgende Familie von Metriken: für jedes $p \in [1, +\infty]$

$$d_p(x,y) = ||x - y||_p.$$

14.3 Metrische Kugel

In einem metrischen Raum (X, d) definieren wir die metrischen Kugeln wie folgt. **Definition.** Für jedes $z \in X$ und r > 0 definieren wir die offene Kugel $U_r(z)$ mit Zentrum z und Radius r wie folgt:

$$U_r(z) = \{x \in X : d(x, z) < r\}.$$

Definieren wir auch die abgeschlossene Kugel mit

$$\overline{U}_{r}(z) = \{x \in X : d(z, x) \le r\}.$$

Beispiel. In \mathbb{R} mit der Metrik d(x,y) = |x-y| die Kugel $U_r(z)$ ist das offene Intervall (z-r,z+r) und $\overline{U}_r(z) = [z-r,z+r]$.

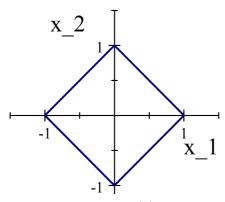
Beispiel. Betrachten wir \mathbb{R}^2 mit der Metrik d_p $(1 \leq p \leq \infty)$ und beschreiben wir die entsprechende Kugel $U_r(0)$ abhängig von p.

14.12.18

Für p = 1 haben wir

$$U_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_1 < r\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r\}$$

Somit ist $U_r(0)$ ein Rhombus wie auf dem Bild:

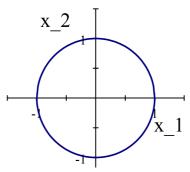


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall p=1

Für p = 2 haben wir

$$U_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 < r\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\},$$

und die Kugel ist eine Kreisscheibe

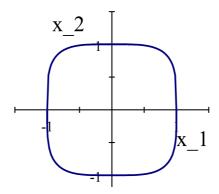


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall p=2

Für p = 4 haben wir

$$U_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_4 < r\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^4 < r^4\},$$

was auf dem Bild gezeigt ist:

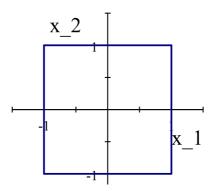


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall p=4

Für $p = \infty$ haben wir

$$U_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_{\infty} < r\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < r\},\$$

was ein Quadrat ist



Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = \infty$

Beweisen wir die folgenden Eigenschaften von metrischen Kugeln.

Lemma 14.3 Seien $U_r(x)$ und $U_s(y)$ zwei Kugeln im metrischen Raum (X, d).

- (a) Gilt $d(x,y) \ge r + s$ so sind die Kugeln disjunkt.
- (b) Gilt $d(x, y) \leq r s$, so gilt $U_s(y) \subset U_r(x)$.

Beweis. (a) Sei z ein Punkt aus dem Schnitt $U_r(x) \cap U_s(y)$. Dann gelten d(x, z) < r und d(y, z) < s woraus folgt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z) < r + s$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

(b) Für jedes $z \in U_s(y)$ haben wir

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s \le r$$

woraus folgt $z \in U_r(x)$. Somit gilt $U_s(y) \subset U_r(x)$.

14.4 Konvergenz in metrischen Räumen

Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten aus X konvergiert gegen ein $a \in X$ falls $d(x_n,a) \to 0$ für $n \to \infty$. Der Punkt a heißt der Grenzwert (=Limes) der Folge $\{x_n\}$ und man schreibt d-lim $_{n\to\infty} x_n = a$ oder $x_n \stackrel{d}{\to} a$.

Äquivalente Definitionen für $x_n \stackrel{d}{\to} a$:

1. $\forall \varepsilon > 0$ gilt $d(x_n, a) < \varepsilon$ für fast alle n;

2. $\forall \varepsilon > 0$ gilt $x_n \in U_{\varepsilon}(a)$ für fast alle n

Beispiel. In \mathbb{R} mit der Metrik d(x,y) = |x-y| ist die Konvergenz $x_n \stackrel{d}{\to} a$ äquivalent zu $|x_n - a| \to 0$ und somit zur normalen Konvergenz $x_n \to a$. Gleiches gilt in \mathbb{C} mit der Metrik $d(x,y) = |x-y| = ||x-y||_2$.

Beispiel. Sei S eine Menge. Betrachten wir wieder den Vektorraum B(S) von allen reellwertigen beschränkten Funktionen auf S mit der sup-Norm

$$||f||_{\infty} = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Die sup-Norm ist offensichtlich eine Norm (siehe Aufgabe 114), und die entsprechende Metrik ist α

$$d(f,g) = ||f - g||_{\infty}.$$

Die Konvergenz $f_n \stackrel{d}{\to} f$ ist äquivalent zu $||f_n - f||_{\infty} \to 0$, d.h. zur gleichmäßigen Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ auf S.

Bemerkung. In der Notation d- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \stackrel{d}{\to} a$ lässt man häufig "d" ausfallen wenn es klar ist, welche Metrik benutzt wird.

Behauptung. Der Grenzwert einer Folge $\{x_n\}$ im metrischen Raum (X, d) ist eindeutig bestimmt (soll er existieren).

Beweis. Gilt $x_n \to a$ und $x_n \to b$ so erhalten wir

$$d(a,b) \leq d(a,x_n) + d(x_n,b) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus d(a, b) = 0 und somit a = b folgt.

14.5 Stetige Abbildungen

Definition. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Seien $a \in X$ und $b \in Y$. Man schreibt

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ oder } f(x) \to b \text{ für } x \to a$$
 (14.8)

 $(f(x) \text{ konvergiert gegen } b \text{ für } x \to a) \text{ falls}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.d.} \ \forall x \in X \setminus \{a\} \ \text{mit} \ d_X(x,a) < \delta \ \text{gilt} \ d_Y(f(x),b) < \varepsilon. \ (14.9)$$

Der Punkt b heißt der Grenzwert (=Limes) von f(x) für $x \to a$.

Bezeichnen wir mit U^X und U^Y die metrischen Kugeln in X bzw Y. Dann ist (14.9) und somit auch (14.8) äquivalent zu folgendes:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.d.} \ \forall x \in U_{\delta}^{X}\left(a\right) \setminus \left\{a\right\} \ \text{gilt} \ f\left(x\right) \in U_{\varepsilon}^{Y}\left(b\right).$$
 (14.10)

Lemma 14.4 Die folgenden zwei Bedingungen sind äquivalent.

- (i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$
- (ii) Für jede Folge $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ mit $x_n \stackrel{d_X}{\to} a$ gilt $f(x_n) \stackrel{d_Y}{\to} b$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) Nach Voraussetzung gilt (14.10). Wählen wir ein $\varepsilon > 0$ und erhalten nach (14.10) einen Wert $\delta > 0$. Für jede Folge $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ haben wir nach Definition, dass fast alle x_n in U_{ε}^X (a) liegen. Da $x_n \neq a$, so erhalten wir aus (14.10), dass auch fast alle $f(x_n)$ in U_{ε}^Y (b) liegen, woraus folgt $f(x_n) \to b$.

 $(ii) \Rightarrow (i)$ Angenommen, dass $\lim_{x\to a} f(x) = b$ nicht gilt, so erhalten wir:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in U_{\delta}^{X}(a) \setminus \{a\} \ \text{mit} \ f(x) \notin U_{\varepsilon}^{Y}(b). \tag{14.11}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ benutzen wir (14.11) mit $\delta = \frac{1}{k}$ und erhalten ein $x_k \in U_{1/k}^X(a) \setminus \{a\}$ mit

$$f\left(x_{k}\right)\notin U_{\varepsilon}^{Y}\left(b\right).$$

Für die Folge $\{x_k\}$ gilt $x_k \to a$ aber $f(x_k) \not\to b$, was im Widerspruch zur Voraussetzung (ii) steht.

Folglich hat jede Funktion $f: X \to Y$ höchstens einen Grenzwert für $x \to a$.

Definition. Seien X und Y zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f:X\to Y$ heißt stetiq in $a\in X$ falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Es folgt aus (14.9) und (14.10), dass die Stetigkeit von f in a äquivalent zu den folgenden Bedingungen sind:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.d.} \ d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.d.} \ x \in U_{\delta}^{X}\left(a\right) \ \Rightarrow f\left(x\right) \in U_{\varepsilon}^{Y}\left(f\left(a\right)\right).$$

Definition. Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig falls sie in allen Punkten $a \in X$ stetig ist.

Lemma 14.5 Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist stetig in $a \in X$ genau dann, wenn für jede Folge $\{x_n\} \subset X$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$.

Beweis. Nach Lemma 14.4 $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$ gilt genau dann, wenn $f(x_n) \to f(a)$ für jede Folge $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$. Die letzte Bedingung impliziert, dass $f(x_n) \to f(a)$ auch für jede Folge $\{x_n\} \subset X$ mit $x_n \to a$, da für die Glieder x_n der Folge, die a gleich sind, gilt $f(x_n) = f(a)$.

Korollar 14.6 Sind die Funktionen $f, g: X \to \mathbb{R}$ (oder $f, g: X \to \mathbb{C}$) stetig in $a \in X$ so sind f + g, fg, f/g auch stetig in a sind (im Fall f/g vorausgesetzt, dass $g \neq 0$).

146

Beweis. Zeigen wir, z.B., dass f + g stetig in a ist. Für jede Folge $x_n \to a$ gilt nach dem Lemma 14.5 $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$. Daraus folgt, dass $f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a)$, und nach dem Lemma 14.5 beschließen wir, dass f + g in a stetig ist. \blacksquare

Beispiel. Fixieren wir einen Punkt $c \in X$ und betrachten die Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ die mit f(x) = d(x, c) definiert ist. Zeigen wir, dass diese Funktion stetig in jedem Punkt $a \in X$ ist. Sei $x_n \to a$. Dann haben wir

$$|f(x_n) - f(c)| = |d(x_n, c) - d(a, c)| \le d(x_n, a) \to 0,$$

woraus folgt $f(x_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.

14.6 Offene und abgeschlossene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Menge $V \subset X$ heißt offen falls für jedes $x \in V$ existiert ein r > 0 mit $U_r(x) \subset V$. Eine Menge $F \subset X$ heißt abgeschlossen falls das Komplement $X^c := X \setminus F$ offen ist.

Beispiel. 1. Die leere Menge \emptyset und die ganze Menge X sind offen. Somit sind $X = \emptyset^c$ und $\emptyset = X^c$ abgeschlossen.

- 2. In \mathbb{R} die offenen Intervalle sind offene Mengen und die abgeschlossenen Intervalle sind abgeschlossene Mengen.
- 3. Zeigen wir, dass die offene metrische Kugel $U_r(z)$ eine offene Menge ist. Für jedes $x \in U_r(z)$ gilt d(z,x) < r und somit

$$\varepsilon := r - d\left(z, x\right) > 0.$$

Dann $r - \varepsilon = d(z, x)$, und nach Lemma 14.3 erhalten wir, dass $U_{\varepsilon}(x) \subset U_{r}(z)$. Somit ist $U_{r}(z)$ offene Menge.

4. Zeigen wir, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{U}_r(z)$ eine abgeschlossene Menge ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass das Komplement

$$K := \overline{U}_r(z)^c = \{x \in X : d(z, x) > r\}$$

offen ist, d.h. für jedes $x \in K$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{\varepsilon}(x) \subset K$. Da d(z, x) > r, so wählen wir ein ε so dass

$$0 < \varepsilon < d(z, x) - r$$

und somit $r + \varepsilon < d(z, x)$. Es folgt aus dem Lemma 14.3, dass die Kugeln $\overline{U}_r(z)$ und $U_{\varepsilon}(x)$ disjunkt sind. Es folgt, dass $U_{\varepsilon}(x) \subset K$, was zu beweisen war.

Satz 14.7 Die folgenden Eigenschaften gelten für Teilmengen eines metrischen Raums.

- (a) Die Vereinigung von beliebigen Mengensystem von offenen Mengen ist offen.
- (b) Der Schnitt endlich vieler offenen Mengen ist offen.
- (c) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- (d) Der Schnitt von beliebigen Mengensystem von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

19.12.18

- (e) Eine Menge V ist offen genau dann, wenn V eine Vereinigung von offenen metrischen Kugeln ist.
- (f) Eine Menge F ist abgeschlossen genau dann, wenn jede konvergente Folge aus F den Grenzwert auch in F hat.

Beweis. (a) Sei $\{V_{\alpha}\}_{{\alpha}\in I}$ ein Mengensystem von offenen Mengen. Zeigen wir, dass die Vereinigung

$$V = \bigcup_{\alpha \in I} V_{\alpha}$$

offen ist, d.h. für jedes $x \in V$ existiert r > 0 mit $U_r(x) \subset V$. In der Tat liegt x in einem V_{α} . Da V_{α} offen ist, so existiert r > 0 mit $U_r(x) \subset V_{\alpha}$. Somit gilt auch $U_r(x) \subset V$.

(b) Seien $V_1, V_2, ..., V_n$ offene Mengen. Zeigen wir, dass der Schnitt

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$$

offen ist. Jedes $x \in V$ liegt in allen V_k . Somit existiert für jedes k = 1, ..., n ein $r_k > 0$ mit $U_{r_k}(x) \subset V_k$. Dann für

$$r := \min(r_1, r_2, ..., r_n) > 0$$

gilt $U_r(x) \subset V_k$ für alle k = 1, ..., m, woraus folgt $U_r(x) \subset V$.

Bemerkung. Der Schnitt unendlich vieler offenen Mengen muss nicht offen sein. Zum Beispiel, der Schnitt von allen offenen Intervallen $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist gleich $\{0\}$, was nicht offen ist.

(c) Sind $F_1, ..., F_n$ abgeschlossene Mengen, so ist die Menge

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} F_k^c$$

offen nach (b). Somit ist $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ abgeschlossen.

(d) Ist $\{F_{\alpha}\}_{{\alpha}\in I}$ ein Mengensystem von abgeschlossenen Mengen, so ist die Menge

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} F_{\alpha}\right)^{c} = \bigcup_{\alpha\in I} F_{\alpha}^{c}$$

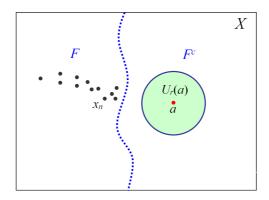
offen nach (a). Somit ist $\bigcap_{\alpha \in I} F_{\alpha}$ abgeschlossen.

(e) Sei V offen. Dann für jedes $x \in V$ existiert ein $r_x > 0$ mit $U_{r_x}(x) \subset V$. Es ist klar, dass

$$V = \bigcup_{x \in V} U_{r_x}(x) ,$$

so dass V eine Vereinigung von offenen Kugeln ist. Umgekehrt, jede Vereinigung von offenen Kugeln ist nach (a) eine offene Menge, da alle Kugeln offen sind.

(f) Sei F abgeschlossen. Beweisen wir, dass F alle Grenzwerte von Folgen aus F enthält. Sei $\{x_n\}$ eine konvergente Folge aus F mit $x_n \to a$. Zeigen wir, dass $a \in F$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $a \notin F$ und somit $a \in F^c$. Da F^c offen ist, so existiert ein r > 0 mit $U_r(a) \subset F^c$.



Da $x_n \in F$, so erhalten wir, dass $x_n \notin U_r(a)$, was im Widerspruch zu $x_n \to a$ steht.

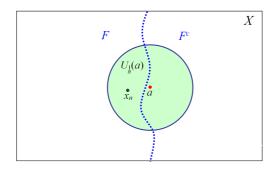
Beweisen wir jetzt die Umkehrung: enthält F die Grenzwerte von allen konvergenten Folgen aus F, dann ist F abgeschlossen. Dafür zeigen wir, dass F^c offen ist, d.h.

$$\forall a \in F^c \ \exists r > 0 \text{ s.d. } U_r(a) \subset F^c.$$

Nehmen wir das Gegenteil an:

$$\exists a \in F^c \text{ s.d. } \forall r > 0 \ U_r(a) \not\subset F^c \text{ d.h. } U_r(a) \cap F \neq \emptyset.$$

Insbesondere ist die Menge $U_r(a) \cap F$ nicht-leer für jedes $r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.



Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{1/n}(a) \cap F$. Dann ist $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen von F mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, woraus folgt $x_n \to a$. Somit soll auch a in F liegen, was im Widerspruch zu $a \in F^c$ steht.

Beispiel. Es folgt aus (f) dass jede aus einem Punkt $a \in X$ bestehende Menge $F = \{a\}$ abgeschlossen ist. Es folgt aus (c) dass jede endliche Menge $F \subset X$ abgeschlossen ist.

Der Begriff von offenen Mengen lässt sich axiomatisch definieren wie folgt. Betrachten wir eine Menge X und ein Mengensystem \mathcal{O} deren Elemente Teilmengen von X sind (d.h. $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$. Das Mengensystem \mathcal{O} heißt eine Topologie in X und die Elemente von \mathcal{O} heißen offene Mengen, falls \mathcal{O} die folgenden Axiome von Topologie erfüllt:

- 1. $\emptyset \in \mathcal{O} \text{ und } X \in \mathcal{O}$.
- 2. Beliebige Vereinigung von Elementen von \mathcal{O} ist wieder ein Element von \mathcal{O} .

3. Der Schnitt endlich vieler Elemente von \mathcal{O} ist auch Element von \mathcal{O} .

Das Paar (X, \mathcal{O}) heißt topologischer Raum. Die Komplemente in X von offenen Mengen heißen abgeschlossene Mengen. Die Topologie in X lässt auch die Begriffe von Konvergenz von Folgen, stetigen Funktionen usw. definieren.

Beispiel. Sei $X=\{a,b,c,d\}$ eine Menge von 4 Elementen. Dann das folgende Mengensystem

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}\}\$$

erfüllt alle Axiome von Topologie und somit ist eine Topologie in X. Im Gegenteil ist das Mengensystem

$$\mathcal{O}' = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c, d\}\}\$$

keine Topologie, da die Vereinigung $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$ nicht in \mathcal{O}' liegt.

In diesem Kapitel betrachten wir nur die Topologien von metrischen Räumen, die durch eine Metrik wie oberhalb definiert ist.

Satz 14.8 Seien X, Y zwei metrischen Räumen und $f: X \to Y$ eine Abbildung.

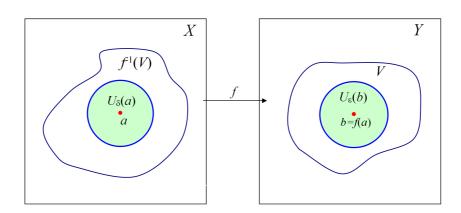
- (a) f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das J $f^{-1}(V)$ eine offene Menge in X ist.
- (b) f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $F \subset Y$ das J $f^{-1}(F)$ eine abgeschlossene Menge in X ist.

Beweis. (a) Sei f stetig. Beweisen wir, dass für jede offene Menge $V \subset Y$ das J $f^{-1}(V)$ offen ist. Für jedes $a \in f^{-1}(V)$ haben wir $b := f(a) \in V$. Da V offen, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_{\varepsilon}^{Y}(b) \subset V. \tag{14.12}$$

Nach der Stetigkeit von f in a gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$x \in U_{\delta}^{X}(a) \implies f(x) \in U_{\varepsilon}^{Y}(b).$$
 (14.13)



Es folgt aus (14.12) und (14.13) dass

$$f\left(U_{\delta}^{X}\left(a\right)\right)\subset U_{\varepsilon}^{Y}\left(b\right)\subset V,$$

150

woraus folgt

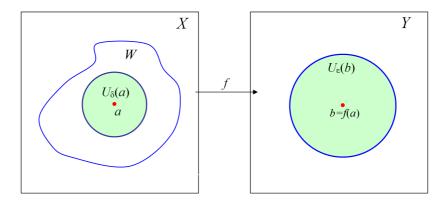
$$U_{\delta}^{X}(a) \subset f^{-1}(V)$$
,

und $f^{-1}(V)$ ist offen.

Sei $f^{-1}(V)$ offen für jede offene Menge $V \subset Y$. Beweisen wir, dass f stetig an jeder Stelle $a \in X$. Setzen wir b = f(a) und zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{mit} \ f\left(U_{\delta}^{X}\left(a\right)\right) \subset U_{\varepsilon}^{Y}\left(b\right)$$

was äquivalent zu (14.13). Die Kugel $U_{\varepsilon}^{Y}(b)$ ist eine offene Menge in Y. Somit ist ihres $J W = f^{-1}(U_{\varepsilon}^{Y}(b))$ eine offene Menge in X.



Da $a \in W$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$U_{\delta}^{X}\left(a\right) \subset W,$$

woraus folgt

$$f\left(U_{\delta}^{X}\left(a\right)\right)\subset f\left(W\right)\subset U_{\varepsilon}^{Y}\left(b\right).$$

(b) Für jede Menge $F\subset Y$ gilt

$$(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c) = f^{-1}(V),$$

wobei $V = F^c$. Die Menge F ist abgeschlossen genau dass, wenn V offen ist, und $f^{-1}(F)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn ihres Komplement $f^{-1}(V)$ offen ist. Somit ist die Bedingung

Abgeschlossenheit von $F \Rightarrow$ Abgeschlossenheit von $f^{-1}(F)$

äquivalent zu

Offenheit von
$$V \Rightarrow$$
 Offenheit von $f^{-1}(V)$

und die zweite Bedingung ist nach (a) äquivalent zur Stetigkeit von f.

Beispiel. Seien (X,d) ein metrischer Raum und $a \in X$ ein Punkt. Zeigen wir mit Hilfe von dem Satz 14.8, dass die Funktion f(x) = d(x,a) stetig auf X ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass für jede offene Menge $V \subset \mathbb{R}$ das J $f^{-1}(V)$ offen in X ist. Jede offene Menge ist eine Vereinigung von Kugeln. Da die Kugeln in \mathbb{R} offene Intervalle sind, so ist jede offene Menge in \mathbb{R} eine Vereinigung von offenen Intervallen.

Sei zuerst $V=(\alpha,\beta)$ ein offenes Intervall in $\mathbb R$. Dann ist das J $f^{-1}(V)$ offen da die Menge

$$f^{-1}(V) = \{x \in X : \alpha < d(x, a) < \beta\} = U_{\beta}(a) \setminus \overline{U}_{\alpha}(a) = U_{\beta}(a) \cap \overline{U}_{\alpha}(a)^{c}$$

offen ist¹. Für eine beliebige offene Menge $V \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(V)$ auch offen da V eine Vereinigung von offenen Intervallen ist und somit $f^{-1}(V)$ eine Vereinigung von offenen Mengen ist.

Korollar 14.9 Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen von metrischen Räumen. Dann ist die Verkettung $g \circ f: X \to Z$ stetig.

Beweis. Wir haben

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$
.

Da $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, so gilt für jede Menge $V \subset Z$

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

Ist V offen in Z, so ist $g^{-1}(V)$ offen in Y und somit $f^{-1}(g^{-1}(V))$ ist offen in X. Wir beschließen, dass $(g \circ f)^{-1}(V)$ offen in X ist, und die Abbildung $g \circ f$ stetig nach dem Satz 14.8 ist. \blacksquare

14.7 Äquivalente Normen

Betrachten wir die Metriken in einem Vektorraum V, insbesondere in $V = \mathbb{R}^n$.

Definition. Seien N_1 und N_2 zwei Normen in V. Man sagt, dass N_1 und N_2 äquivalent sind, falls es die positiven Konstanten c, C gibt mit

$$cN_1(x) \le N_2(x) \le CN_1(x)$$
 (14.14)

für alle $x \in V$.

Es ist offensichtlich, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenz
relation ist.

Satz 14.10 Seien N_1 und N_2 zwei äquivalente Normen in V. Seien d_1 und d_2 die von N_1 bzw N_2 induzierten Metriken auf V, d.h.

$$d_1(x, y) = N_1(x - y)$$
 und $d_2(x, y) = N_2(x - y)$.

Dann gelten die folgenden Aussagen.

- (a) Die Begriffe von der Konvergenz von Folgen in V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.
 - (b) Die Topologien in V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.
- (c) Die Begriffe von stetigen Abbildung von V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

¹Die Mengen $U_r(a)$, $\overline{U}_r(a)$ wurden nur für r>0 definiert, aber die gleichen Definitionen gelten für beliebiges $r\in\mathbb{R}$. Zudem ist $U_r(a)$ immer offen, während $\overline{U}_r(a)$ ist immer abgeschlossen. Zum Beispiel, $U_r(a)=\emptyset$ für $r\leq 0$ und $\overline{U}_0(a)=a$.

152

Beweis. (a) Für eine Folge $\{x_k\}$ aus V gilt nach (14.14):

$$x_k \xrightarrow{d_1} a \Leftrightarrow d_1(x_k, a) \to 0 \Leftrightarrow N_1(x_k - a) \to 0 \Leftrightarrow N_2(x_k - a) \to 0 \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{d_2} a$$

was zu beweisen war.

- (b) Die abgeschlossen Mengen lassen sich mit Hilfe von Konvergenz formulieren (Satz 14.7(f)). Somit folgt (b) aus (a).
- (c) Die Stetigkeit lässt sich auch mit Hilfe von Konvergenz definieren (Lemma 14.4), so dass (c) aus (a) folgt. Alternativ folgt (c) auch aus (b), da die Stetigkeit sich mit Hilfe von abgeschlossen Mengen formulieren lässt (Satz 14.8(b)). \blacksquare

Satz 14.11 Alle p-Normen in \mathbb{R}^n für $p \in [1, +\infty]$ sind äquivalent.

Unterhalb wir nehmen immer an, dass die Topologie in \mathbb{R}^n mit Hilfe von einer der p-Normen definiert wird.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede p-Norm zu ∞ -Norm äquivalent ist. Für jede $p \in [1, \infty)$ gilt

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \ge \left(\max\{|x_k|\}^p\right)^{1/p} = ||x||_\infty$$

und

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \le (n \max\{|x_k|\}^p)^{1/p} = n^{1/p} ||x||_\infty$$

woraus folgt

$$||x||_{\infty} \le ||x||_{p} \le n^{1/p} ||x||_{\infty}, \tag{14.15}$$

was zu beweisen war.

21.12.19

14.8 Vollständigkeit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ heißt Cauchy-Folge, falls

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Gilt $x_n \to a$, so erhalten wir

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, a) + d(x_m, a) \to 0 \text{ as } n, m \to \infty.$$

Somit ist jede konvergente Folge auch Cauchy-Folge. Die Umkehrung gilt in \mathbb{R} , aber nicht für beliebige metrische Räume.

Beispiel. Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raum (X, d) lässt sich als metrischer Raum (Y, d) betrachten. Dann heißt (Y, d) Unterraum von (X, d).

Z.B. Betrachten wir die Menge $Y = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ als ein metrischer Raum. Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist eine Cauchy-Folge in Y, aber diese Folge ist in Y nicht konvergent.

Im Gegensatz dazu, in der Menge Y = [a, b] ist jede Cauchy-Folge $\{x_n\}$ konvergent, da sie einen Grenzwert x in \mathbb{R} hat, und $x_n \in [a, b]$ ergibt $x \in [a, b]$. Gleiches gilt für $Y = [a, +\infty)$ und $Y = (-\infty, b]$.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* falls jede Cauchy-Schwarz in X konvergent ist.

Wir haben oberhalb gesehen, dass die Menge $(0, +\infty)$ als metrischer Raum nicht vollständig ist, während $[a, b], [a, +\infty), (-\infty, b]$ vollständig sind.

Definition. Ein normierter Vektorraum (V, N) heißt vollständig falls der metrische Raum (V, d) mit der induzierten Metrik d(x, y) = N(x - y) vollständig ist. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

Zum Beispiel, \mathbb{R} ist ein Banachraum.

Satz 14.12 Sei S beliebige nicht-leere Menge. Der normierte Vektorraum $B\left(S\right)$ von allen reellwertigen beschränkten Funktionen auf S mit der sup-Norm ist ein Banachraum.

Beweis. Setzen wir für jede Funktion $f: S \to \mathbb{R}$

$$||f|| = \sup_{S} |f|.$$

Sei $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in B(S), so dass

$$||f_n - f_m|| \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$
 (14.16)

Zeigen wir, dass die Folge $\{f_n\}$ in B(S) konvergiert. Für jedes $x \in S$ haben wir

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \sup |f_n - f_m| = ||f_n - f_m|| \to 0 \text{ für } n, m \to \infty,$$

woraus folgt, dass für jedes $x \in S$ die Folge $\{f_n(x)\}$ von reellen Zahlen eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist. Dann die Folge $\{f_n(x)\}$ ist konvergent für jedes $x \in S$. Setzen wir

$$f\left(x\right) := \lim_{n \to \infty} f_n\left(x\right),\,$$

d.h. $f_k \to f$ punktweise.

Zeigen wir, dass die Funktion f auf S beschränkt ist und dass $||f_n - f|| \to 0$ für $n \to \infty$ (d.h. $f_n \rightrightarrows f$). Nach (14.16) haben wir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{s.d.} \ \forall n, m > N \ \text{gilt } \sup |f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass für jedes $x \in S$ und n, m > N

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Für $m \to \infty$ erhalten wir, dass für jedes $x \in S$ und n > N

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
,

woraus folgt

$$||f_n - f|| = \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$
 für alle $n > N$.

Somit erhalten wir

$$||f|| \le ||f_n|| + \varepsilon < \infty$$

d.h. $f \in B(S)$, und $||f_n - f|| \to 0$ für $n \to \infty$, was zu beweisen war.

Korollar 14.13 Der Raum \mathbb{R}^n ist ein Banachraum bezüglich jeder p-Norm, $p \in [1, \infty]$.

Beweis. Wir wissen schon, dass $\mathbb{R}^n = B(\mathcal{E}_n)$ mit $\mathcal{E}_n = \{1, 2, ..., n\}$, da jede Funktion $f: \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}$ mit der Folge $(f(1), ..., f(n)) \in \mathbb{R}^n$ identifiziert wird. Nach dem Satz 14.12 ist $B(\mathcal{E}_n)$ vollständig bezüglich der sup-Norm. Somit ist \mathbb{R}^n vollständig bezüglich der ∞ -Norm. Es folgt aus dem Satz 14.11, dass \mathbb{R}^n vollständig auch bezüglich der p-Norm ist.

Korollar 14.14 Der Raum C[a,b] von allen reellwertigen stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall [a,b] ist ein Banachraum bezüglich der sup-Norm.

Beweis. Alle stetige Funktionen auf [a,b] sind beschränkt, so dass $C[a,b] \subset B[a,b]$. Offensichtlich ist C[a,b] ein Unterraum von B[a,b]. Insbesondere ist die sup-Norm eine Norm in C[a,b]. Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in C[a,b]. Dann ist $\{f_n\}$ auch eine Cauchy-Folge in B[a,b] und somit konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in B[a,b]$. Nach dem Satz 13.1 ist f stetig, d.h. $f \in C[a,b]$, und somit ist C[a,b] vollständig.

Bemerkung. Der Beweis von dem Korollar 14.14 lässt sich wie folgt verallgemeinern. Sei Y eine Teilmenge von X wobei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum ist. Ist Y abgeschlossen so ist der Unterraum (Y,d) ist auch vollständig, da jede Cauchy-Folge $\{x_n\}$ aus Y gegen ein $x \in X$ konvergiert, und x in Y liegen soll da Y abgeschlossen ist. Die Umkehrung gilt auch: ist der Unterraum (Y,d) vollständig so ist die Teilmenge Y abgeschlossen.

14.9 Fixpunktsatz von Banach

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Selbstabbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt Fixpunkt von f falls f(x) = x.

In diesem Abschnitt betrachten wir die Bedingungen für Existenz eines Fixpunktes und das Verfahren den Fixpunkt zu bestimmen.

Beispiel. Zeigen wir, dass jede stetige Funktion $f:[0,1] \to [0,1]$ einen Fixpunkt hat. In der Tat ist die Funktion f(x) - x nichtnegativ an x = 0 und nichtpositiv an x = 1. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Funktion f(x) - x eine Nullstelle, die ein Fixpunkt von f ist.

Andererseits es gibt viele Abbildungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne Fixpunkt, z.B. f(x) = x + 1.

Beispiel. Betrachten wir die Gleichung P(x) = 0 wobei P eine reellwertige Funktion auf \mathbb{R} ist. Jede Nullstelle x von P erfüllt offensichtlich die Gleichung

$$x = x - cP(x)$$

für beliebige Konstante $c \neq 0$. Folglich stimmen die Nullstellen von P mit den Fixpunkten der Funktion f(x) = x - cP(x) überein. Berechnen der Nullstelle einer Funktion ist somit äquivalent zur Berechnen des Fixpunktes anderer Funktion.

Definition. Eine Selbstabbildung $f: X \to X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt Kontraktionsabbildung falls es eine Konstante $q \in (0, 1)$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \le qd(x, y) \quad \forall x, y \in X. \tag{14.17}$$

Hauptsatz 14.15 (Fixpunktsatz von Banach) Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktionsabbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Zuerst beweisen wir ein Lemma.

Lemma 14.16 Gilt für eine Folge $\{x_n\}$ in einem metrischen Raum

$$d(x_{n+1}, x_n) \le Cq^n, (14.18)$$

wobei C > 0 und $q \in (0,1)$, so ist $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge.

Beweis. In der Tat, für jede m > n erhalten wir aus (14.18) mit Hilfe von der Dreiecksungleichung, dass

$$d(x_{m}, x_{n}) \leq d(x_{n}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_{m})$$

$$\leq C(q^{n} + q^{n+1} + \dots + q^{m-1})$$

$$\leq Cq^{n} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k}$$

$$= \frac{Cq^{n}}{1-q} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Insbesondere gilt $d(x_m, x_n) \to 0$ für $n, m \to \infty$, was bedeutet, dass $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.

Beweis von dem Satz 14.15. Wählen wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in X$ und definieren per Induktion eine Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ durch

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir beweisen, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergiert in X und der Grenzwert ein Fixpunkt von f ist.

Bemerken wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le qd(x_n, x_{n-1}).$$

Per Induktion erhalten wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0)$$
.

Nach dem Lemma 14.16 mit $C = d(x_1, x_0)$ erhalten wir, dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.

156

Nach der Vollständigkeit von (X, d) konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen einen Punkt $a \in X$. Daraus folgt

$$f(x_n) \to f(a)$$
,

für $n \to \infty$ da

$$d\left(f\left(x_{n}\right),f\left(a\right)\right)\leq qd\left(x_{n},a\right)\to0.$$

Andererseits gilt

$$f\left(x_{n}\right) = x_{n+1} \to a$$

für $n \to \infty$, woraus folgt f(a) = a. Also, a ist ein Fixpunkt. Sind a, b zwei Fixpunkte, so gilt es nach (14.17)

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \le qd(a,b),$$

woraus folgt d(a, b) = 0 und somit a = b.

Bemerkung. Der Beweis des Fixpunktsatzes ergibt die folgende Methode um den Fixpunkt zu bestimmen bzw anzunähern. Man fängt mit einem beliebigen Punkt x_0 an und bildet induktiv die Folge von Näherungslösungen wie folgt:

$$x_{n+1} = f(x_n), (14.19)$$

die gegen den Fixpunkt konvergiert. Die Folge $\{x_n\}$ heißt die Fixpunktiteration.

Beispiel. Fixieren ein a>0 und betrachten die Funktion $P(x)=x-\frac{a}{x}$ auf $(0,\infty)$, deren Nullstelle ist $x = \sqrt{a}$. Somit ist \sqrt{a} auch ein Fixpunkt der Funktion

$$f(x) = x - \frac{1}{2}P(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Man kann zeigen, dass f auf $X = [\sqrt{a}, \infty)$ Selbstabbildung und sogar eine Kontraktionsabbildung ist (siehe Aufgabe 127). Somit konvergiert die Fixpunktiteration $\{x_n\}$ gegen \sqrt{a} . Insbesondere lassen sich x_n als Annäherungen von \sqrt{a} betrachten. Nach (14.19) haben wir

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

und x_0 kann beliebig in X gewählt werden. Zum Beispiel, sei a=2. Setzen wir $x_0 = 2$ und

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Dann gilt $x_1 = f(2) = \frac{3}{2}$, $x_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$, $x_3 = f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408}$, $x_4 = f\left(\frac{577}{408}\right) = \frac{665857}{470832}$ und

$$x_5 = f\left(\frac{665\,857}{470\,832}\right) = \frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048} = 1.41421356237309505...,$$

was schon eine gute Annäherung von $\sqrt{2}$ mit 17 richtigen Nachkommastellen ist.

14.10 Kompakte Mengen und Extremwertsatz

Seien (X, d) ein metrischer Raum space und K eine Teilmenge von X.

Definition. Eine Überdeckung von K ist ein Mengensystem $\{V_{\alpha}\}_{{\alpha}\in S}$ von Teilmengen von X, die K überdeckt, d.h.

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in S} V_{\alpha},$$

wobei S eine beliebige Indexmenge ist. Sei T eine Teilmenge von S. Die Familie $\{V_{\alpha}\}_{\alpha\in T}$ heißt Teil"überdeckung von $\{V_{\alpha}\}_{\alpha\in S}$ falls sie auch K überdeckt. Die Überdeckung $\{V_{\alpha}\}_{\alpha\in S}$ heißt offen falls alle V_{α} offene Teilmengen von X sind.

In Analysis I haben wir Überdeckung von [a, b] mit offenen Intervallen betrachtet, und haben bewiesen, dass jede solche Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält (Überdeckungssatz).

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt kompakt falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Jede endliche Menge K ist offensichtlich kompakt. Jedes abgeschlossenes beschränktes Intervall [a,b] ist kompakt, was aus dem Überdeckungssatz folgt (später erhalten wir einen unabhängigen Beweis davon). Andererseits, offenes Intervall (a,b) ist nicht kompakt.

Eine von wichtigsten Eigenschaften von Kompaktheit ist die folgende Beziehung zur Stetigkeit.

Satz 14.17 Seien X und Y zwei metrische Räume spaces und $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist $K \subset X$ kompakt so ist auch das Bild $f(K) \subset Y$ kompakt.

Kurz: stetiges Bild kompakter Menge ist kompakt.

Beweis. Sei $\{V_{\alpha}\}_{{\alpha}\in S}$ eine offene Überdeckung von f(K), so dass

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in S} V_{\alpha}.$$

Anwendung von Urbildabbildung f^{-1} ergibt

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in S} f^{-1}(V_{\alpha}).$$

Nach dem Satz 14.8 ist $f^{-1}(V_{\alpha})$ eine offene Menge in X und somit ist $\{f^{-1}(V_{\alpha})\}_{\alpha \in S}$ eine offene Überdeckung von K in X. Nach der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(V_{\alpha})\}_{\alpha \in T}$ von K. Dann ist $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in T}$ eine endliche Teilüberdeckung von f(K), woraus die Kompaktheit von f(K) folgt.

Unser nächstes Ziel ist eine Beschreibung von kompakten Mengen in vollständigen metrischen Räumen, insbesondere in \mathbb{R}^n .

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt beschränkt falls sie in einer metrischen Kugel liegt.

Zum Beispiel, jedes beschränktes Intervall in \mathbb{R} ist eine beschränkte Menge.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt totalbeschränkt falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von K mit Kugeln von Radius ε gibt.

Die letzte Bedingung bedeutet folgendes: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten in X so dass $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ eine Überdeckung von K ist.

Bemerken wir die folgenden Eigenschaften von Beschränktheit und Totalbeschränktheit (siehe Aufgabe 128).

- Jede Teilmenge einer beschränkten Menge ist beschränkt (offensichtlich nach Definition).
- Jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge ist totalbeschränkt (offensichtlich nach Definition).
- Vereinigung endlich vieler beschränkten Mengen ist auch beschränkt.
- Vereinigung endlich vieler totalbeschränkten Mengen ist auch totalbeschränkt.
- Jede totalbeschränkte Menge ist beschränkt.

Es gibt beschränkte Mengen die nicht totalbeschränkt sind, z.B. im Raum C[a,b]. Wir werden unterhalb sehen, dass in \mathbb{R}^n die Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent sind.

09.01.19

Definition. Sei K eine Teilmenge von X. Jede endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten von X heißt ε -Netz von K falls es für jedes $x \in K$ ein i = 1, ..., n mit $d(x, x_i) < \varepsilon$ gibt. Äquivalent: die Folge von Kugeln $\{U_{\varepsilon}(x_i)\}_{i=1}^n$ ist eine Überdeckung von K.

Wir sehen, dass K totalbeschränkt genau dann ist, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε -Netz von K gibt.

Man kann zeigen, dass die Punkte x_i in Definition von ε -Netz immer aus K gewählt werden können (siehe Aufgabe 125). Ein ε -Netz lässt sich also als eine endliche Approximation von K mit dem Approximationsfehler $< \varepsilon$ betrachten.

Beispiel. Jedes beschränktes Intervall J in $\mathbb R$ ist totalbeschränkt. In der Tat enthält J für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge von den Gliedern der Folge $\left\{\frac{1}{2}\varepsilon k\right\}_{k \in \mathbb Z}$, die ein ε -Netz ergibt. Daraus folgt, dass jede beschränkte Menge in $\mathbb R$ totalbeschränkt ist. Somit in $\mathbb R$ sind Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent.

In der folgenden Aussage beweisen wir das Gleiche in \mathbb{R}^n .

Satz 14.18 Jede Kugel in \mathbb{R}^n ist totalbeschränkt. Folglich sind in \mathbb{R}^n Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent (bezüglich jeder p-Metrik).

Beweis. Bezeichnen wir die Kugel bezüglich der p-Metrik mit $U_r^p(x)$ und die Kugel bezüglich der ∞ -Metrik einfach mit $U_r(x)$. Es folgt aus (14.15), dass

$$U_r^p(x) \subset U_r(x)$$
,

so reicht es zu beweisen, dass $U_r(x)$ totalbeschränkt ist.

Wir beweisen per Induktion nach n dass die Kugel $U_r(0)$ in \mathbb{R}^n totalbeschränkt ist. Induktionsanfang für n=1 wurde schon im obigen Beispiel gemacht. Für den Induktionsschritt brauchen wir die folgenden zwei Aussagen.

Behauptung. Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$ betrachten wir das Paar (x, y) als Element von \mathbb{R}^{k+l} . Dann gilt

$$||(x,y)||_{\infty} = \max(||x||_{\infty}, ||y||_{\infty}).$$

Sei
$$x = (x_1, ..., x_k)$$
 und $y = (y_1, ..., y_l)$. Dann gilt

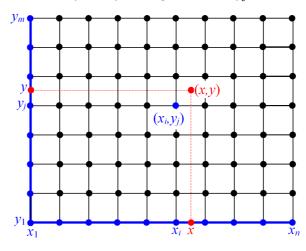
$$||x||_{\infty} = \max(|x_1|, ..., |x_k|), ||y||_{\infty} = \max(|y_1|, ..., |y_l|)$$

und somit

$$\|(x,y)\|_{\infty} = \max(|x_1|,...,|x_k|,|y_1|,...,|y_l|) = \max(\|x\|_{\infty},\|y\|_{\infty}).$$

Behauptung. Seien $X \subset \mathbb{R}^k$ und $Y \subset \mathbb{R}^l$ totalbeschränkte Mengen. Dann ist das Produkt $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+l}$ auch totalbeschränkt.

Seien $\{x_i\}_{i=1}^n$ und $\{y_j\}_{j=1}^m$ die ε -Netze in X bzw Y. Für jedes $x \in X$ gibt es ein x_i mit $d_{\infty}(x,x_i) < \varepsilon$ und für jedes $y \in Y$ gibt es ein y_j mit $d_{\infty}(y,y_j) < \varepsilon$.



Somit für jedes $(x,y) \in X \times Y$ gibt es x_i und y_i mit

$$d_{\infty}((x,y),(x_i,y_i)) = \|(x,y) - (x_i,y_i)\|_{\infty} = \max(\|x - x_i\|_{\infty}, \|y - y_i\|_{\infty}) < \varepsilon.$$

Es folgt, dass die Doppelfolge $\{(x_i, y_j)\}$ von nm Punkten ein ε -Netz in $X \times Y$ ist. Jetzt setzen wir den Beweis von Totalbeschränktheit der Kugel $U_r(0)$ in \mathbb{R}^n fort. Induktionsschritt von n nach n+1. Da $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, so lässt sich jedes $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ wie folgt darstellen

$$x = (x', t)$$
 mit $x' = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $t = x_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Die Bedingung $\|x\|_{\infty} < r$ ist äquivalent zu

$$||x'||_{\infty} < r \quad \text{und} \quad |t| < r.$$

Es folgt, dass für ∞ -Kugeln in \mathbb{R}^{n+1} gilt

$$\begin{array}{lcl} U_r^{\mathbb{R}^{n+1}}\left(0\right) & = & \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_{\infty} < r\right\} \\ & = & \left\{(x',t) : x' \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R} \ \mathrm{mit} \ \|x'\|_{\infty} < r \ \mathrm{und} \ |t| < r\right\} \\ & = & U_r^{\mathbb{R}^n}\left(0\right) \times U_r^{\mathbb{R}}\left(0\right). \end{array}$$

Da $U_r^{\mathbb{R}^n}(0)$ und $U_r^{\mathbb{R}}(0)$ totalbeschränkt sind, so ist $U_r^{\mathbb{R}^{n+1}}(0)$ auch totalbeschränkt. Da jede Kugel in \mathbb{R}^n beschränkt ist, so ist jede endliche Vereinigung von Kugeln auch beschränkt. Es folgt dass jede totalbeschränkte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ auch beschränkt ist, da K in einer endlichen Vereinigung von Kugeln liegt.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt folgenkompakt falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K enthält.

Zum Beispiel, jedes abgeschlossenes beschränktes Intervall [a,b] ist folgenkompakt (nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass), während offenes Intervall (a,b) nicht folgenkompakt ist.

Hauptsatz 14.19 Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und K eine Teilmenge von X. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent.

- (i) K ist kompakt.
- (ii) K ist folgenkompakt.
- (iii) K ist totalbeschränkt und abgeschlossen.

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Wir benutzen die folgende Terminologie. Ein Punkt $x \in X$ heißt $H\ddot{a}ufungspunkt$ der Folge $\{x_n\}$ falls x der Grenzwert einer Teilfolge von $\{x_n\}$ ist. Ein Punkt $x \in X$ heißt Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ falls jede Kugel $U_r(x)$ mit r > 0 unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält.

Behauptung. Ein $x \in X$ ist Häufungspunkt von $\{x_n\}$ genau dann, wenn x Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ ist.

In der Tat, ist x ein Häufungspunkt, so enthält jeder Kugel $U_r(x)$ fast alle Glieder einer Teilfolge und somit unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$. Ist x ein Verdichtungspunkt, so gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ mit $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$, die gegen x konvergiert, so dass x ein Häufungspunkt ist.

Sei K kompakt und sei $\{x_n\}$ eine Folge in K. Zeigen wir, dass $\{x_n\}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert in K enthält, d.h. es einen Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ in K gibt. Nehmen wir das Gegenteil an, dass jeder Punkt $x \in K$ kein Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ ist. Das bedeutet, dass für jedes $x \in K$ es ein $\varepsilon_x > 0$ gibt so dass die Kugel $U_{\varepsilon_x}(x)$ nur endlich viele von Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält. Die Familie $\{U_{\varepsilon_x}(x)\}_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung von K, woraus folgt, dass sie eine endliche Teilüberdeckung enthält. Da jede Kugel $U_{\varepsilon_x}(x)$ nur endlich viele von den Gliedern der Folge $\{x_n\}$ enthält, so folgt es, dass die Folge $\{x_n\}$ nur endlich viele Glieder enthält, was ein Widerspruch ist.

 $(ii) \implies (iii)$ Zeigen wir zuerst, dass K abgeschlossen ist. Sei $\{x_n\}$ eine Folge in K die einen Grenzwert $a \in X$ hat. Beweisen wir, dass $a \in K$. Nach der Folgenkompaktheit von K besitzt $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K. Da der Grenzwert der Teilfolge auch gleich a ist, so erhalten wir $a \in K$.

Beweisen wir jetzt, dass K totalbeschränkt ist, d.h. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε -Netz von K gibt. Nehmen wir das Gegenteil an, dass es für ein $\varepsilon > 0$ kein ε -Netz gibt. Definieren wir dann induktiv eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ wie folgt. Sei $x_1 \in K$ beliebig. Sind $x_1, ..., x_n$ schon bestimmt, so wählen wir x_{n+1} wie folgt. Die Kugeln

 $\{U_{\varepsilon}(x_i)\}_{i=1}^n$ überdecken K nicht, da sonst $\{x_i\}_{i=1}^n$ ein ε -Netz wäre. Somit gibt es einen Punkt in K, der in keiner Kugel $U_{\varepsilon}(x_i)$, i=1,...,n liegt, so bezeichnen wir diesen Punkt mit x_{n+1} .

Nach Konstruktion gilt $d(x_n, x_m) \ge \varepsilon$ für beliebige zwei Indizes $n \ne m$. Daraus folgt, dass $\{x_n\}$ keine Cauchy-Folge ist und darüber hinaus keine Teilfolge von $\{x_n\}$ Cauchy-Folge ist. Somit keine Teilfolge von $\{x_n\}$ konvergiert, was in Widerspruch zur Folgenkompaktheit von X ist.

 $(iii) \implies (i)$ Angenommen, dass K totalbeschränkt und abgeschlossen ist, beweisen wir, dass jede offene Überdeckung $\{V_{\alpha}\}$ von K eine endliche Teilüberdeckung von K besitzt. Nehmen wir das Gegenteil an: es gibt in $\{V_{\alpha}\}$ keine endliche Teilüberdeckung von K.

Wir werden eine Folge $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ von Mengen mit den folgenden Eigenschaften aufbauen:

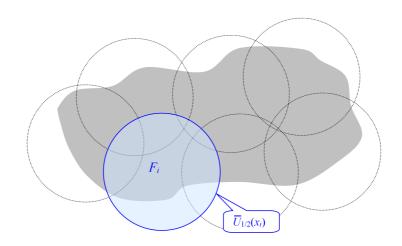
- (a) $K_0 = K$ und $K_{n+1} \subset K_n$;
- (b) jedes K_n ist abgeschlossen und totalbeschränkt;
- (c) K_n liegt in einer abgeschlossenen Kugel von Radius 2^{-n} für jedes $n \ge 1$;
- (d) K_n lässt keine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$ zu.

Zuerst bestimmen wir K_1 . Nach Totalbeschränktheit gibt es ein $\frac{1}{2}$ -Netz $\{x_i\}$ von K. Setzen wir

$$F_{i} = \overline{U}_{\frac{1}{2}}\left(x_{i}\right) \cap K$$

und bemerken folgendes:

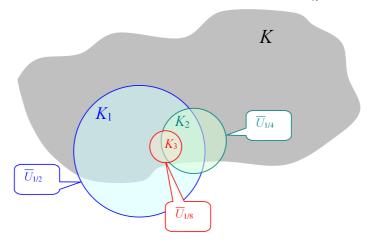
- $F_i \subset K$
- F_i ist abgeschlossen und totalbeschränkt;
- F_i liegt in einer abgeschlossenen Kugel von Radius $\frac{1}{2}$;
- $\bullet \ \bigcup_i F_i = K.$



Falls jedes F_i eine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$ zulässt, so liefert die Vereinigung von allen Teilüberdeckungen von F_i eine endliche Teilüberdeckung von K. Somit existiert ein F_i ohne endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$. Setzen wir $K_1 = F_i$ für dieses i.

Offensichtlich erfüllt K_1 alle Bedingungen (a)-(d) mit n = 1.

Ist K_n schon bestimmt, so konstruieren wir K_{n+1} mit der gleichen Methode, indem wir K_n anstatt K benutzen und ein $2^{-(n+1)}$ -Netz von K_n wählen.



Für jedes n wählen wir einen Punkt a_n aus K_n . Es folgt aus (c) dass

$$K_n \subset \overline{U}_{2^{-(n-1)}}(a_n). \tag{14.20}$$

Da $a_{n+1} \in K_{k+1} \subset K_n$, so gilt

$$d(a_n, a_{n+1}) \le 2^{-(n-1)}$$
.

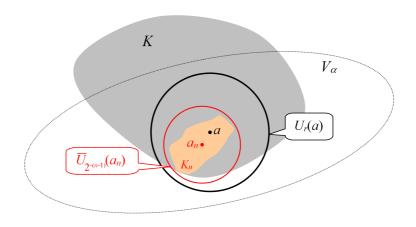
Nach Lemma 14.16 ist $\{a_n\}$ eine Cauchy-Folge, und nach der Vollständigkeit von X ist die Folge $\{a_n\}$ konvergent, sei $a_n \to a$.

Da jedes K_n fast alle a_m enthält und K_n abgeschlossen ist, so liegt a in jedem K_n . Insbesondere liegt der Punkt a auch in einer Menge V_α . Da V_α offen ist, so existiert ein r > 0 mit $U_r(a) \subset V_\alpha$. Für hinreichend großes n gilt auch

$$\overline{U}_{2^{-(n-1)}}(a_n) \subset U_r(a), \qquad (14.21)$$

da für großes n

$$d(a, a_n) + 2^{-(n-1)} < r.$$



Es folgt aus (14.20) und (14.21), dass

$$K_n \subset U_r(a) \subset V_{\alpha}$$
.

Somit ist K_n nur von einer Menge V_α überdeckt, was im Widerspruch zur (d) steht.

11.01.19

Korollar 14.20 Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Der Raum \mathbb{R}^n ist vollständig nach Korollar 14.13. Nach dem Satz 14.18 ist K totalbeschränkt genau dann, wenn K beschränkt ist. Somit folgt die Aussage aus dem Satz 14.19.

Korollar 14.21 (Extremwertsatz) Seien K eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f: K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren die beiden Werten $\max_K f$ und $\min_K f$.

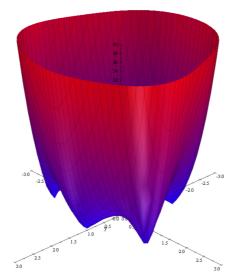
Beweis. Da K nach dem Satz 14.20 kompakt ist, so ist f(K) auch kompakt nach dem Satz 14.17. Somit ist f(K) beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} . Insbesondere sind $\sup_K f = \sup_K f(K)$ und $\inf_K f = \inf_K f(K)$ endlich. Da $\sup_K f$ und $\inf_K f$ die Grenzwerte von Folgen aus f(K) sind, so liegen sie in f(K) nach der Abgeschlossenheit von f(K). Somit existieren die beiden Werte $\max_K f(K)$ und $\min_K f(K)$.

Korollar 14.22 Alle Normen in \mathbb{R}^n sind äquivalent (Beweis in Aufgabe 134).

14.11 Fundamentalsatz der Algebra

Hauptsatz 14.23 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom $P(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n$ des Grades $n \ge 1$ mit komplexwertigen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n \ne 0$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Wir beweisen, dass die reellwertige Funktion $z \mapsto |P(z)|$ ein Minimum in \mathbb{C} besitzt und min |P(z)| = 0 ist, woraus folgt, dass die Minimumstelle von |P(z)| auch eine Nullstelle von P(z) ist.



Der Graph der Funktion $|z^5 + 2z^2 - 4|$

Bemerken wir zunächst, dass

$$|P(z)| \to \infty \text{ für } |z| \to \infty,$$

da

$$|P(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - |a_{n-2} z^{n-2}| - \dots - |a_0|$$

$$= |z^n| \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} - \dots \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)$$

$$\sim |a_n z^n| \text{ für } |z| \to \infty,$$

und $|a_n z^n| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Wählen wir R > 0 so groß, dass $|P(z)| > |a_0|$ für alle |z| > R, und betrachten eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$K:=\overline{U}_{R}\left(0\right)=\left\{ z\in\mathbb{C}:\left|z\right|\leq R\right\} .$$

Da die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ offensichtlich stetig ist, so nimmt die Funktion |P(z)| nach Korollar 14.21 den minimalen Wert in K an einer Stelle $z_0 \in K$ an. Dann gilt

$$|P(z_0)| \le |P(0)| = |a_0| < |P(z)|$$
 für alle $z \notin K$.

Somit ist z_0 die Minimumstelle von |P(z)| nicht nur in K sondern auch in \mathbb{C} .

Zeigen wir, dass $|P(z_0)| = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $z_0 = 0$ (sonst stellen wir P(z) als ein Polynom von $(z - z_0)$ dar und benennen $z - z_0$ in z um). Nehmen wir das Gegenteil an, dass $P(0) \neq 0$, d.h. $a_0 \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a_0 = 1$, d.h.

$$P(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

Zeigen wir die Existenz von einem $z \in \mathbb{C}$ mit |P(z)| < |P(0)| = 1, was im Widerspruch zur Minimalität von |P(0)| stehen wird.

Sei k der minimale Index mit $a_k \neq 0$, so dass

$$P(z) = 1 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n.$$

Wir wählen ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $a_k z^k$ ist eine negative reelle Zahl
- (b) $|a_k z^k| < 1$

(c)
$$\left| a_{k+1}z^{k+1} + \dots + a_nz^n \right| < \frac{1}{2} \left| a_kz^k \right|$$

Gelten (a) - (c), so erhalten wir

$$|P(z)| \leq |1 + a_k z^k| + |a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n|$$

$$\leq |1 + a_k z^k| + \frac{1}{2} |a_k z^k|$$

$$= 1 + a_k z^k - \frac{1}{2} a_k z^k \quad (\text{da } a_k z^k \text{ negativ ist})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} a_k z^k$$

$$< 1,$$

was zu beweisen war.

Es bleibt ein z mit (a)-(c) zu finden. Dafür benutzen wir die Polarform komplexer Zahlen:

$$z = re^{i\theta}$$
 und $a_k = ae^{i\alpha}$

wobei r und θ zu bestimmen sind und a, α gegeben. Dann gilt

$$a_k z^k = (ae^{i\alpha})(r^k e^{ik\theta}) = ar^k e^{i(\alpha + k\theta)}.$$

Diese Zahl ist reell und negativ falls

$$\alpha + k\theta = \pi,$$

und somit für

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{k}.\tag{14.22}$$

Jetzt bestimmen wir r. Da

$$|a_k z^k| = ar^k,$$

so gilt $|a_k z^k| < 1$ für alle klein genug r, d.h. (b). Die Bedingung (c) gilt auch für reichend kleine Werte von r = |z| da

$$\frac{\left|a_{k+1}z^{k+1} + \dots + a_nz^n\right|}{|a_kz^k|} = \frac{\left|a_{k+1}z + \dots + a_nz^{n-k}\right|}{|a_k|} \to 0 \text{ für } z \to 0.$$

Somit erfüllt $z=re^{i\theta}$ die Bedingungen (a)-(c) falls θ aus (14.22) gewählt ist und r klein genug ist. \blacksquare

14.12 Zusammenhängende Mengen und Zwischenwertsatz

Definition. Eine Teilmenge K von einem metrischen Raum X heißt zusammenhängend falls für jede Überdeckung $K \subset U \sqcup V$ von K mit zwei disjunkten offenen Mengen U, V gilt $K \subset U$ oder $K \subset V$.

Satz 14.24 (Zwischenwertsatz) Seien X und Y zwei metrische Räume und f: $X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist K eine zusammenhängende Teilmenge von X so ist f(K) auch zusammenhängend.

Beweis. Sei $f(K) \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von f(K) mit disjunkten offenen Mengen. Daraus folgt

$$K \subset f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V)$$
.

Da nach dem Satz 14.8 $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen sind, so ergibt der Zusammenhang von K, dass $K \subset f^{-1}(U)$ oder $K \subset f^{-1}(V)$, woraus folgt, dass $f(K) \subset U$ oder $f(K) \subset V$, was zu beweisen war.

Satz 14.25 Jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Umgekehrt, jede zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} ist ein Intervall.

Beweis. Zeigen wir, dass beliebiges Intervall J zusammenhängend ist. Sei $J \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von J mit offenen Mengen. Definieren wir eine Funktion $f: J \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \cap J, \\ 0, & x \in V \cap J. \end{cases}$$

Beweisen wir, dass f stetig auf J ist. Für jedes $x \in U \cap J$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset U$$

woraus folgt, dass $f \equiv 1$ in $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap J$. Insbesondere ist f stetig an x. Analog ist f stetig an alle Stellen $x \in V \cap J$ und somit auf J.

Sind $U \cap J$ und $V \cap J$ nicht leer, so nimmt f die Werte 0 und 1 an und somit nach dem Zwischenwertsatz aus Analysis 1 soll f auch alle Werte in [0,1] annehmen, was nicht der Fall ist. Somit ist $U \cap J$ oder $V \cap J$ leer, woraus folgt, dass $J \subset V$ oder $J \subset U$.

Sei K eine zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} . Beweisen wir, dass K ein Intervall ist. Für $a,b\in K$ soll auch ganzes Intervall [a,b] in K liegen, da sonst es einen Punkt $c\in(a,b)\setminus K$ gibt und wir eine Überdeckung erhalten

$$K \subset (-\infty, c) \sqcup (c, +\infty)$$

mit $K \not\subset (-\infty, c)$ und $K \not\subset (c, \infty)$, was im Widerspruch mit Zusammenhang von K steht. Es folgt, dass K ein Intervall mit den Grenzen inf K und sup K ist.

Bemerkung. Als eine Folgerung aus den Sätzen 14.24 und 14.25 erhalten wir, dass das Bild der stetigen Abbildung $f: J \to \mathbb{R}$ wieder ein Intervall ist, was aus Analysis 1 schon bekannt ist.

16.01.19

Für jede zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit [x, y] die Menge

$$[x, y] := \{(1 - \lambda) x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Die Menge [x, y] ist die gerade Strecke zwischen x und y.

Definition. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Sterngebiet*, falls es einen Punkt $a \in K$ gibt mit

$$x \in K \Rightarrow [a, x] \in K$$
.

Der Punkt a heißt ein Sternzentrum.

Beispiel. Zeigen wir, dass jede offene oder abgeschlossene Kugel in \mathbb{R}^n bezüglich einer Norm immer ein Sterngebiet ist. Sei K eine (offene oder abgeschlossene) Kugel mit Zentrum a und Radius r, d.h.

$$K = U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| < r\} \text{ oder } K = \overline{U}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| \le r\}.$$

Zeigen wir, dass a ein Sternzentrum von K ist, d.h. für jedes $x \in K$ gilt $[a, x] \subset K$. Jeder Punkt $y \in [a, x]$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$y = (1 - \lambda) a + \lambda x$$
 für ein $\lambda \in [0, 1]$,

woraus folgt, dass

$$||y - a|| = ||\lambda x - \lambda a|| = |\lambda| ||x - a|| \le ||x - a||$$

und somit $y \in K$ und $[a, x] \subset K$.

Satz 14.26 Jedes Sterngebiet K in \mathbb{R}^n ist zusammenhängend. Insbesondere sind alle Kugeln in \mathbb{R}^n zusammenhängend.

Beweis. Sei a ein Sternzentrum von K, so dass für jedes $x \in K$ gilt $[a,x] \subset K$. Sei $K \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von K mit offenen Mengen. Nehmen wir an, dass $a \in U$. Es folgt, dass U, V auch eine Überdeckung von [a,x] für jedes $x \in K$ ist, d.h.

$$[a,x] \subset U \sqcup V.$$

Die Strecke [a, x] ist das Bild von [0, 1] unter der Abbildung

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

 $\varphi(\lambda) = (1-\lambda) a + \lambda x.$

Da φ offensichtlich stetig ist, so ist $[a,x]=\varphi([0,1])$ zusammenhängend nach dem Satz 14.24. Somit soll [a,x] in einer von U,V enthalten. Da $a\in U$, es folgt, dass $[a,x]\subset U$, woraus folgt $x\in U$ und $K\subset U$.

Beispiel. Bestimmen wir das Bild der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2}$$

auf der Menge

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$$

Die Funktion $f: K \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich stetig. Da K Sterngebiet ist und somit zusammenhängend, so ist das Bild f(K) zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} und

somit ein Intervall. Bestimmen wir die Grenzen des Intervalls, d.h. sup f und inf f, und ob diese dem Intervall gehören. Wir haben

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} < x^{2} + y^{2} + z^{2} + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^{2}$$

so dass f(x, y, z) < 1 und sup $f \le 1$. In der Tat gilt sup f = 1 da für $y \to 0$ und $z \to 0$ erhalten wir $f(x, y, z) \to 1$. Offensichtlich liegt sup f = 1 nicht in f(K).

Andererseits, nach der Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittelwerten gilt 2

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} \ge \frac{1}{3} (x + y + z)^{2},$$
 (14.23)

woraus folgt

$$f\left(x,y,z\right) \ge \frac{1}{3}$$

und somit inf $f \ge \frac{1}{3}$. Da $f(1,1,1) = \frac{1}{3}$, so erhalten wir inf $f = \frac{1}{3} \in f(K)$. Es folgt, dass

$$f(K) = [\frac{1}{3}, 1).$$

14.13 * Gleichmäßige Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und K Teilmenge von X. Eine Funktion $f: X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig auf K falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in K \ \text{mit} \ d_X(x, y) < \delta \ \text{gilt} \ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Satz 14.27 Sei $f: X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf jeder Kompakte Teilmenge $K \subset X$.

Beweis. Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$. Nach der Stetigkeit von f, für jedes $x \in X$ gibt es ein $\delta_x > 0$ so dass

$$\forall y \in X \text{ mit } d_X(x, y) < \delta_x \text{ gilt } d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/2.$$

Das Mengensystem von Kugeln $\left\{B\left(x,\frac{1}{2}\delta_{x}\right)\right\}_{x\in X}$ ist eine offene Überdeckung von K. Sei $\left\{B\left(x_{k},\frac{1}{2}\delta_{x_{k}}\right)\right\}_{k=1}^{n}$ eine endliche Teilüberdeckung. Setzen wir

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \le k \le n} \delta_{x_k}.$$

Seien jetzt x,y beliebige Punkte in K mit $d_X(x,y) < \delta$. Der Punkt x liegt in einer Kugel $B\left(x_k,\frac{1}{2}\delta_{x_k}\right)$. Da $d_X(x,y) < \frac{1}{2}\delta_{x_k}$, so liegt der Punkt y in $B\left(x_k,\delta_{x_k}\right)$. Es folgt nach der Definition von δ_{x_k} dass

$$d_Y(f(x), f(x_k)) < \varepsilon/2 \text{ und } d_Y(f(y), f(x_k)) < \varepsilon/2,$$

$$3(x^{2} + y^{2} + z^{3}) = (x + y + z)^{2} + (x - z)^{2} + (y - z)^{2} + (x - y)^{2},$$

woraus (14.23) folgt.

²Es gilt die Identität

was nach der Dreiecksungleichung ergibt

$$d_Y\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<\varepsilon,$$

was zu beweisen war.

14.14 * Vervollständigung von metrischen Räumen

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass für jeden metrischen Raum es eine vollständige Erweiterung gibt.

Definition. Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen isometrisch falls es eine bijektive³ Abbildung $\Phi: X \to Y$ gilt so dass

$$d_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$
 für alle $x_1, x_2 \in X$. (14.24)

Die Abbildung Φ heißt dann *Isometrie*.

Sind zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) isometrisch, so sind alle Eigenschaften dieser Räume identisch, so häufig identifiziert man (X, d_X) und (Y, d_Y) .

Zum Beispiel, we haben gesehen, dass $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ isometrisch zu $B(\mathcal{E}_n)$ ist und zwar mit der Isometrie

$$\Phi : B(\mathcal{E}_n) \to \mathbb{R}^n
\Phi(f) = (f(1), ..., f(n))$$

für beliebige Funktion $f \in B(\mathcal{E}_n)$. Somit können wir \mathbb{R}^n mit $B(\mathcal{E}_n)$ identifizieren und sagen, dass jede Funktion $f \in B(\mathcal{E}_n)$ ein Element von \mathbb{R}^n ist.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subset X$ definieren wir den Abschluss \overline{A} von A als die Teilmenge von X die aus allen Grenzwerten von allen konvergenten Folgen aus A besteht.

Insbesondere gilt immer $A \subset \overline{A}$. Die Identität $A = \overline{A}$ gilt genau dann, wenn A abgeschlossen ist.

Definition. Man sagt, dass die Menge $A \subset X$ dicht in X liegt falls $\overline{A} = X$.

Zum Beispiel, \mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{R} , da jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist.

Jeder metrische Raum (X, d) lässt sich vervollständigen wie folgt.

Satz 14.28 Für jeden metrischen Raum (X,d) gibt es einen anderen metrischen Raum $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ mit den folgenden Eigenschaften:

ullet $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ ist vollständig

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow d_X(x_1, x_2) \neq 0 \Rightarrow d_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \neq 0 \Rightarrow \Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)$$
.

 $^{^3}$ Es reicht zu erfordern, dass Φ surjektiv ist, da es aus (14.24) folgt, dass Φ injektiv ist:

• Es gibt eine Teilmenge $Y \subset \widetilde{X}$ so dass Y dicht in \widetilde{X} liegt und (Y, \widetilde{d}) isometrisch zu (X, d) ist.

Der Raum $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ heißt die *Vervollständigung* von (X,d). Man kann (X,d) mit $\left(Y,\widetilde{d}\right)$ identifizieren und dann sagen, dass \widetilde{X} eine vollständige Erweiterung von X ist.

Zum Beispiel, \mathbb{R} ist die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich der Metrik d(x,y) = |x-y|, was wir unterhalb erklären.

Beweis. Bezeichnen wir mit F die Menge von allen Cauchy-Folgen in X. Die Elementen von F werden mit f, g usw. bezeichnet. Ist f ein Element von F so werden die Glieder der Folge f wie üblich mit f_k bezeichnet so dass $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Zwei Folgen f und g aus F heißen äquivalent falls $d(f_k, g_k) \to 0$ für $k \to \infty$. In diesem Fall schreibt man $f \sim g$. Es ist klar, dass die Relation \sim eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklasse der Folge $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wird mit [f] oder $[\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}]$ bezeichnet. Bezeichnen wir mit [F] die Menge von allen Äquivalenzklassen von Elementen von F. Für [f], $[g] \in [F]$ definieren wir

$$\widetilde{d}\left(\left[f\right],\left[g\right]\right) = \lim_{k \to \infty} d\left(f_k, g_k\right). \tag{14.25}$$

Da $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$ Cauchy-Folgen sind, so ist $\{d(f_k, g_k)\}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} , da

$$|d(f_n, g_n) - d(f_m, g_m)| \le d(f_n, f_m) + d(g_n, g_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Da jede Cauchy-Folge in $\mathbb R$ konvergiert, so existiert der Grenzwert in (14.25). Auch ist der Grenzwert unabhängig von der Wahl von f aus der Klasse [f]. In der Tat, gilt $f' \sim f$ so erhalten wir

$$|d(f'_k, g_k) - d(f_k, g_k)| \le d(f'_k, f_k) \to 0$$
 für $k \to \infty$

so dass

$$\lim_{k \to \infty} d(f_k, g_k) = \lim_{k \to \infty} d(f'_k, g_k).$$

Somit ist die Funktion \widetilde{d} wohldefiniert auf $[F] \times [F]$.

Behauptung. Die Funktion \tilde{d} ist eine Metrik auf [F].

Die Symmetrie und Dreiecksungleichung von \widetilde{d} folgen direkt aus (14.25). Auch es ist klar, dass $\widetilde{d} \geq 0$. Beweisen wir dass

$$\widetilde{d}([f],[g]) = 0 \Leftrightarrow [f] = [g].$$

In der Tat haben wir

$$\widetilde{d}([f],[g]) = 0 \Leftrightarrow d(f_k,g_k) \to 0 \Leftrightarrow f \sim g \Leftrightarrow [f] = [g].$$

Somit ist \widetilde{d} eine Metrik.

Behauptung. Für jedes $x \in X$ betrachten wir die konstante Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{x, x, ...\}$ mit $x_k = x$ für alle k. Diese Folge ist Cauchy-Folge in X und somit

bestimmt ein Element von [F] das mit [x] bezeichnet wird. Bezeichnen wir mit [X] die Teilmenge von [F] die aus allen Elementen [x] besteht. Dann ist $([X], \widetilde{d})$ isometrisch zu (X, d).

Die Abbildung $x\mapsto [x]$ ist offensichtlich eine Bijektion von X nach [X]. Es gilt für alle $x,y\in X$

$$\widetilde{d}([x],[y]) = \lim_{k \to \infty} d(x_k, y_k) = \lim_{k \to \infty} d(x, y) = d(x, y),$$

woraus folgt, dass die Abbildung $x \mapsto [x]$ eine Isometrie ist.

Behauptung. [X] liegt dicht in [F].

Für jedes $f \in F$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die konstante Folge

$$\{f_n\}_{k\in\mathbb{N}} = \{f_n, f_n, ...\}.$$

Diese Folge bestimmt die Äquivalenzklasse $[f_n] \in [X]$. Zeigen wir, dass

$$[f_n] \to [f] \text{ für } n \to \infty,$$

woraus es folgen wird, dass [X] dicht in [F] liegt. Wir haben

$$\widetilde{d}\left(\left[f_{n}\right],\left[f\right]\right) = \lim_{k \to \infty} d\left(f_{n}, f_{k}\right)$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{d}\left(\left[f_{n}\right],\left[f\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}d\left(f_{n},f_{k}\right)=0,$$

da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Behauptung. $([F], \widetilde{d})$ ist vollständig.

Sei $\{[y_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Elementen von [F] (wobei jedes y_n selbst eine Cauchy-Folge $\{y_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen von X ist). Fa [X] dicht in [F] liegt, so gibt es für jedes $[y_n] \in [F]$ ein $[x_n] \in [X]$ (wobei $x_n \in X$) mit

$$\widetilde{d}\left(\left[x_{n}\right],\left[y_{n}\right]\right)<\frac{1}{n},$$

Es folgt, dass die Folge $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy-Folge in [F] ist.

Da (X, d) und ([X], d) isometrisch sind, so ist die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Somit bestimmt diese Folge ein Element $f \in F$ mit $f_n = x_n$. Wir haben schon oberhalb gesehen, dass

$$\widetilde{d}([x_n], [f]) = \widetilde{d}([f_n], [f]) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus folgt, dass auch

$$\widetilde{d}([y_n], [f]) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit gilt $[y_n] \to [f]$ und die Folge $\{[y_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

Es bleibt nur zu setzen $\widetilde{X} = [F]$ und Y = [X].

172

Sei X ein normierter Vektorraum mit der Norm N und Metrik d(x,y) = N(x-y). Dann ist der Raum X auch ein normierter Vektorraum mit den linearen Operationen

$$[f] + [g] = \left[\{ f_k + g_k \}_{k \in \mathbb{N}} \right], \quad \lambda [f] = \left[\{ \lambda f_k \}_{k \in \mathbb{N}} \right]$$

und der Norm

$$\widetilde{N}\left([f]\right) = \lim_{k \to \infty} N\left(f_k\right).$$

Es folgt, dass

$$\widetilde{d}\left(\left[f\right],\left[g\right]\right) = \lim_{k \to \infty} d\left(f_k, g_k\right) = \lim_{k \to \infty} N\left(f_k - g_k\right) = \widetilde{N}\left(\left[f\right] - \left[g\right]\right),$$

so dass die Metrik \widetilde{d} von der Norm \widetilde{N} erzeugt ist. Somit ist $(\widetilde{X},\widetilde{N})$ ein Banachraum, und X lässt sich als ein dicht liegender Unterraum von \widetilde{X} identifizieren.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{Q}$ und d(x,y) = |x-y|. Der Raum \mathbb{Q} von rationalen Zahlen ist nicht vollständig, da jede Folge $\{f_k\}$ von rationalen Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl in \mathbb{R} konvergiert, ist offensichtlich Cauchy-Folge in \mathbb{Q} aber ohne den Grenzwert in \mathbb{Q} .

Die Vervollständigung von $\mathbb Q$ ist der Raum $\widetilde{\mathbb Q}$ von allen Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus \mathbb{Q} . Jede Cauchy-Folge $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen hat den Grenzwert in \mathbb{R} den wir mit \overline{f} bezeichnen, d.h.

$$\overline{f} = \lim_{k \to \infty} f_k.$$

Gilt $f \sim g$ so erhalten wir

$$\left|\overline{f} - \overline{g}\right| = \lim \left|f_k - g_k\right| = 0$$

so dass $\overline{f} = \overline{g}$. Somit ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\widetilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[f] \mapsto \overline{f}$$

$$(14.26)$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv da jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen sit. Es gilt für zwei Cauchy-Folgen f, g von rationalen Zahlen

$$\widetilde{d}([f],[g]) = \lim_{k \to \infty} |f_k - g_k| = |\overline{f} - \overline{g}| = d(\overline{f},\overline{g}),$$

so dass die Abbildung (14.26) eine Isometrie ist. Somit ist die Vervollständigung Q von \mathbb{Q} isometrisch zu \mathbb{R} .

In anderen Wörtern, die Menge \mathbb{R} von reellen Zahlen lässt sich mit der Menge von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen identifizieren.

* p-adische Zahlen 14.15

Betrachten wir in $X = \mathbb{Q}$ eine andere Metrik. Fixieren wir eine Primzahl p und definieren in \mathbb{Q} eine p-adische Norm wie folgt. Jedes $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig darstellen wie folgt:

$$x = p^n \frac{a}{b},$$

wobei $a, b, n \in \mathbb{Z}$ und a, b durch p nicht teilbar sind. Dann setzen wir

$$||x||_p := p^{-n}$$
.

Für x = 0 setzen wir $||0||_p = 0$. Zum Beispiel, es gilt

$$\|10, 8\|_3 = \left\|\frac{54}{5}\right\|_3 = \left\|3^3 \frac{2}{5}\right\|_3 = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die p-adische Norm die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$||xy||_{p} = ||x||_{p} ||y||_{p} \tag{14.27}$$

und

$$||x + y||_p \le \max(||x||_p, ||y||_p).$$
 (14.28)

Definieren wir den *p-adischen Abstand* zwischen $x, y \in \mathbb{Q}$ wie folgt:

$$d_p(x,y) := ||x - y||_p$$
.

Es folgt aus (14.28), dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt

$$d_p(x, y) \le \max(d_p(x, z), d_p(y, z)).$$
 (14.29)

Somit erfüllt d_p die Dreiecksungleichung⁴ und auch die anderen Axiome von Metrik. **Definition.** Die Metrik d_p in \mathbb{Q} heißt die p-adische Metrik.

Es folgt aus (14.27) und (14.28), dass der Grenzwert in (\mathbb{Q}, d_p) die folgenden Eigenschaften erfüllt: gelten

$$x_n \xrightarrow{d_p} x \text{ und } y_n \xrightarrow{d_p} y$$
 (14.30)

so gelten auch

$$x_n + y_n \xrightarrow{d_p} x + y \quad \text{und} \quad x_n y_n \xrightarrow{d_p} xy.$$
 (14.31)

Definition. Die Vervollständigung $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von (\mathbb{Q}, d_p) wird mit \mathbb{Q}_p bezeichnet, und die Elemente von \mathbb{Q}_p heißen p-adische Zahlen.

Wir betrachten \mathbb{Q} als dichte Teilmenge von \mathbb{Q}_p . Man definiert die Operationen x + y und xy auf p-adischen Zahlen x, y mit Hilfe von (14.31), wobei $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ jetzt die Folgen von rational Zahlen mit (14.30) sind. Es folgt, dass \mathbb{Q}_p ein Körper ist.

Analog erweitert man den Begriff von p-Norm auf \mathbb{Q}_p und zeigt, dass die p-Norm in \mathbb{Q}_p auch (14.27) und (14.28) erfüllt. Somit ist \mathbb{Q}_p ein normierter Körper.

Um zu verstehen wie die p-adischen Zahlen aussehen, betrachten wir zuerst eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k,$$

⁴Die Ungleichung (14.29) ist stärker als die Dreiecksungleichung, und sie heißt *ultrametrische* Dreiecksungleichung. Jede Metrik die ultrametrische Dreiecksungleichung erfüllt heißt *Ultrametrik*. Somit ist d_p eine Ultrametrik.

wobei a_k die p-adische Ziffern sind, d.h. $a_k \in \{0, ..., p-1\}$. Seien

$$x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k$$

die Partialsummen der Reihe. Wir behaupten, dass die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (\mathbb{Q}, d_p) ist. In der Tat, es gilt für m > n

$$x_m - x_n = \sum_{k=n+1}^m a_k p^k = p^{n+1} \sum_{k=n+1}^m a_k p^{k-(n+1)}.$$

Da die Summe hier eine ganze Zahl ist, so folgt es, dass

$$||x_m - x_n||_p \le p^{-(n+1)} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Folglich hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $x\in\mathbb{Q}_p$ so dass immer

$$d_{p^{-}}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}p^{k}=d_{p^{-}}\lim_{n\to\infty}x_{n}\in\mathbb{Q}_{p}.$$

Gleiches gilt für die Summen der Form

$$d_p - \sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k \tag{14.32}$$

wobei $N \in \mathbb{Z}_+$. Darüber hinaus kann man zeigen, dass jede p-adische Zahl der Form (14.32) hat.

Beispiel. Setzen wir $a_k = 1$ für alle k, so dass

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

Da $||p^{n+1}|| = p^{-(n+1)} \to 0$ für $n \to \infty$ und somit

$$p^{n+1} \stackrel{d_p}{\to} 0,$$

so folgt es, dass

$$x_n \stackrel{d_p}{\to} -\frac{1}{p-1}$$

und somit

$$d_{p} - \sum_{k=0}^{\infty} p^{k} = -\frac{1}{p-1}.$$

So, in diesem Fall ist die Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} p^k$ eine rationale Zahl. Zum Beispiel, in \mathbb{Q}_2 gilt

$$d_2 - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k = -1.$$

Allerdings für beliebige Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ von p-adischen Ziffern liegt die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ nicht immer in \mathbb{Q} (d.h. (\mathbb{Q}, d_p) nicht vollständig ist). Um dies zu beweisen, bemerken wir zuerst, dass

$$d_{p^{-}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \neq 0, \tag{14.33}$$

vorausgesetzt, dass mindestens ein a_k nicht Null ist. In der Tat, sei l der minimale Index mit $a_l \neq 0$ so dass für $n \geq l$ gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k = p^l \left(a_l + a_{l+1}p + \dots + a_n p^{n-l} \right).$$

Da a_l nicht durch p teilbar ist, so folgt es, dass $||x_n||_p = p^{-l}$ und somit

$$d_p(x_n, 0) = ||x_n||_p = p^{-l} \not\to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus (14.33) folgt.

Folglich erhalten wir, dass für zwei Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ und $\{b\}_{k=0}^{\infty}$ von p-adischen Ziffern immer gilt

$$d_{p^{-}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \neq d_{p^{-}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k,$$

vorausgesetzt, dass $a_k \neq b_k$ für mindestens ein k. Es folgt, dass die Menge von den Werten der Summe d_p - $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ überabzählbar ist, wie die Menge von allen Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Somit ist auch die Menge \mathbb{Q}_p überabzählbar, während \mathbb{Q} abzählbar ist. Es folgt, dass \mathbb{Q} eine echte Teilmenge von \mathbb{Q}_p ist. Folglich ist (\mathbb{Q}, d_p) nicht vollständig.

Man erhält ein explizites Beispiel von der Zahl $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ wenn man in der Summe

$$x = d_p - \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

eine nicht-periodische Folge $\{a_k\}$ wählt.

14.16 * Lebesgue-integrierbare Funktionen

Betrachten wir den Raum X = C[a, b] von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall [a, b] mit der 1-Norm wie folgt.

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Wir wissen, dass $C\left[a,b\right]$ vollständig bezüglich der sup-Norm ist, aber jetzt betrachten wir die 1-Norm in $C\left[a,b\right]$. Es ist leicht zu beweisen, dass die 1-Norm eine Norm ist.

Die Vervollständigung von $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ wird mit $L^1[a,b]$ bezeichnet. Nach Konstruktion ist $L^1[a,b]$ ein Banachraum wo C[a,b] dicht liegt. Die Elemente von $L^1[a,b]$ heißen Lebesgue-integrierbare Funktionen.

Bezeichnen wir mit R[a,b] den Raum von allen Riemann-integrierbaren Funktionen auf [a,b] und zeigen, dass jede Funktion $f \in R[a,b]$ sich als Element von $L^1[a,b]$ identifizieren lässt.

Lemma 14.29 Für jede Funktion $f \in R[a,b]$ gibt es eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus C[a,b] mit

$$\int_{a}^{b} |f - f_n| \, dx \to 0 \, \text{für } n \to \infty. \tag{14.34}$$

Beweis. Nach Aufgabe 122 gibt es eine Folge $\{g_n\}$ von Treppenfunktionen mit

$$\int_a^b |f - g_n| \, dx \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Jede Treppenfunktion g_n lässt sich offensichtlich mit einer stetigen Funktion f_n approximieren so dass

$$\int_{a}^{b} |f_n - g_n| \, dx < \frac{1}{n},$$

woraus (14.34) folgt.

Es folgt aus (14.34), dass die Folge $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist. Somit ergibt die Folge $\{f_n\}$ ein Element $[\{f_n\}]$ von $L^1[a,b]$, was wir jetzt zu f zuweisen. Es folgt auch, dass

$$\int_{a}^{b} |f| dx = \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} |f_{n}| dx = \lim ||f_{n}||_{1} = ||[\{f_{n}\}]||_{1}.$$
 (14.35)

Es existieren Riemann-integrierbare Funktionen $f \neq 0$ mit

$$\int_{a}^{b} |f| \, dx = 0.$$

Zum Beispiel, die Funktion f die nur an einer Stelle $c \in (a, b)$ nicht verschwindet, hat diese Eigenschaft. Es folgt aus (14.35) dass das zu f entsprechende Element $[\{f_n\}]$ von $L^1[a, b]$ gleich 0 ist. Somit ist die oberhalb definierte Abbildung $R[a, b] \to L^1[a, b]$ nicht injektiv.

Lemma 14.30 Zwei Funktionen $f, g \in R[a, b]$ entsprechen einem Element von $L^1[a, b]$ genau dann, wenn

$$\int_{a}^{b} |f - g| \, dx = 0. \tag{14.36}$$

Beweis. Seien $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ die Folgen von stetigen Funktionen auf [a,b] mit

$$\int_a^b |f - f_n| \, dx \to 0 \quad \text{und} \quad \int_a^b |g - g_n| \, dx \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Es folgt, dass

$$||f_n - g_n||_1 = \int_a^b |f_n - g_n| dx \to \int_a^b |f - g| dx.$$

Somit gilt

$$\{f_n\} \sim \{g_n\} \Leftrightarrow d_1(f_n, g_n) \to 0 \Leftrightarrow \|f_n - g_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow (14.36),$$

was zu beweisen war.

Zwei Funktionen aus $R\left[a,b\right]$ heißen äquivalent falls sie (14.36) erfüllen. Somit enthält $L^1\left[a,b\right]$ neben stetigen Funktionen auch Äquivalenzklassen von Riemannintegrierbaren Funktionen. Es gibt Elemente von $L^1\left[a,b\right]$ die nicht von Riemannintegrierbaren Funktionen erzeugt werden.

Chapter 15

Differential rechnung in \mathbb{R}^n

15.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Seien Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ eine Funktion auf Ω mit den Werten in \mathbb{R}^m . Wir benutzen die folgende Notation für die Komponenten von x und f(x)

$$x = (x_1, ..., x_n)$$

und

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)),$$

wobei jedes $f_k(x)$ eine reellwertige Funktion auf Ω ist. Man schreibt $f_k(x)$ auch in der Form $f_k(x_1,...,x_n)$ so dass f_k sich als eine reellwertige Funktion von n reellen Variablen betrachten lässt.

Fixieren wir ein j = 1, ..., n und ein k = 1, ..., m und betrachten die Funktion

$$x_j \mapsto f_k(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$$
,

wobei alle x_i mit $i \neq j$ als Konstanten betrachtet werden. Ist diese Funktion differenzierbar, so betrachten wir ihre Ableitung.

Definition. Die Ableitung von f_k bezüglich x_j heißt partielle Ableitung 1-er Ordnung von f und wird mit $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ bezeichnet, d.h.

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\left(x\right) := \lim_{t \to 0} \frac{f_k\left(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n\right) - f_k\left(x_1, ..., x_j, ..., x_n\right)}{t}\right].$$

In dieser Notation wird ein rundes ∂ statt eines geraden d benutzt. Die Ableitung heißt partiell da es nur eine Variable x_i von n Variablen benutzt wird.

Es gibt noch andere Notation für partielle Ableitungen wie folgt:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \partial_j f_k = \partial_{x_j} f_k = (f_k)_{x_j} = f_{k;j}.$$

Definition. Existieren die partielle Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ für alle k und j, so heißt die Funktion f partiell differenzierbar in x. In diesem Fall lässt sich die Menge von

allen partiellen Ableitung von f in einer $m \times n$ Matrix anordnen wie folgt:

$$J_{f} := \left(\frac{\partial f_{k}}{\partial x_{j}}\right) = (\partial_{j} f_{k}) = (f_{k;j}) = \begin{pmatrix} f_{1;1} & f_{1;2} & \dots & f_{1;n} \\ f_{2;1} & f_{2;2} & \dots & f_{2;n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m;1} & f_{m;2} & \dots & f_{m;n} \end{pmatrix},$$
(15.1)

wobei k = 1, ..., m ein Zeilenindex ist und j = 1, ..., n ein Spaltenindex. Die Matrix $J_f = J_f(x)$ heißt die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x.

Beispiel. Betrachten wir eine Funktion $f(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. In diesem Fall ist J_f eine 1×2 Matrix, d.h. die Zeile

$$J_f = (\partial_1 f_1, \partial_2 f_1) = (\partial_x f, \partial_y f).$$

Die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
 (15.2)

ist in jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - xy2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und analog

$$\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

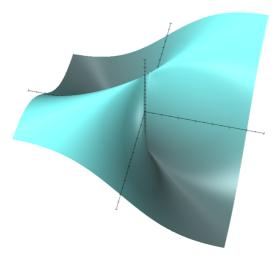
Zeigen wir, dass f auch in (0,0) partiell differenzierbar. In der Tat haben wir nach Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

da f(h,0) = 0, und analog $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Somit ist f partiell differenzierbar in allen Punkten von \mathbb{R}^2 .

Allerdings ist die Funktion f nicht stetig im Punkt (0,0), da für jedes $t\neq 0$ gilt $f(t,t)=\frac{1}{2}$ und somit

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$



Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Erinnern wir uns daran, dass die Differenzierbarkeit von Funktion einer Variable die Stetigkeit ergibt. Diese Eigenschaft gilt für die *totale* Differenzierbarkeit wie folgt.

Definition. Eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt total differenzierbar in $x \in \Omega$ falls es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h)$$
 für $h \to 0$. (15.3)

Die lineare Abbildung A heißt die totale Ableitung von f in x und wird mit $\frac{df}{dx}(x)$ oder f'(x) bezeichnet, so dass

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h) \text{ für } h \to 0.$$

Es ist aus Linearer Algebra bekannt, dass jede lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sich als eine $m \times n$ Matrix darstellen lässt, die auch mit A bezeichnet wird. Man versteht Ah als das Produkt von $m \times n$ Matrix A und Spaltenvektor h aus \mathbb{R}^n , was einen Spaltenvektor in \mathbb{R}^m ergibt.

Insbesondere lässt die totale Ableitung f'(x) sich auch als eine $m \times n$ Matrix darstellen.

Fixieren wir eine Norm $\|\cdot\|$ in \mathbb{R}^n und bezeichnen mit $U_r(x)$ die metrische Kugel bezüglich der induzierten Metrik $\|x-y\|$. Da die Menge Ω offen ist, so gibt es eine Kugel $U_r(x)$ mit r>0 die in Ω liegt. Somit für alle $h\in\mathbb{R}^n$ mit $\|h\|< r$ liegt x+h in Ω und f(x+h) wohldefiniert ist.

Das Landau-Symbol o(h) bezeichnet in (15.3) eine Funktion $\varphi(h)$ mit den Werten in \mathbb{R}^m und mit

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ für } h \to 0, \tag{15.4}$$

wobei im Zähler eine Norm in \mathbb{R}^m steht. Da alle Normen in \mathbb{R}^n (und in \mathbb{R}^m) äquivalent sind, so ist die Richtigkeit von (15.4) (und (15.3)) unabhängig von der Wahl von den Normen in \mathbb{R}^n bzw \mathbb{R}^m .

Definition. Die Variable h in (15.3) heißt das Differential von x und wird auch mit dx bezeichnet (so dass $dx \in \mathbb{R}^n$ eine unabhängige Variable ist). Die Funktion $h \mapsto Ah$ heißt das Differential der Funktion f in x und wird auch mit df(x) bezeichnet, so that df = Adx = f'(x) dx.

Beispiel. Sei B eine $m \times n$ Matrix. Betrachten wir die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$f(x) = Bx.$$

Dann gilt

$$f(x+h) - f(x) = B(x+h) - Bx = Bh,$$

woraus folgt, dass f in jedem Punkt x differenzierbar ist und f'(x) = B.

Satz 15.1 Ist die Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar im Punkt $x \in \Omega$, so gilt folgendes.

- (a) f ist stetig in x.
- (b) f ist partiell differenzierbar in x und es gilt

$$f'(x) = J_f(x). (15.5)$$

Bemerken wir, dass f'(x) und $J_f(x)$ die $m \times n$ Matrizen sind. Es folgt aus (15.5), dass die totale Ableitung f'(x) eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert.

Wir betonen, dass die totale Differenzierbarkeit aus der partiellen Differenzierbarkeit nicht folgt, was das Beispiel der Funktion (15.2) zeigt.

Beweis. (a) Wir benutzen den Begriff von *Operatornorm* der linearen Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$||A|| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{||Ah||}{||h||}.$$
 (15.6)

Man kann zeigen, dass immer $||A|| < \infty$ (siehe Aufgabe 141). Es folgt aus (15.6), dass

$$||Ah|| \le ||A|| \, ||h|| \, .$$

Da

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h)$$
 für $h \to 0$

so erhalten wir

$$||f(x+h) - f(x)|| \le ||Ah|| + ||o(h)|| \le ||A|| ||h|| + ||o(h)|| \to 0$$

für $h \to 0$, woraus die Stetigkeit von f in x folgt.

(b) Sei $f'(x) = A = (a_{kj})$ wobei k der Zeilenindex ist und j der Spaltenindex. In der Identität

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \text{ für } h \to 0$$

$$(15.7)$$

setzen wir $h = (0, ..., \underbrace{t}_{j}, ..., 0)$ wobei $t \in \mathbb{R}$ auf Position j steht, d.h. alle Komponenten von h außer $h_j = t$ gleich 0 sind. Dann gilt

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ t \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j}t \\ \dots \\ a_{kj}t \\ \dots \\ a_{mj}t \end{pmatrix}.$$

Die Identität von k-en Komponenten in (15.7) ergibt

$$f_k(x+h) - f_k(x) = (Ah)_k + o(t) = a_{kj}t + o(t)$$
 für $t \to 0$,

d.h.

$$f_k(x_1,...,x_j+t,...,x_n) - f_k(x_1,...,x_n) = a_{kj}t + o(t)$$
 für $t \to 0$,

woraus folgt, dass

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = f_{k,j}(x) = a_{kj}.$$

Da die Einträge von $J_f(x)$ gleich $f_{k;j}(x)$ sind, so erhalten wir die Identität (15.5).

Bemerkung. Im obigen Beispiel ist die Funktion f aus (15.2) in (0,0) nicht total differenzierbar, da f unstetig in (0,0) ist. Aber wir haben gesehen, dass f überall partiell differenzierbar ist. Somit

wobei nach dem Satz 15.1

totale Differenzierbarkeit \Rightarrow partielle Differenzierbarkeit.

Unter einer zusätzlichen Bedingung folgt die totale Differenzierbarkeit aus der partiellen Differenzierbarkeit wie im nächsten Satz.

Satz 15.2 Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig partiell differenzierbar in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, d.h. f partiell differenzierbar in allen Punkten von Ω und alle Ableitungen $\partial_j f_k$ sind stetig in Ω . Dann ist f total differenzierbar in jedem $x \in \Omega$.

Beweis. Betrachten wir zuerst den Fall m=1, d.h. die Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass x=0.

Die Jacobi-Matrix J_f ist eine $1 \times n$ Matrix, d.h. ein Zeilenvektor

$$J_f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f)$$
.

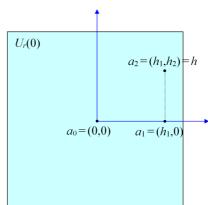
Die totale Differenzierbarkeit von f in 0 wird folgen, falls wir bewiesen, dass

$$f(h) - f(0) = J_f(0) h + o(h) \text{ für } h \to 0.$$
 (15.8)

Wählen wir in \mathbb{R}^n die Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\infty}$. Sei r > 0 so klein, dass $U_r(0) \subset \Omega$. Dann nehmen wir an, dass $\|h\| < r$ so dass $h \in \Omega$. Betrachten wir eine Folge $\{a_j\}_{j=0}^n$ von Punkten in \mathbb{R}^n wie folgt:

$$a_0 = (0, ..., 0) = 0$$

 $a_1 = (h_1, 0, ..., 0)$
...
 $a_j = (h_1, ..., h_j, 0, ..., 0)$
...
 $a_n = (h_1, ..., h_n) = h$



Die Punkte a_j im Fall n=2

Alle Punkte a_j liegen in $U_r(0)$ und somit auch in Ω , da $||a_j|| \le ||h|| < r$. Wir haben dann

$$f(h) - f(0) = f(a_n) - f(a_0) = \sum_{j=1}^{n} (f(a_j) - f(a_{j-1})).$$
 (15.9)

18.01.19

Die Funktion $t \mapsto f(h_1, ..., h_{j-1}, t, 0, ..., 0)$ ist für alle $t \in [0, h_j]$ definiert und differenzierbar. Anwendung des Mittelwertsatzes zu dieser Funktion ergibt

$$f(a_{j}) - f(a_{j-1}) = f(h_{1}, ..., h_{j-1}, \overline{h_{j}}, 0, ..., 0) - f(h_{1}, ..., h_{j-1}, \overline{0}, 0, ..., 0)$$
$$= \partial_{j} f(h_{1}, ..., h_{j-1}, \overline{\xi}, 0, ..., 0) h_{j}, \qquad (15.10)$$

wobei $\xi = \xi(h)$ eine reelle Zahl zwischen 0 und h_i ist. Bezeichnen wir

$$c_i = c_i(h) = (h_1, ..., h_{i-1}, \xi, 0, ..., 0).$$

Es gilt $||c_j|| \le ||h||$ und somit $c_j \to 0$ für $h \to 0$. Es folgt aus (15.9) und (15.10), dass

$$f(h) - f(0) - J_f(0) h = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(c_j) h_j - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(0) h_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f(c_j) - \partial_j f(0)) h_j.$$

Für $h \to 0$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \left(\partial_{j} f\left(c_{j}\right) - \partial_{j} f\left(0\right) \right) h_{j} \right| \leq \left\| h \right\| \sum_{j=1}^{n} \left| \partial_{j} f\left(c_{j}\right) - \partial_{j} f\left(0\right) \right| = o\left(h\right),$$

da $c_{j} \rightarrow 0$ und $\partial_{j} f$ stetig ist so dass $\partial_{j} f\left(c_{j}\right) - \partial_{j} f\left(0\right) \rightarrow 0$. Somit gilt

$$f(h) - f(0) - J_f(0) h = o(h)$$
 für $h \to 0$,

was (15.8) im Fall m = 1 beweist.

Sei m beliebig. Da jede Komponente f_k eine reellwertige Funktion auf Ω ist, so ergibt der vorige Fall die totale Differenzierbarkeit von f_k in jedem $x \in \Omega$, d.h.

$$f_k(x+h) - f_k(x) = A_k h + o(h) \text{ für } h \to 0,$$
 (15.11)

wobei A_k eine $1 \times n$ Matrix ist, d.h. eine Zeile. Sei A die $m \times n$ Matrix mit k-ter Zeile A_k für k = 1, ..., m. Es folgt aus (15.11), dass

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h)$$
 für $h \to 0$,

woraus die totale Differenzierbarkeit von f in x folgt.

15.2 Rechenregeln für totale Ableitung

Satz 15.3 (Linearität) Sind die Funktionen $f, g: \Omega \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \Omega$, so ist auch ihre lineare Kombination af + bg mit $a, b \in \mathbb{R}$ total differenzierbar in x und es gilt

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Beweis. Nach Definition gilt für $h \to 0$

$$f(x + h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

und

$$g(x + h) - g(x) = g'(x)h + o(h)$$
.

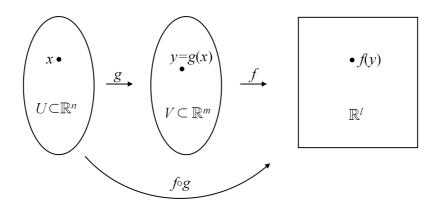
Es folgt, dass die Funktion F = af + bg erfüllt

$$F(x + h) - F(x) = (af'(x) + bg'(x))h + o(h)$$

woraus F'(x) = af'(x) + bg'(x) folgt.

Satz 15.4 (Kettenregel) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Sei $g: U \to V$ differenzierbar in einem Punkt $x \in U$ und $f: V \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar im Punkt $y = g(x) \in V$. Dann ist die Komposition $f \circ g: U \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in x und es gilt

$$\boxed{\left(f\circ g)'\left(x\right)=f'\left(y\right)g'\left(x\right)}=f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right).$$



Bemerken wir, dass g'(x) und f'(y) lineare Abbildungen wie folgt sind:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g'(x)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f'(y)} \mathbb{R}^l.$$

Somit ist das Produkt (=Komposition) f'(y) g'(x) wohldefiniert und ist eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^l , genauso, wie die totale Ableitung $(f \circ g)'(x)$.

Beweis. Wir haben

$$g(x+a) - g(x) = g'(x) a + \varphi(a),$$

wobei $\varphi(a) = o(a)$ für $a \to 0$, und

$$f(y + b) - f(y) = f'(y)b + \psi(b),$$

wobei $\psi(b) = o(b)$ für $b \to 0$. Um die Differenz

$$\left(f\circ g\right)\left(x+a\right)-\left(f\circ g\right)\left(x\right)=f\left(g\left(x+a\right)\right)-f\left(g\left(x\right)\right)$$

abzuschätzen, setzen wir

$$b = g(x+a) - y = g(x+a) - g(x) = g'(x)a + \varphi(a).$$
 (15.12)

Es folgt, dass

$$(f \circ g)(x + a) - (f \circ g)(x) = f(g(x + a)) - f(g(x))$$

$$= f(y + b) - f(y)$$

$$= f'(y)b + \psi(b)$$

$$= f'(y)g'(x)a + f'(y)\varphi(a) + \psi(b). (15.13)$$

Das Glied f'(y) g'(x) a ergibt uns die totale Ableitung f'(y) g'(x) von $f \circ g$, vorausgesetzt, dass

$$f'(y)\varphi(a) + \psi(b) = o(a) \text{ für } a \to 0.$$
 (15.14)

Um (15.14) zu beweisen, bemerken wir, dass

$$||f'(y)\varphi(a)|| \le ||f'(y)|| ||\varphi(a)|| = o(||a||)$$
 für $a \to 0$,

so dass

$$f'(y) \varphi(a) = o(a)$$
 für $a \to 0$.

Auch folgt es aus (15.12), dass

$$||b|| \le ||g'(x)a|| + ||\varphi(a)|| \le ||g'(x)|| ||a|| + ||\varphi(a)|| = O(||a||),$$

und somit

$$\|\psi(b)\| = o(\|b\|) = o(O\|a\|) = o(\|a\|)$$

woraus $\psi(b) = o(a)$ folgt.

Korollar 15.5 Unter den Bedingungen des Satzes 15.4 gilt

$$(f \circ g)_{k;j}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_{k;i}(y) g_{i;j}(x).$$
(15.15)

wobei y = f(x).

Beweis. Die Ableitung $(f \circ g)_{k;j}$ ist der (k,j)-Eintrag von der Jacobi-Matrix und somit auch von $(f \circ g)'$ (nach dem Satz 15.1). Da

$$(f \circ g)'(x) = f'(y) g'(x),$$

so gilt für den (k, j)-Eintrag nach der Regel von Matrizenmultiplikation

$$(f \circ g)_{k;j} = (f'(y) g'(x))_{kj} = \sum_{i=1}^{m} f'(y)_{ki} g'(x)_{ij} = \sum_{i=1}^{m} f_{k;i}(y) g_{i;j}(x),$$

was zu beweisen war.

Sei l=1, d.h. $f:V\to\mathbb{R}$. Dann gibt es in (15.15) nur eine Komponente $f_k=f_1=f,$ und wir erhalten

$$\partial_{x_{j}} (f (g_{1}(x), ..., g_{m}(x))) = \sum_{i=1}^{m} \partial_{i} f (g_{1}(x), ..., g_{i}(x), ..., g_{m}(x)) \partial_{x_{j}} g_{i}(x).$$
(15.16)

Beispiel. Bestimmen wir die partiellen Ableitungen der Funktion

$$F\left(x,y\right) = \left(x^2 + y\right)^{xy^2}$$

im Bereich x > 0, y > 0. Bemerken wir, dass

$$F(x,y) = u^v$$

wobei

$$u = x^2 + y$$
 und $v = xy^2$,

d.h. $F = f \circ g$ wobei $f(u, v) = u^v$ und $g(x, y) = (x^2 + y, xy^2)$. Bestimmen wir zuerst die partiellen Ableitungen von f:

$$\partial_u f = v u^{v-1}$$
 und $\partial_v f = u^v \ln u$.

Nach (15.16) erhalten wir

$$\partial_{x}F = \partial_{1}f(g) \partial_{x}g_{1} + \partial_{2}f(g) \partial_{x}g_{2}
= \partial_{u}f(g) \partial_{x}(x^{2} + y) + \partial_{v}f(g) \partial_{x}(xy^{2})
= 2xvu^{v-1} + y^{2}u^{v} \ln u
= 2x^{2}y^{2}(x^{2} + y)^{xy^{2}-1} + y^{2}(x^{2} + y)^{xy^{2}} \ln(x^{2} + y)$$

und analog

$$\partial_{y}F = \partial_{1}f(g) \partial_{y}g_{1} + \partial_{2}f(g) \partial_{y}g_{2}
= \partial_{u}f(g) \partial_{y} (x^{2} + y) + \partial_{v}f(g) \partial_{y} (xy^{2})
= vu^{v-1} + 2xyu^{v} \ln u
= xy^{2} (x^{2} + y)^{xy^{2}-1} + 2xy (x^{2} + y)^{xy^{2}} \ln (x^{2} + y).$$

Korollar 15.6 (Ableitung der inversen Funktion) Seien U und V zwei offene Teilmengen von \mathbb{R}^n . Sei $g: U \to V$ eine bijektive Funktion die in einem Punkt $x \in U$ differenzierbar ist. Sei die inverse Funktion $f = g^{-1}$ im Punkt y = g(x) differenzierbar. Dann gilt

$$f'(y) = g'(x)^{-1}$$
. (15.17)

Die beiden totalen Ableitungen f'(y) und g'(x) sind $n \times n$ Matrizen, und nach (15.17) ist f'(y) die inverse Matrix von g'(x).

Beweis. Die Komposition $f \circ g$ ist die identische Abbildung $I: U \to U$, d.h. I(x) = x. Dann gilt $I'(x) = \operatorname{Id}$ wobei Id die identische $n \times n$ Matrix ist. Somit haben wir nach der Kettenregel

$$Id = I'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(y)g'(x),$$

woraus (15.17) folgt.

Beispiel. Betrachten wir die kartesischen Koordinaten (x, y) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Funktionen von den Polarkoordinaten (r, θ) , d.h.

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) =: q(r, \theta).$$

Die totale Ableitung von $g(r,\theta)$ existiert und stimmt mit der Jacobi-Matrix überein

$$g' = J_g = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{15.18}$$

da J_q stetig bezüglich (r, θ) ist.

Sei f eine total differenzierbare Funktion von (x, y) in einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Einsetzen x und y als Funktionen von r, θ ergibt uns f als Funktion von r, θ . Mit Hilfe von (15.18) erhalten wir

$$f_r = (f \circ g)_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

und

$$f_{\theta} = f_x x_{\theta} + f_y y_{\theta} = r \left(-f_x \sin \theta + f_y \cos \theta \right).$$

Zum Beispiel, für die Funktion

$$f(x,y) = xe^y$$

erhalten wir

$$f_r = e^y \cos \theta + xe^y \sin \theta = e^{r \sin \theta} \cos \theta + re^{r \sin \theta} \sin \theta \cos \theta$$

und

$$f_{\theta} = r(-e^y \sin \theta + xe^y \cos \theta) = -re^{r \sin \theta} \sin \theta + r^2 e^{r \sin \theta} \cos^2 \theta.$$

Sei h die inverse Abbildung von g, d.h. h ergibt die Polarkoordinaten durch die kartesischen Koordinaten,

$$h\left(x,y\right) = \left(r,\theta\right).$$

Wir erhalten nach (15.17)

$$h' = (g')^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix}.$$

Andererseits gilt

$$h' = \left(\begin{array}{cc} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{array}\right)$$

woraus folgt

$$\begin{bmatrix}
r_x = \frac{x}{r}, & r_y = \frac{y}{r} \\
\theta_x = -\frac{y}{r^2}, & \theta_y = \frac{x}{r^2}
\end{bmatrix}$$
(15.19)

Natürlich erhält man diese Identitäten auch direct aus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\tan \theta = y/x$.

Ist f eine total differenzierbare Funktion von (r, θ) , so erhalten wir mit Hilfe von (15.19)

$$f_x = (f \circ h)_x = f_r r_x + f_\theta \theta_x = \frac{x}{r} f_r - \frac{y}{r^2} f_\theta = f_r \cos \theta - \frac{1}{r} f_\theta \sin \theta$$

und

$$f_y = (f \circ h)_y = f_r r_y + f_\theta \theta_y = \frac{y}{r} f_r + \frac{x}{r^2} f_\theta = f_r \sin \theta + \frac{1}{r} f_\theta \cos \theta.$$

Zum Beispiel, für $f = r^a \sin b\theta$ erhalten wir

$$f_x = ar^{a-1}\sin b\theta\cos\theta - br^{a-1}\cos b\theta\sin\theta$$

und

$$f_y = ar^{a-1}a\sin b\theta\sin\theta + br^{a-1}\cos b\theta\cos\theta.$$

15.3 Richtungsableitung und Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Anwendungen des Begriffes von totaler Ableitung.

Definition. Sei f eine reellwertige Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in \Omega$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(v)}{t},$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert (wobei t eine reelle Variable ist).

In anderen Wörtern, $\partial_{v} f(x) = g'(0)$ wobei g(t) = f(x + tv).

Die partielle Ableitung $\partial_j f$ ist ein spezieller Fall der Richtungsableitung. In der Tat betrachten wir den Basisvektor

$$e_j = (0, ..., 0, \frac{1}{\hat{i}}, 0, ..., 0)$$

wobei die Eins an der Position j steht. Dann gilt

$$\partial_j f = \partial_{e_j} f,$$

da

$$\partial_{e_{j}} f = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_{j}) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{1}, ..., x_{j} + t, ..., x_{n}) - f(x_{1}, ..., x_{n})}{t} = \partial_{j} f.$$

23.01.19

Satz 15.7 Ist die Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x dann existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ und es gilt

$$\partial_v f(x) = f'(x) v = \sum_{j=1}^n \partial_j f(x) v_j.$$

Beweis. Es folgt aus der Definition von totaler Differenzierbarkeit, dass

$$f(x+tv) - f(x) = f'(x)(tv) + o(t)$$
 für $t \to 0$

Dividieren durch t ergibt

$$\partial_v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(f'(x) v + \frac{o(t)}{t} \right) = f'(x) v.$$

Insbesondere sehen wir, dass die Abbildung $v \mapsto \partial_v f(x)$ linear ist, was aus der Definition nicht offensichtlich ist.

Im nächsten Satz benutzen wir die Strecke [x,y] zwischen zwei Punkten $x,y\in\mathbb{R}^n,$ d.h.

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \le t \le 1\}.$$

Satz 15.8 (Mittelwertsatz) Sei f eine reellwertige total differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seien x, y zwei Punkte in Ω mit $[x, y] \subset \Omega$. Dann es gibt einen Punkt $\xi \in [x, y]$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$
 (15.20)

Beweis. Setzen wir v = y - x und betrachten die Funktion

$$g(t) = f(x + tv)$$
 für $t \in [0, 1]$,

so dass g(0) = f(x) und g(1) = f(y). Die Funktion g ist in [0,1] differenzierbar als Komposition von den Funktionen $t \mapsto x + tv$ und f. Nach dem Mittelwertsatz aus Analysis I gibt es ein $t \in [0,1]$ mit

$$f(y) - f(x) = f(x+v) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t)$$
.

Die Kettenregel ergibt

$$g'(t) = \partial_t (f(x+tv)) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x+tv) \partial_t (x+tv)_i$$
$$= \sum_{i=1}^n \partial_i f(x+tv) v_i = f'(x+tv) v,$$

woraus folgt

$$f(y) - f(x) = f'(x + tv)v.$$

Da $\xi := x + tv = (1 - t)x + ty$ in [x, y] liegt, so erhalten wir (15.20)

15.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung und Satz von Schwarz

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und und f eine reellwertige Funktion auf Ω . Existiert die partielle Ableitung $\partial_j f$ in Ω , so man kann diese Funktion weiter ableiten und die partielle Ableitung 2-ter Ordnung betrachten:

$$\partial_i \left(\partial_j f \right)$$
.

Existiert diese Ableitung, so bezeichnet man sie mit $\partial_{ij}f$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. If Fall $i \neq j$ heißt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ die gemischte Ableitung.

Analog kann man die partiellen Ableitungen höherer Ordnung betrachten wie folgt

$$\partial_{i_1}\partial_{i_2}...\partial_{i_k}f = \partial_{i_1i_2...i_k}f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}.$$

Die Zahl k hier heißt die Ordnung der Ableitung. Die Ableitung der Ordnung 0 ist die Funktion f selbst.

Satz 15.9 (Satz von Hermann Schwarz) Nehmen wir an, dass die Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ in Ω die beiden partiellen Ableitungen $\partial_{ij}f$ und $\partial_{ji}f$ hat, und dass $\partial_{ij}f$ und $\partial_{ji}f$ in Ω stetig sind. Dann gilt $\partial_{ij}f(x) = \partial_{ji}f(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass x = 0 und i = 1, j = 2. Im Beweis werden die Variablen $x_3, ..., x_n$ konstant sein. Somit können wir die Funktion f als eine Funktion nur von x_1, x_2 betrachten, d.h. we können auch annehmen, dass n = 2. Bezeichnen wir die Koordinaten in \mathbb{R}^2 mit (x, y).

Da die Funktion $f=f\left(x,y\right)$ in der Nähe von (0,0) definiert ist, so gibt es ein $\varepsilon>0$ so dass f im Quadrat

$$Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon \right\}$$

definiert ist. Angenommen, dass die Ableitungen $\partial_{xy} f$ und $\partial_{yx} f$ in Q existieren und stetig sind, beweisen wir, dass $\partial_{xy} f(0,0) = \partial_{yx} f(0,0)$.

Für jedes $0 < h < \varepsilon$ gilt

$$f(h,h) - f(h,0) = \int_0^h \partial_y f(h,s) \, ds$$

und auch

$$\partial_y f(h,s) - \partial_y f(0,s) = \int_0^h \partial_x \partial_y f(t,s) dt = \int_0^h \partial_{xy} f(t,s) dt,$$

woraus folgt

$$f(h,h) - f(h,0) = \int_0^h \partial_y f(0,s) ds + \int_0^h \left(\int_0^h \partial_{xy} f(t,s) dt \right) ds.$$

Da

$$\int_{0}^{h} \partial_{y} f(0, s) ds = f(0, h) - f(0, 0),$$

so erhalten wir

$$f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0) = \int_{0}^{h} \left(\int_{0}^{h} \partial_{xy} f(t,s) dt \right) ds$$

$$= \int_{0}^{h} \left(\int_{0}^{h} \partial_{xy} f(0,0) dt \right) ds$$

$$+ \int_{0}^{h} \left(\int_{0}^{h} (\partial_{xy} f(t,s) - \partial_{xy} f(0,0)) dt \right) ds.$$

Da

$$\int_{0}^{h} \left(\int_{0}^{h} \partial_{xy} f(0,0) dt \right) ds = \partial_{xy} f(0,0) h^{2}$$

und nach der Stetigkeit von $\partial_{xy}f$

$$\left| \int_0^h \left(\int_0^h \left(\partial_{xy} f\left(t,s\right) - \partial_{xy} f\left(0,0\right) \right) dt \right) ds \right| \le \sup_{t,s \in [0,h]} \left| \partial_{xy} f\left(t,s\right) - \partial_{xy} f\left(0,0\right) \right| h^2 = o\left(h^2\right)$$

für $h \to 0$, so erhalten wir

$$f(h,h) - f(h,0) - f(0,h) + f(0,0) = \partial_{xy} f(0,0) h^2 + o(h^2)$$
.

Analog erhalten wir

$$f(h,h) - f(0,h) - f(h,0) + f(0,0) = \partial_{yx} f(0,0) h^2 + o(h^2)$$

woraus folgt

$$\partial_{xy}f(0,0) = \partial_{yx}f(0,0)$$

was zu beweisen war.

Ohne die Voraussetzung von Stetigkeit können Sie Ableitungen $\partial_{xy} f$ und $\partial_{yx} f$ verschieden sein, wie im nächsten Beispiel.

Beispiel. Betrachten wir die folgende Funktion in \mathbb{R}^2

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

und berechnen $\partial_{xy} f(0,0)$ und $\partial_{yx} f(0,0)$. Nach Definition gilt

$$\partial_{xy} f\left(0,0\right) = \partial_{x} \partial_{y} f\left(0,0\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\partial_{y} f\left(x,0\right) - \partial_{y} f\left(0,0\right)}{x}.$$

So, berechnen wir zuerst $\partial_y f(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_y f(x,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \to 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x,$$

woraus folgt

$$\partial_{xy} f(0,0) = \partial_x \partial_y f(0,0) = 1.$$

Analog haben wir

$$\partial_x f(0,y) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \to 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$

und

$$\partial_{yx} f(0,0) = -1.$$

Somit gilt $\partial_{xy} f(0,0) \neq \partial_{yx} f(0,0)$.

Definition. Eine Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ heißt k-fach (partiell) stetig differenzierbar falls alle partielle Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig in Ω sind. Die Menge von allen k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω wird mit $C^k(\Omega)$ bezeichnet. Insbesondere wird mit $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ die Menge von allen stetigen Funktionen auf Ω bezeichnet.

Es ist klar aus der Definition, dass $C^{k}\left(\Omega\right)\subset C^{k-1}\left(\Omega\right)$.

Korollar 15.10 Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ ist der Wert von jeder partiellen Ableitung der Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge von Ableiten. D.h., für jede Folge $i_1, ..., i_m$ von $m \leq k$ Indizes und für jede Permutation $j_1, ..., j_m$ von $i_1, ..., i_m$ gilt $\partial_{i_1, ..., i_m} f = \partial_{j_1, ..., j_m} f$.

Beweis. Nach dem Satz 15.9 gilt folgendes: jede zwei aufeinanderfolgende Indizes in der Folge $i_1, ... i_m$, z.B. i_l und i_{l+1} , lassen sich vertauschen ohne den Wert von $\partial_{i_1...i_m} f$ zu ändern, da

$$\begin{array}{lcl} \partial_{i_{1}...i_{l}i_{l+1}...i_{m}}f & = & \partial_{i_{1}...i_{l-1}}\left(\partial_{i_{l}}\partial_{i_{l+1}}\right)\partial_{i_{l+2}....i_{m}}f \\ & = & \partial_{i_{1}...i_{l-1}}\left(\partial_{i_{l+1}}\partial_{i_{l}}\right)\partial_{i_{l+2}....i_{m}}f \\ & = & \partial_{i_{1}...i_{l+1}i_{l}...i_{m}}f. \end{array}$$

Da jede Permutation $j_1, ..., j_m$ von $i_1, ..., i_m$ sich als eine Reihe von Vertauschen von aufeinanderfolgenden Indizes darstellen lässt, so gilt $\partial_{i_1...i_m} f = \partial_{j_1...j_m} f$

Nach Korollar 15.10, für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ lässt sich jede partielle Ableitung $\partial_{i_1,...,i_m} f$ mit $m \leq k$ wie folgt darstellen:

$$\partial_{i_1...i_m} f = \partial_{\underbrace{1...1}_{\alpha_1}} \underbrace{2...2}_{\alpha_2} ... \underbrace{n...n}_{\alpha_n} f$$

wobei α_1 die Anzahl von 1 in der Folge $i_1....i_m$ ist, α_2 – die Anzahl von 2, usw., so dass

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m.$$

Diese Ableitung wird auch wie folgt bezeichnet:

$$\partial_{i_1...i_m} f = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$
 (15.21)

Definition. Jede Folge $\alpha = (\alpha_1,, \alpha_n)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen α_k heißt *Multiindex* von Dimension n. Die Menge von allen Multiindizes von Dimension n wird mit \mathbb{I}^n bezeichnet. Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{I}^n$ definieren wir die Ordnung (den Betrag) von α mit

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ und für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{I}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ definieren wir die α -Ableitung von f mit

$$D^{\alpha}f = \frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Insbesondere $D^0 f = f$.

Es folgt aus dem Korollar 15.10, dass für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ und für beliebige Multiindizes α, β mit $|\alpha| + |\beta| \le k$ gilt

$$D^{\alpha+\beta}f = D^{\alpha}\left(D^{\beta}f\right) = D^{\beta}\left(D^{\alpha}f\right).$$

15.5 Taylorformel

25.01.19

Im nächsten Satz benutzen wir die folgende Notation: für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{I}^n$ setzen wir

$$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!$$

und für jeden Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x^{\alpha} := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

(wobei $x_i^{\alpha_i} = 1$ für $\alpha_i = 0$).

Hauptsatz 15.11 (Taylorformel mit der Restgliedform nach Peano) Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ mit $k \geq 0$ und für jedes $a \in \Omega$ gilt

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} \frac{D^{\alpha} f(a)}{\alpha!} (x - a)^{\alpha} + o(\|x - a\|^k) \ f \ddot{u} r \ x \to a.$$
 (15.22)

Umgekehrt, gilt für reelle Koeffizienten c_{α}

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} c_{\alpha} (x - a)^{\alpha} + o(\|x - a\|^k) \quad \text{für } x \to a, \tag{15.23}$$

so haben wir $c_{\alpha} = \frac{D^{\alpha}f(a)}{\alpha!}$.

Nach der Offenheit von Ω liegt x in Ω (und somit f(x) ist wohldefiniert), vorausgesetzt, dass ||x - a|| hinreichend klein ist.

Definition. Die Funktion

$$T_{k}(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^{n}: |\alpha| \leq k\}} \frac{D^{\alpha} f(a)}{\alpha!} (x - a)^{\alpha}$$

$$= \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^{n}: |\alpha| \leq k\}} \frac{\partial^{|\alpha|} f(a)}{\partial x_{1}^{\alpha_{1}} ... \partial x_{n}^{\alpha_{n}}} \frac{(x_{1} - a_{1})^{\alpha_{1}} ... (x_{n} - a_{n})^{\alpha_{n}}}{\alpha_{1}! ... \alpha_{n}!}$$

$$(15.24)$$

heißt das Taylor-Polynom der Ordnung k der Funktion f im Punkt a. Die ausführliche Notation für das Taylor-Polynom ist $T_{k,f}(x;a)$

Es ist klar, dass $T_k(x)$ wirklich ein Polynom bezüglich der Variablen $x_1, ..., x_n$ ist und $T_k(0) = f(a)$. Die Taylorformel lässt sich wie folgt umschreiben:

$$f(x) = T_k(x) + o(\|x - a\|^k) \text{ für } x \to a.$$
 (15.25)

Somit ist $T_k(x)$ eine Approximation von f(x) für kleine Werte von x - a mit dem Approximationsfehler $o(\|x - a\|^k)$.

Die zweite Aussage des Satzes 15.11 bedeutet folgendes. Gilt

$$f(x) = P(x) + o(||x - a||^k) \text{ für } x \to a$$
 (15.26)

für ein Polynom $P(x) = \sum c_{\alpha} x^{\alpha}$ von x des Grades $\leq k$, so gilt $P \equiv T_k$. Somit ist T_k das einzige Polynom des Grades $\leq k$, das (15.26) erfüllt.

Seien n = 1 und Ω ein offenes Intervall. Dann ergibt (15.24)

$$T_k(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x - a)^{\alpha}$$

so dass

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} (x-a)^{\alpha} + o\left(|x-a|^{k}\right) \quad \text{für } x \to a,$$

was mit der Taylorformel des Satzes 9.2 übereinstimmt.

Sei n beliebig und a = 0, so dass

$$T_{k}(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^{n}: |\alpha| \le k\}} \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!} x^{\alpha}.$$

Stellen wir $T_k(x)$ expliziter für k=0,1,2,3 dar. Für $|\alpha|=0$ gilt $\alpha=(0,...,0)$ und somit

$$\frac{D^{\alpha}f(0)}{\alpha!}x^{\alpha} = f(0)$$

und somit

$$T_0(x) = f(0) = \text{const}$$
.

Für
$$|\alpha| = 1$$
 gilt

$$\alpha = (0, ..., \frac{1}{\hat{i}}, ..., 0)$$

mit 1 an einer Position i und mit allen anderen Komponenten gleich 0. Somit haben wir

$$\frac{D^{\alpha}f(0)}{\alpha!}x^{\alpha} = \partial_{i}f(0)x_{i}$$

und

$$\sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n: |\alpha|=1\}} \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!} x^{\alpha} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(0) x_i = f'(0) x.$$

Es folgt, dass

$$T_1(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(0) x_i = f(0) + f'(0) x.$$

Für $|\alpha| = 2$ gibt es zwei Möglichkeiten: entweder

$$\alpha = (0, ..., \frac{2}{\hat{i}}, ..., 0)$$

mit 2 an einer Position i, oder

$$\alpha = (0, ..., \frac{1}{\hat{i}}, ..., \frac{1}{\hat{i}}, ..., 0),$$

mit 1 an zwei Positionen i < j. Im ersten Fall haben wir

$$\frac{D^{\alpha}f(0)}{\alpha!}x^{\alpha} = \frac{\partial_{ii}f(0)}{2}x_{i}^{2},$$

und im zweiten Fall

$$\frac{D^{\alpha}f\left(0\right)}{\alpha!}x^{\alpha} = \partial_{ij}f\left(0\right)x_{i}x_{j},$$

woraus folgt

$$\sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n: |\alpha|=2\}} \frac{D^{\alpha} f\left(0\right)}{\alpha !} x^{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial_{ii} f\left(0\right)}{2} x_i^2 + \sum_{\{1 \leq i < j \leq n\}} \partial_{ij} f\left(0\right) x_i x_j.$$

Somit erhalten wir

$$T_{2}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{i} f(0) x_{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_{ii} f(0)}{2} x_{i}^{2} + \sum_{\{1 \le i < j \le n\}} \partial_{ij} f(0) x_{i} x_{j}. \quad (15.27)$$

Für $|\alpha| = 3$ gibt es drei Möglichkeiten: entweder

$$\alpha = (0, ..., \frac{3}{\hat{i}}, ..., 0)$$

mit 3 an einer Position i, oder

$$\alpha = (0, ..., \frac{2}{\hat{i}}, ..., \frac{1}{\hat{i}}, ..., 0),$$

mit 2 und 1 an den Positionen $i \neq j$, oder

$$\alpha = (0, ..., \frac{1}{i}, ..., \frac{1}{i}, ..., \frac{1}{i}, ..., 0),$$

mit 1 an drei Positionen i < j < j. Daraus folgt:

$$T_{3}(x) = T_{2}(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_{iii} f(0)}{6} x_{i}^{3} + \sum_{\{i \neq j\}} \frac{\partial_{iij} f(0)}{2} x_{i}^{2} x_{j} + \sum_{\{1 \leq i < j < l \leq n\}} \partial_{ijl} f(0) x_{i} x_{j} x_{l}.$$
(15.28)

Zum Beispiel, sei n=2. Dann bezeichnen wir die Koordinaten in \mathbb{R}^2 mit (x,y) anstatt (x_1,x_2) . Es folgt aus (15.27), dass

$$T_{2}(x,y) = f(0) + \partial_{x} f(0) x + \partial_{y} f(0) y + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(0) x^{2} + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(0) y^{2} + \partial_{xy} f(0) xy,$$
(15.29)

und aus (15.28)

$$T_{3}(x,y) = T_{2}(x,y) + \frac{1}{6}\partial_{xxx}f(0)x^{3} + \frac{1}{6}\partial_{yyy}f(0)y^{3} + \frac{1}{2}\partial_{xxy}f(0)x^{2}y + \frac{1}{2}\partial_{xyy}f(0)xy^{2}.$$
(15.30)

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome $T_2(x, y)$ und $T_3(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^y$ im Punkt a = (1, 1). Analog zu (15.29) haben wir

$$T_{2}(x,y) = f(a) + \partial_{x} f(a) (x - 1) + \partial_{y} (a) (y - 1) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(a) (x - 1)^{2} + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(a) (y - 1)^{2} + \partial_{xy} f(a) (x - 1) (y - 1).$$

Bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f erster und zweiter Ordnung:

$$\partial_x f = yx^{y-1}, \quad \partial_y f = x^y \ln x$$

$$\partial_{xx} f = y(y-1)x^{y-2}, \quad \partial_{xy} f = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}, \quad \partial_{yy} f = x^y \ln^2 x$$

so dass

$$\partial_x f(a) = 1, \quad \partial_y f(a) = 0,$$

$$\partial_{xx} f(a) = 0, \quad \partial_{xy} f(a) = 1, \quad \partial_{yy} f(a) = 0,$$

Es folgt, dass

$$T_2(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) = 1 - y + xy.$$

Analog zu (15.30) haben wir

$$T_{3}(x,y) = T_{2}(x,y) + \frac{1}{6}\partial_{xxx}f(a)(x-1)^{3} + \frac{1}{6}\partial_{yyy}f(a)(y-1)^{3} + \frac{1}{2}\partial_{xxy}f(a)(x-1)^{2}(y-1) + \frac{1}{2}\partial_{xyy}f(a)(x-1)(y-1)^{2}.$$

Bestimmen wir weiter die partiellen Ableitungen von f dritter Ordnung:

$$\partial_{xxx} f = y (y - 1) (y - 2) x^{y-3}, \quad \partial_{xxy} f = x^{y-2} (2y + y^2 \ln x - y \ln x - 1)$$

 $\partial_{xyy} f = x^{y-1} (\ln x) (y \ln x + 2), \quad \partial_{yyy} f = x^y \ln^3 x$

so dass

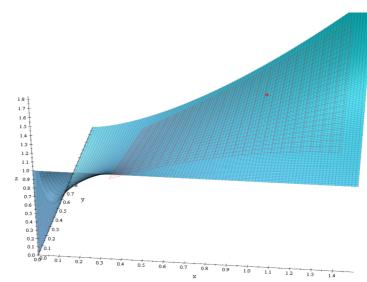
$$\partial_{xxx} f(a) = 0$$
, $\partial_{xxy} f(a) = 1$, $\partial_{xyy} f(a) = 0$, $\partial_{yyy} f(a) = 0$.

Es folgt, dass

$$T_3(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1).$$

Zum Beispiel, für x = 1.02 und y = 1.1 erhalten wir

$$1.02^{1.1} \approx T_3 (1.02, 1.1) = 1 + 0.02 + 0.02 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.02^2 \times 0.1 = 1.02202.$$



Funktionen x^y (blau), $T_3(x,y)$ (rot) und der Punkt (1,1,1) (rot)

15.6 Lokale Extrema

Wir benutzen hier die Taylorformel um lokale Extrema von Funktionen in \mathbb{R}^n zu untersuchen.

Seien Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f:\Omega\to\mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition. Ein Punkt $a \in \Omega$ heißt lokale Maximumstelle von f falls es eine Kugel $U_r(a) \subset \Omega$ gibt so dass a eine Maximumstelle von f in $U_r(a)$ ist, d.h.

$$f(a) \ge f(x)$$
 für alle $x \in U_r(a)$.

Analog definiert man lokale Minimumstelle. Der Punkt a heißt lokale Extremumstelle von f, falls a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

In diesem Abschnitt besprechen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema. Wir fangen mit der Verallgemeinerung des Satzes von Fermat.

Satz 15.12 Sei $a \in M$ eine lokale Extremumstelle von f in Ω . Ist f in a differenzierbar, so gilt f'(a) = 0.

Die Bedingung f'(a) = 0 ist äquivalent zu $\partial_1 f(a) = \partial_2 f(a) = \dots = \partial_n f(a) = 0$. **Beweis.** Sei a eine Maximumstelle von f in $U_r(a) \subset \Omega$. Fixieren wir ein $v \in \mathbb{R}^n$ und betrachten die folgende Funktion

$$g(t) = f(a + tv)$$

von reeller Variable t aus einem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $a + tv \in U_r(a)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Die Funktion g(t) hat in t = 0 eine Maximumstelle da

$$q(0) = f(a) > f(a + tv)$$
 für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Die Funktion g(t) ist in t = 0 differenzierbar, da nach dem Satz 15.7

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \partial_v f(a) = f'(a) v.$$

Nach dem Satz von Fermat erhalten wir g'(0) = 0, woraus folgt, dass f'(a)v = 0 für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und somit f'(a) = 0, was zu beweisen war.

Definition. Sei f in Ω differenzierbar. Die Punkte $x \in \Omega$ wo f'(x) = 0 heißen die kritischen Punkte von f.

Um die lokalen Extremumstellen von f zu bestimmen, man soll zuerst alle kritische Punkte finden und danach jeden kritischen Punkt weiter untersuchen.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

im Bereich $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Es gilt

$$\partial_x f = y - \frac{50}{x^2}$$
 und $\partial_y f = x - \frac{20}{y^2}$.

Die Gleichungen für die kritischen Punkte sind

$$f_x(x,y) = 0 \text{ und } f_y(x,y) = 0,$$

d.h.

$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 50 \\ xy^2 = 20. \end{cases}$$

Es folgt

$$x^3 = \frac{(x^2y)^2}{xy^2} = \frac{2500}{20} = 125, \quad x = 5$$

und

$$y^3 = \frac{(xy^2)^2}{x^2y} = \frac{400}{50} = 8, \quad y = 2.$$

Somit gibt es einzigen kritischen Punkt (5, 2).

Sei x ein kritischer Punkt von f. Um zu bestimmen ob x lokale Extremumstelle ist, verwenden wir die Ableitungen 2-ter Ordnung.

Definition. Für jede Funktion $f \in C^2(\Omega)$ definieren wir die totale zweite Ableitung f''(x) als die folgende $n \times n$ Matrix:

$$f''(x) = (\partial_{ij} f(x))_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) & \dots & \partial_{1n} f(x) \\ \partial_{21} f(x) & \partial_{22} f(x) & \dots & \partial_{2n} f(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{n1} f(x) & \partial_{n2} f(x) & \dots & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch die Hesse-Matrix von f.

Nach dem Satz 15.9 gilt $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ so dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist. Jede symmetrische $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit reellen Einträgen bestimmt eine quadratische Form

$$Q(u) = Q_A(u) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$$

als eine Funktion von $u \in \mathbb{R}^n$.

Definition. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A (und ihre quadratische Form Q) heißt

- positive definit falls Q(u) > 0 für alle $u \neq 0$ (Schreibweise A > 0);
- positiv semidefinit falls $Q(u) \ge 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \ge 0$);
- negativ definit falls Q(u) < 0 für alle $u \neq 0$ (Schreibweise A < 0);
- negativ semidefinit falls $Q(u) \leq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \leq 0$);
- indefinit falls Q(u) positive und negative Werte annimmt.

30.01.19

Bemerken wir, dass Q(0) = 0. Somit ist 0 eine Minimumstelle von Q genau dann, wenn $Q(u) \ge 0$ für alle $u \ge 0$, d.h. wenn $A \ge 0$. Analog ist 0 eine Maximumstelle von Q genau dann, wenn $A \le 0$.

Beispiel. Die identische Matrix A = id erzeugt die quadratische Form $Q(u) = u_1^2 + ... + u_n^2$, die offensichtlich positiv definit ist, so dass A > 0.

Im Fall n=2 betrachten wir die Matrix

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

mit der quadratischen Form

$$Q\left(u\right)=2u_{1}u_{2}.$$

Da Q(u) positive und negative Werte annimmt, so ist A in diesem Fall indefinit.

Satz 15.13 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und f eine Funktion von $C^2(\Omega)$. Sei a ein kritischer Punkt von f, d.h. f'(a) = 0.

- (a) (Notwendige Bedingung für lokales Extremum) Ist a eine lokale Maximumstelle von f, so gilt $f''(a) \leq 0$. Ist a eine lokale Minimumstelle von f so gilt $f''(a) \geq 0$.
- (b) (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum) Gilt f''(a) < 0 so ist a eine lokale Maximumstelle von f. Gilt f''(a) > 0 so ist a eine lokale Minimumstelle von f.

Als eine Folgerung von (a) erhalten wir folgendes: ist f''(a) indefinit so ist a keine Extremumstelle.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir a=0 an. Nach (15.27) haben wir das Taylor-Polynom von f in 0

$$T_{2}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{i} f(0) x_{i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} f(0) x_{i}^{2} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_{ij} f(0) x_{i} x_{j}$$

$$= f(0) + f'(0) x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(0) x_{i} x_{j},$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_{ij} f(0) x_i x_j = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=j} + \sum_{ij} \right) \partial_{ij} f(0) x_i x_j
= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} f(0) x_i^2 + \sum_{i$$

da $\partial_{ij} f(0) x_i x_j = \partial_{ji} f(0) x_j x_i$.

Sei Q die quadratische Form der Matrix $\frac{1}{2}f''(0)$. Nach der Taylorformel gilt

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + Q(x) + o(||x||^2)$$
 für $x \to 0$.

Da f'(0) = 0, so folgt es, dass

$$f(x) - f(0) = Q(x) + o(||x||^2) \text{ für } x \to 0.$$
 (15.31)

(a) Sei 0 eine lokale Minimumstelle. Beweisen wir, dass $f''(0) \ge 0$ d.h. $Q(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ersetzen wir in (15.31) x mit tx für $t \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$f(tx) - f(0) = Q(x)t^2 + o(t^2)$$
 für $t \to 0$.

Da 0 eine lokale Minimumstelle ist, so gilt $f(tx) \geq f(0)$ für hinreichend kleinen Werte von t, woraus folgt

$$Q(x)t^2 + o(t^2) \ge 0.$$

Dividieren durch t^2 ergibt für $t \to 0$, dass $Q(x) \ge 0$, was zu beweisen war.

Analog beweist man $f''(0) \leq 0$ im Fall wenn 0 eine lokale Maximumstelle ist.

(b) Sei f''(0) > 0, d.h. Q(x) > 0 für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Beweisen, wir, dass

$$f\left(x\right) >f\left(0\right)$$

für alle $x \neq 0$, vorausgesetzt, dass ||x|| hinreichend klein ist. Nach (15.31) reicht es zu beweisen, dass für hinreichend kleine Werte von ||x||

$$Q(x) + o(||x||^2) > 0.$$

Die Funktion Q(x) ist stetig auf \mathbb{R}^n , da Q eine lineare Kombination von stetigen Funktionen $x_i x_j$ ist. Betrachten wir die Menge

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1 \}$$

(der Rand der Kugel $U_1(0)$). Die Menge S ist offensichtlich beschränkt (da $S \subset U_2(0)$) und abgeschlossen, da S das Urbild von $\{1\}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto ||x||$ ist. Nach dem Extremwertsatz (Korollar 14.21) besitzt die Funktion Q(x) ein Minimum auf S. Sei $m = \min_S Q$.

Da Q(x) auf S positiv ist, so gilt m>0. Für jedes $x\neq 0$ gilt $\frac{x}{\|x\|}\in S$, woraus folgt

$$Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \ge m,$$

und somit

$$Q\left(x\right) \ge m \left\|x\right\|^2.$$

Andererseits für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\left| o\left(\left\| x \right\|^2 \right) \right| < \varepsilon \left\| x \right\|^2,$$

vorausgesetzt, dass ||x|| hinreichend klein ist. Wählen wir ein $\varepsilon < m$ und erhalten, dass für alle $x \neq 0$ mit hinreichend kleiner Norm ||x|| gilt

$$Q(x) + o(||x||^2) \ge (m - \varepsilon) ||x||^2 > 0,$$

was zu beweisen war. Analog beweist man, dass im Fall f''(0) < 0 der Punkt 0 eine Maximumstelle ist. \blacksquare

Bemerkung. Die Definitheit von einer symmetrischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ lässt sich mit Hilfe von Eigenwerten wie folgt bestimmen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynom det $(A - \lambda \operatorname{Id})$. Da A symmetrisch ist, so sind alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A reell. Die quadratische Form Q(u) von A lässt sich mit Hilfe von einer bijektiven linearen Transformation v = v(u) zur Diagonalform führen:

$$Q(u) = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2.$$

Somit erhalten wir die äquivalenten Bedingungen:

- 1. $A > 0 \Leftrightarrow \text{alle } \lambda_i > 0$
- 2. $A > 0 \Leftrightarrow \text{alle } \lambda_i > 0$
- 3. $A < 0 \Leftrightarrow \text{alle } \lambda_i < 0$

- 4. $A \leq 0 \Leftrightarrow \text{alle } \lambda_i \leq 0$
- 5. A ist indefinit \Leftrightarrow es gibt i, j mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$.

Im Fall n=2, für die Matrix

$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{array}\right)$$

die Vorzeichen von λ_1 und λ_2 lassen sich leicht bestimmen ohne die Werte von λ_1 und λ_2 zu berechnen. Es ist bekannt, dass

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Spur} A = a_{11} + a_{22}$$

 $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2.$

Im Fall det A<0 haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und somit ist die Matrix A indefinit. Im Fall det A>0 und Spur A>0 sind die Eigenwerte positiv und somit A>0. Im Fall det A>0 und Spur A<0 sind die Eigenwerte negativ und somit A<0.

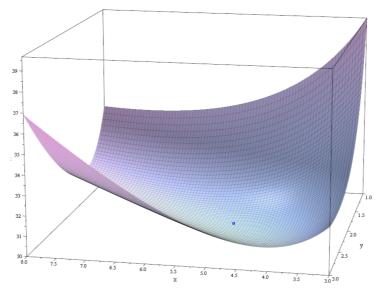
Es gibt auch andere Methoden um die Definitheit von A zu bestimmen. Zum Beispiel, das Sylvester-Kriterium besagt folgendes: A > 0 genau dann, wenn alle führende Hauptminoren von A positiv sind, d.h. für alle $1 \le k \le n$,

$$\det (a_{ij})_{i,j=1}^k > 0.$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ im Bereich $\{x,y>0\}$. Wir wissen schon, dass diese Funktion den einzigen kritischen Punkt (5,2) hat. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da det und Spur positiv sind, so ist die Hesse-Matrix positiv definit und (5,2) eine lokale Minimumstelle.



Die lokale Minimumstelle von f

Beispiel. Bestimmen wir die kritischen Punkten der Funktion

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

in \mathbb{R}^2 . Wir haben

$$\partial_x f = 8x^3 - 2x$$
 und $\partial_y f = 4y^3 - 4y$

so dass die Gleichungen für die kritischen Punkte sind

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0, \\ 4y^3 - 4y = 0. \end{cases}$$

Es folgt $x=0,\pm\frac{1}{2}$ und $y=0,\pm1,$ insgesamt 9 kritische Punkte. Die Hesse-Matrix ist

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f \\ \partial_{xy}f & \partial_{yy}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt (0,0) ist die Hesse-Matrix

$$\left(\begin{array}{cc} -2 & 0\\ 0 & -4 \end{array}\right)$$

negativ definit, so dass (0,0) eine lokale Maximumstelle. In den Punkten $(0,\pm 1)$ ist die Hesse-Matrix

$$\left(\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{array}\right)$$

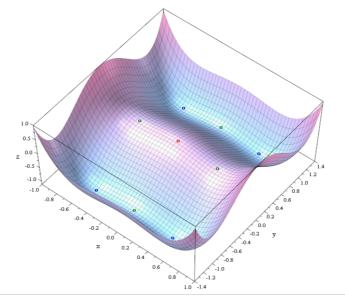
indefinit, so dass $(0, \pm 1)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ ist die Hesse-Matrix

$$\left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{array}\right)$$

indefinit, so dass $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $(\pm \frac{1}{2}, \pm 1)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit, so dass diese Punkte lokale Minimumstellen sind.



Die kritischen Punkten von f

Somit hat f es eine lokale Maximumstelle in (0,0) und vier lokale Minimumstellen in den Punkten $(\pm \frac{1}{2}, \pm 1)$. Die kritischen Punkte $(0,\pm 1)$ und $(\pm \frac{1}{2},0)$ sind keine lokale Extremumstellen. In der Nähe von diesen Punkten sieht der Graph der Funktion f wie ein Sattel aus.

15.7 Satz von der impliziten Funktion

Betrachten wir das folgende Problem: gegeben sei eine reellwertige Funktion F(x, y) auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, man bestimme y als Funktion von x aus der Gleichung F(x, y) = 0. Gibt es eine stetige Funktion f(x) so dass

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \tag{15.32}$$

(möglicherweise in einer Teilmenge von Ω) so sagt man, dass die Funktion f(x) durch die Gleichung F(x,y)=0 implizit definiert wird. Häufig wird der Begriff "implizite Funktion" benutzt, was bedeutet nicht anderes als "implizit definierte Funktion".

Betrachten wir die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Dann soll der Graph von der impliziten Funktion f in M liegen.

Beispiel. Die Menge von Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die die Gleichung

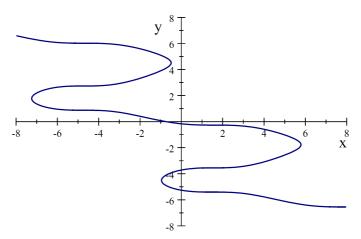
$$x^2 + y^2 = 1 (15.33)$$

erfüllen, ist ein Kreis. Der Kreis ist kein Graph, aber besteht aus zwei Graphen von den stetigen Funktionen $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ auf $x \in [-1, 1]$. Diese zwei Funktionen werden implizit von der Gleichung (15.33) definiert.

Beispiel. Betrachten wir noch eine andere Gleichung:

$$x + \cos x + y + 5\sin y = 0, (15.34)$$

die sich nicht explizit lösen lässt.



Die Menge von Punkten (x, y), die (15.34) erfüllen

Die Menge M von Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die (15.34) erfüllen, ist eine Kurve, die sich in mehreren Graphen von stetigen Funktionen teilen lässt: jedes Stück zwischen den Wendepunkten bestimmt einen Graph. Somit gibt es mehrere stetige Funktionen, die von (15.34) implizit definiert werden, mit verschiedenen Definitionsbereichen.

01.02.19

Betrachten wir jetzt eine allgemeinere Situation when x ein Punkt in \mathbb{R}^n ist und y ein Punkt in \mathbb{R}^m . Wir betrachten das Paar (x,y) als Element von \mathbb{R}^{n+m} mit den Komponenten

$$(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$$
.

Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^{n+m} wo eine Funktion $F:\Omega\to\mathbb{R}^m$ definiert ist. Wir möchten die Gleichung F(x,y)=0 bezüglich y lösen und somit eine Funktion y=f(x) erhalten. Diese Gleichung sieht ausführlich so aus:

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ F_2(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ ... \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \end{cases}$$

wobei $F_1, ..., F_m$ die Komponenten von F sind. Das ist ein System von m skalaren Gleichungen mit m Unbekannten $y_1, ..., y_m$ und mit n Parametern $x_1, ..., x_n$. Solches System kann sehr kompliziert sein, aber wir formulieren unterhalb die einfachen Bedingungen, die mindestens lokale Lösbarkeit garantieren.

Beispiel. Betrachten wir ein Beispiel, wo F eine lineare Abbildung bezüglich y ist, d.h.

$$F(x,y) = A(x)y + B(x),$$

wobei A(x) eine $m \times m$ von x abhängige Matrix ist und $B(x) \in \mathbb{R}^m$. Die Gleichung F(x,y) = 0 ist ein lineares System

$$A(x)y + B(x) = 0,$$

das genau dann lösbar ist, wenn die Matrix A(x) invertierbar ist. In diesem Fall erhalten wir

$$y = -A^{-1}(x) B(x).$$

Sei die Funktion $F:\Omega\to\mathbb{R}^m$ differenzierbar. Die Jacobi-Matrix von F lässt sich wie folgt darstellen

$$J_F = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1 & \dots & \partial_{x_n} F_1 & \partial_{y_1} F_1 & \dots & \partial_{y_m} F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1} F_m & \dots & \partial_{x_n} F_m & \partial_{y_1} F_m & \dots & \partial_{y_m} F_m \end{pmatrix} = (\partial_x F \mid \partial_y F), \quad (15.35)$$

wobei $\partial_x F$ die Jacobi-Matrix von F bezüglich x ist und $\partial_y F$ die Jacobi-Matrix von F bezüglich y ist. Es ist klar, dass $\partial_x F$ eine $m \times n$ Matrix ist und $\partial_y F$ eine $m \times m$ Matrix. Insbesondere ist $\partial_y F$ eine quadratische Matrix.

Zum Beispiel, im Fall F = A(x)y + B(x) haben wir $\partial_y F(x,y) = A(x)$. Somit ist in diesem Fall die Lösbarkeit der Gleichung F(x,y) = 0 äquivalent zur Invertierbarkeit der Matrix $\partial_y F$.

Definition. Let Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^k . Eine Funktion $\Phi: \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt l-fach stetig differenzierbar falls alle partielle Ableitungen $D^{\alpha}\Phi_j$ der Ordnung $|\alpha| \leq l$ von allen Komponenten Φ_j existieren und stetig in Ω sind. Man sagt in diesem Fall, eine Funktion der Klasse C^l ist.

Hauptsatz 15.14 (Der Satz von der impliziten Funktion) Seien Ω eine offene Menge in \mathbb{R}^{n+m} und F eine Funktion der Klasse C^l mit $l \geq 1$. Gelten für einen Punkt $(a,b) \in \Omega$ die Bedingungen

$$F(a,b) = 0$$
 und $\partial_y F(a,b)$ ist invertierbar, (15.36)

so existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U$, $b \in V$, $U \times V \subset \Omega$, und eine Funktion $f: U \to V$ mit

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \quad \text{für alle } x \in U, y \in V.$$
 (15.37)

Darüber hinaus ist f von der Klasse C^l und es gilt für alle $x \in U$ die Identität

$$f'(x) = -(\partial_u F)^{-1} \partial_x F(x, f(x))$$
 (15.38)

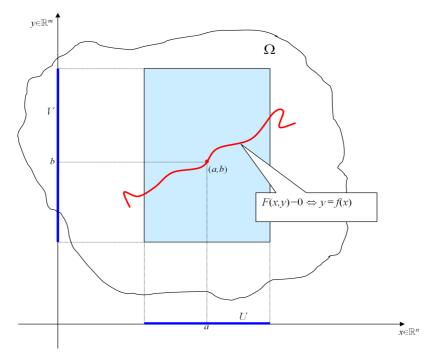


Bild zum Satz 15.14

Betrachten wir die Mengen

$$M = \{(x, y) \in \Omega : F(x, y) = 0\}$$

und

$$N = \{(x, y) \in \Omega : \det \partial_y F(x, y) = 0\}.$$

Die Bedingung (15.36) bedeutet, dass $(a,b) \in M \setminus N$. Die Existenz von f mit (15.37) bedeutet, dass die Menge M in der Nähe von (a,b) (nämlich in $U \times V$) der Graph einer Funktion ist. Somit lässt sich der Satz 15.14 wie folgt kurz umformulieren: in der Nähe von jedem Punkt $(a,b) \in M \setminus N$ ist die Menge M ein Graph. Oder noch kürzer: die Menge $M \setminus N$ ist lokal ein Graph. Das Wort "lokal" bedeutet genau "in der Nähe von jedem Punkt", und "ein Graph" bedeutet "der Graph einer Funktion von x".

Beispiel. Betrachten wir wieder die Funktion (15.34), d.h.

$$F(x,y) = x + \cos x + y + 5\sin y$$

mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wir haben

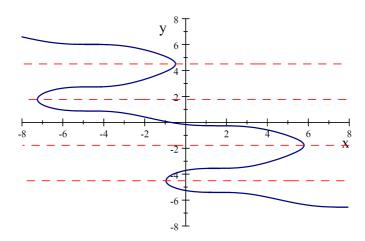
$$\partial_y F = 1 + 5\cos y$$
.

Betrachten wir die Mengen M und N wie oberhalb, d.h.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \cos x + y + 5\sin y = 0\}$$

und

$$N = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos y = -\frac{1}{5} \right\}$$
$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Die Mengen M und N

Am obigen Bild M ist die Kurve und N ist die Vereinigung von waagerechten Geraden. Der Schnitt $M \cap N$ besteht aus allen Wendepunkten der Kurve M. Die Menge M außerhalb des Schnittes ist lokal der Graph einer Funktion y = f(x).

Sei y = f(x) eine implizit von F(x, y) = 0 gegebene Funktion. Es folgt aus (15.38), dass

$$f'(x) = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F} = -\frac{1 - \sin x}{1 + 5\cos y} = -\frac{1 - \sin x}{1 + 5\cos f(x)}.$$

Obwohl die Funktion f(x) nicht explizit bekannt ist, die Formel (15.38) ergibt die Ableitung f'(x) explizit durch x und f(x).

Bemerkung. Die Formel (15.38) lässt sich leicht gewinnen, vorausgesetzt, dass die implizite Funktion y = f(x) existiert und differenzierbar ist. Dann erfüllen sie für alle $x \in U$ die Gleichung

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Ableiten von der Funktion g(x) = F(x, f(x)) ergibt nach der Kettenregel

$$g'(x) = F'(x,y) \begin{pmatrix} \operatorname{Id} \\ f'(x) \end{pmatrix} = (\partial_x F \mid \partial_y F) \begin{pmatrix} \operatorname{Id} \\ f'(x) \end{pmatrix} = \partial_x F + (\partial_y F) f'(x),$$

woraus die folgende Identität in U folgt

$$\partial_x F + (\partial_y F) f'(x) = 0,$$

und somit auch (15.38).

Dieser Argument gilt als Beweis von (15.38) nur dann, wenn die Differenzierbarkeit von f schon bekannt ist. Allerdings im Beweis des Satzes 15.14 werden wir die Differenzierbarkeit von f zusammen mit (15.38) erhalten, aber nicht zuvor.

15.8 Satz von der inversen Funktion

Hauptsatz 15.15 (Satz von der inversen Funktion) Seien W eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f: W \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion der Klasse C^l mit $l \geq 1$. Ist f'(p) in einem Punkt $p \in W$ invertierbar, so existieren offene Teilmengen U und V von \mathbb{R}^n , so dass $p \in U \subset W$, $f(p) \in V$, und $f|_U$ eine Bijektion von U nach V ist; insbesondere ist die inverse Funktion $f^{-1}: V \to U$ wohldefiniert. Darüber hinaus ist f^{-1} der Klasse C^l und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$$
 (15.39)

 $f\ddot{u}r \ alle \ y \in V \ und \ x = f^{-1}(y).$

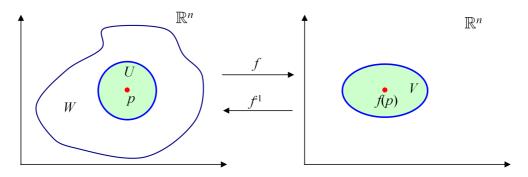


Bild zum Satz 15.15

Eine kurze Umformulierung des Satzes 15.15: in der Nähe von jedem Punkt p, wo die Matrix f'(p) invertierbar ist, ist auch die Funktion f invertierbar. Betrachten wir die Menge

$$W_0 = \{ p \in W : \det f'(p) = 0 \}.$$

Dann in $W \setminus W_0$ ist f lokal invertierbar.

Bemerkung. Sei $f: J \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^1 auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nun sei angenommen, dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Zeigen wir, dass die inverse Funktion f^{-1} auf dem ganzen Intervall I = f(J) existiert. Da f' stetig ist, so gilt nach dem Zwischenwertsatz, dass entweder f'(x) > 0 für alle $x \in J$ oder f'(x) < 0 für alle $x \in J$. Somit ist die Funktion f auf J streng monoton steigend oder fallend (Satz 8.1 aus Analysis 1). Nach dem Satz 7.11 existiert die inverse Funktion f^{-1} auf dem ganzen Intervall I, und nach dem Satz 8.5 ist f^{-1} differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

für alle $y \in I$ und $x = f^{-1}(y)$.

Der Satz 15.15 ergibt die Existenz von f^{-1} nur lokal, auch wenn f'(x) in jedem Punkt $x \in W$ invertierbar ist. Für die globale Existenz von f^{-1} in Dimension $n \geq 2$ benötigt man zusätzliche Bedingungen, die hier nicht besprochen werden.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$
 (15.40)

15.9. * BEWEISE 211

Die totale Ableitung

$$f'(x,y) = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn det $f'(x,y) = 4(x^2 + y^2) \neq 0$ d.h. für $(x,y) \neq 0$. Setzen wir $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und erhalten nach dem Satz 15.15, dass f in W lokal invertierbar.

Mit Hilfe von der komplexen Variable z = x + iy können wir die Funktion (15.40) wie folgt darstellen: $f(z) = z^2$. Jede komplexe Zahl $w \in W$ hat genau zwei Werte von \sqrt{w} , d.h. es gibt zwei Werte von z mit f(z) = w. Es folgt, dass das Bild f(W) gleich W, aber die Funktion $f: W \to W$ nicht injektiv ist und somit nicht (global) invertierbar ist.

15.9 * Beweise

15.9.1 Taylorformel

Beweis von dem Satz 15.11. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir a = 0 an. Setzen wir

$$R_k(x) := f(x) - T_k(x)$$
 (15.41)

und beweisen per Induktion nach k, dass

$$R_k(x) = o(\|x\|^k) \text{ für } x \to 0.$$
 (15.42)

Induktionsan fang. Für k=0 wird (15.42)

$$f(x) - f(0) = o(1)$$
 für $x \to 0$,

was nach der Stetigkeit von f gilt.

Induktionsschritt von k-1 nach k. Fixieren wir einen Index i=1,...,n und bemerken, dass $\partial_i f \in C^{k-1}(\Omega)$.

Behauptung. Das Taylor-Polynom der Ordnung k-1 von $\partial_i f$ ist gleich $\partial_i T_k$, d.h.

$$T_{k-1,\partial_i f}(x) = \partial_i T_{k,f}(x). \tag{15.43}$$

Nach (15.24) haben wir

$$\partial_{i} T_{k}(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^{n}: |\alpha| \leq k\}} \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!} \partial_{i} x^{\alpha}.$$
 (15.44)

Im Fall $\alpha_i = 0$ hängt x^{α} von x_i nicht ab, woraus folgt $\partial_i x^{\alpha} = 0$. Somit können wir annehmen, dass in der obigen Summe nur die Werte von α mit $\alpha_i \geq 1$ benutzt werden. Setzen wir

$$\beta = (0, ..., \frac{1}{i}, ..., 0). \tag{15.45}$$

Dann ist $\alpha - \beta$ ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| - 1$ und es gelten die Identitäten:

$$\partial_i x^{\alpha} = \partial_i \left(x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i} ... x_n^{\alpha_n} \right) = \alpha_i \left(x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_{i-1}} ... x_n^{\alpha_n} \right) = \alpha_i x^{\alpha - \beta},$$

$$\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_i! ... \alpha_n! = \alpha_i \left(\alpha_1! ... \left(\alpha_i - 1 \right)! ... \alpha_n! \right) = \alpha_i \left(\alpha - \beta \right)!,$$

$$D^{\alpha} f = D^{\alpha - \beta} D^{\beta} f = D^{\alpha - \beta} \partial_i f.$$

Einsetzen in (15.44) und Wechsel $\gamma = \alpha - \beta$ ergeben:

$$\partial_{i}T_{k}(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^{n}: |\alpha| \leq k, \alpha_{i} \geq 1\}} \frac{D^{\alpha-\beta}\partial_{i}f(0)}{\alpha_{i}(\alpha-\beta)!} \alpha_{i}x^{\alpha-\beta}$$

$$= \sum_{\{\gamma \in \mathbb{I}^{n}: |\gamma| \leq k-1\}} \frac{D^{\gamma}(\partial_{i}f)(0)}{\gamma!} x^{\gamma} = T_{k-1,\partial_{i}f}(x),$$

$$(15.46)$$

was (15.43) beweist.

Nach (15.43) und nach der Induktionsvoraussetzung für die Funktion $\partial_i f \in C^{k-1}(\Omega)$ erhalten wir

$$(\partial_i f)(x) = \partial_i T_k(x) + o(||x||^{k-1}) \text{ für } x \to 0,$$

was äquivalent zu

$$\partial_i R_k(x) = o\left(\|x\|^{k-1}\right) \text{ für } x \to 0 \tag{15.47}$$

ist.

Die Funktion $R_k(x)$ ist in einer Kugel $U_{\varepsilon}(0)$ wohldefiniert und gehört zur Klasse $C^k(B_{\varepsilon}(0))$. Da $k \geq 1$, so ist R_k differenzierbar in dieser Kugel. Nach dem Mittelwertsatz 15.8 erhalten wir, dass für ein Punkt $\xi \in [0, x]$

$$R_k(x) = R_k(x) - R_k(0) = R'_k(\xi) x = \sum_{i=1}^n \partial_i R_k(\xi) x_i.$$

Da $\|\xi\| \leq \|x\|$, so erhalten wir aus (15.47)

$$|R_k(x)| \le \sum_{i=1}^n |\partial_i R_k(\xi)| \|x\|_{\infty} = o(\|\xi\|^{k-1}) \|x\|_{\infty} = o(\|x\|^k),$$

woraus (15.42) folgt.

Jetzt beweisen wir die Eindeutigkeit des Taylor-Polynoms. Gilt (15.23), so setzen wir

$$b_{\alpha} = \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!} - c_{\alpha}$$

und

$$Q(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} b_{\alpha} x^{\alpha},$$

so dass Q(x) ein Polynom von x des Grades $\leq k$ ist. Es folgt aus (15.22) and (15.23), dass

$$Q(x) = o\left(\|x\|^{k}\right) \quad \text{für } k \to \infty.$$
 (15.48)

15.9. * BEWEISE 213

Wir müssen beweisen, dass $b_{\alpha} = 0$ für alle α , was wir aus (15.48) gewinnen.

Zuerst zeigen wir, dass $Q(x) \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Setzen wir x = tv für $v \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ und stellen Q(x) wie folgt dar:

$$Q(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} b_{\alpha} (tv)^{\alpha} = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \le k\}} b_{\alpha} t^{|\alpha|} v^{\alpha} = \sum_{j=0}^k Q_j (v) t^j,$$

wobei $Q_j(v)$ die Polynome von v sind. Für festes v und für $t \to 0$ erhalten wir aus (15.48)

$$\sum_{j=0}^{k} Q_j(v) t^j = o(t^k) \text{ für } t \to 0.$$

Da die linke Seite hier ein Polynom von t des Grades $\leq k$ ist, so erhalten wir nach der Taylorformel aus Analysis 1, dass alle Koeffizienten von diesem Polynom verschwinden, d.h.

$$Q_{j}(v) = 0$$
 für alle $j = 0, ..., k$ und für alle $v \in \mathbb{R}^{n}$,

woraus folgt

$$Q(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{15.49}$$

Beweisen wir jetzt per Induktion nach k, dass unter der Bedingung (15.49) alle Koeffizienten b_{α} von Q verschwinden. Für k=0 ist das offensichtlich, da $Q(x) \equiv b_0 = \text{const}$. Für Induktionsschritt bemerken wir, dass analog zu (15.46) und mit β aus (15.45)

$$\partial_{i}Q\left(x\right)=\sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^{n}:|\alpha|\leq k,\alpha_{i}\geq1\}}\alpha_{i}b_{\alpha}x^{\alpha-\beta}=\sum_{\{\gamma\in\mathbb{I}^{n}:|\gamma|\leq k-1\}}b_{\gamma}'x^{\gamma},$$

wobei $\gamma = \alpha - \beta$ und $b'_{\gamma} = \alpha_i b_{\alpha}$. Da $\partial_i Q(x) \equiv 0$ und $\partial_i Q$ ein Polynom des Grades $\leq k-1$ ist, so erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung, dass $b'_{\gamma} = 0$ für alle γ , woraus folgt, dass $b_{\alpha} = 0$ für alle α mit $\alpha_i \geq 1$. Da i beliebig ist, so erhalten wir $b_{\alpha} = 0$ für alle $\alpha \neq 0$. Für $\alpha = 0$ gilt $b_0 = Q(0) = 0$ auch. Somit sind alle b_{α} gleich 0, was zu beweisen war.

15.9.2 Satz von der impliziten Funktion

Beweis von dem Satz 15.14. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass a=0 in \mathbb{R}^n und b=0 in \mathbb{R}^m . In den Vektorräumen \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^m , \mathbb{R}^{n+m} wählen wir die ∞ -Norm. Da F in 0 differenzierbar ist und F(0)=0, so haben wir

$$F(h) = F'(0) h + \varphi(h), \qquad (15.50)$$

wobei die Funktion $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^m$ erfüllt

$$\varphi(h) = o(\|h\|)$$
 für $h \to 0$.

We behaupten, dass

$$\varphi \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^m), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$
 (15.51)

In der Tat, es folgt aus (15.50), dass

$$\varphi(h) = F(h) - F'(0) h,$$

woraus die ersten zwei Eigenschaften in (15.51) folgen. Da

$$\varphi'(h) = F'(h) - F'(0),$$

so erhalten wir auch $\varphi'(0) = 0$.

Da $h \in \mathbb{R}^{n+m}$, so bezeichnen wir h = (x, y) mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Setzen wir

$$A = \partial_x F(0)$$
 und $B = \partial_y F(0)$.

Dann gilt

$$F'(0) = (A \mid B)$$

und

$$F'(0) h = (A \mid B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax + By.$$

Somit erhalten wir aus (15.50)

$$F(x,y) = Ax + By + \varphi(x,y). \tag{15.52}$$

Die Gleichung F(x,y) = 0 lässt sich wie folgt umschreiben:

$$Ax + By + \varphi(x, y) = 0.$$

Da die Matrix B invertierbar ist, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$y = -B^{-1} \left(Ax + \varphi \left(x, y \right) \right).$$

Setzen wir

$$G(x,y) = -B^{-1}(Ax + \varphi(x,y))$$
(15.53)

und erhalten die folgende Äquivalenz:

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = G(x,y)$$
.

Die weitere Idee von Beweis ist, dass die Abbildung $y\mapsto G(x,y)$ für jedes x in der Nähe von 0 in \mathbb{R}^n eine Kontraktionsabbildung in der Nähe von 0 in \mathbb{R}^m ist. Nach dem Fixpunktsatz von Banach können wir daraus beschließen, dass diese Abbildung einen Fixpunkt hat, dass heißt, die Gleichung y=G(x,y) bezüglich y lösbar ist, was y als eine Funktion von x liefert. Um diese Idee rigoros zu machen, wir müssen den Definitionsbereich der Abbildung $y\mapsto G(x,y)$ bestimmen, wo diese Abbildung eine Selbstabbildung und auch eine Kontraktion ist. Darüber hinaus soll der Definitionsbereich ein vollständiger metrischer Raum sein.

Die Funktion G(x, y) erfüllt die folgenden Eigenschaften:

$$G \in C^{l}(\Omega, \mathbb{R}^{m}), G(0) = 0, \partial_{y}G(0) = 0,$$

die trivial aus (15.51) und (15.53) folgen. Wählen wir hinreichend kleine positive Konstanten ε und δ aus den folgenden Bedingungen (i)-(iii).

15.9. * BEWEISE 215

(i) Da alle partielle Ableitungen $\partial_{y_i}G_j$ stetig sind und in 0 verschwinden, so gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } ||x|| \le \varepsilon, ||y|| \le \varepsilon \text{ gilt } (x,y) \in \Omega \text{ und } |\partial_{y_i} G_j(x,y)| \le \frac{1}{2m}$$
 für alle i, j .

(ii) Da det $\partial_y F$ stetig ist und det $\partial_y F(0) \neq 0$ nach der Invertierbarkeit von $\partial_y F(0)$, so gilt für hinreichend kleines ε auch die folgende Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall y \in \mathbb{R}^m \ \text{mit} \ \|x\| \le \varepsilon, \ \|y\| \le \varepsilon \ \text{ist} \ \partial_y F(x,y) \ \text{invertierbar}.$$
 (15.55)

(iii) Da die Funktion $x \mapsto G(x,0)$ stetig ist und G(0,0) = 0, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ (insbesondere für ε wie in (15.54) und (15.55)) ein $\delta \in (0,\varepsilon]$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \text{ mit } ||x|| \le \delta \text{ gilt } ||G(x,0)|| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$
 (15.56)

Da $\delta \leq \varepsilon$ so liegt der Punkt (x,0) in Ω und somit ist G(x,0) wohldefiniert.

Bezeichnen wir mit U und V die folgenden Kugeln

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < \delta\}, \ V = \{y \in \mathbb{R}^m : ||y|| < \varepsilon\}$$

und betrachten auch die abgeschlossenen Kugeln

$$\overline{U} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le \delta \right\}, \quad \overline{V} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \|y\| \le \varepsilon \right\}.$$

Nach der Wahl von ε und δ gilt $\overline{U} \times \overline{V} \subset \Omega$. Der weitere Beweis wird schrittweise durchgeführt.

Schritt 1. Zeigen wir, dass für alle $x \in \overline{U}$ und $y, y' \in \overline{V}$ gilt

$$||G(x,y) - G(x,y')|| \le \frac{1}{2} ||y - y'||.$$
 (15.57)

Nach dem Mittelwertsatz erhalten wir für jede Komponente G_j of G und für ein $\xi \in [y, y']$, dass

$$|G_{j}(x,y) - G_{j}(x,y')| = |\partial_{y}G_{j}(x,\xi)(y - y')|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} \partial_{y_{i}}G_{j}(x,\xi)(y_{i} - y'_{i}) \right| \leq \frac{1}{2m} m \|y - y'\|_{\infty},$$

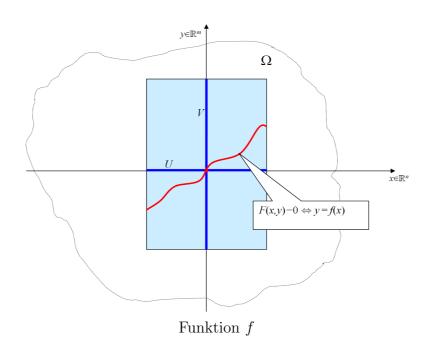
woraus (15.57) folgt. Hier haben wir (15.54) benutzt, was die Konstante $\frac{1}{2m}$ in (15.54) erklärt.

Schritt 2. Zeigen wir, dass für alle $x \in \overline{U}$ und $y \in \overline{V}$ gilt $G(x,y) \in V$.

We erhalten mit Hilfe von (15.57) und (15.56)

$$||G(x,y)|| \le ||G(x,y) - G(x,0)|| + ||G(x,0)|| < \frac{1}{2} ||y|| + \frac{1}{2} \varepsilon \le \varepsilon.$$

Schritt 3. Beweisen wir, dass es eine Funktion $f: \overline{U} \to \overline{V}$ gibt, so dass $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$ für alle $x \in \overline{U}$ und $y \in \overline{V}$. (15.58)



Für jedes $x \in \overline{U}$ betrachten wir die Selbstabbildung von \overline{V}

$$\overline{V} \ni y \mapsto G(x,y) \in \overline{V},$$

die nach Schritt 2 wohldefiniert ist. Die Menge \overline{V} ist eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^m und somit ist ein vollständiger metrischer Raum (siehe Aufgabe 129). Nach (15.57) ist diese Abbildung eine Kontraktion. Nach dem Fixpunktsatz von Banach (Satz 14.15) gibt es genau einen Fixpunkt dieser Abbildung, den wir mit f(x) bezeichnen. Diese Funktion ist für jedes $x \in \overline{U}$ definiert und nimmt die Werte in \overline{V} an. Nach Definition von f erhalten wir, dass für $x \in \overline{U}$ und $y \in \overline{V}$ die Gleichung G(x,y) = y äquivalent zu y = f(x) ist. Da G(x,y) = y äquivalent zu F(x,y) = 0 ist, so erhalten wir (15.58).

Schritt 4. Beweisen wir: es gibt eine Konstante C mit

$$||f(x) - f(x')|| \le C||x - x'|| \text{ für alle } x, x' \in \overline{U}.$$
 (15.59)

Die Funktionen, die (15.59) erfüllen, heißen Lipschitz-stetig. Es ist klar, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch stetig ist. Insbesondere ist die Funktion f stetig in \overline{U} .

Es folgt aus der Identität f(x) = G(x, f(x)), dass

$$||f(x) - f(x')|| = ||G(x, f(x)) - G(x', f(x'))||$$

$$\leq ||G(x, f(x)) - G(x', f(x))||$$

$$+ ||G(x', f(x)) - G(x', f(x'))||.$$
(15.60)

15.9. * BEWEISE 217

Nach (15.57) gilt

$$||G(x', f(x)) - G(x', f(x'))|| \le \frac{1}{2} ||f(x) - f(x')||.$$

Um den ersten Glied in (15.60) abzuschätzen, benutzen wir für jede Komponente G_i von G den Mittelwertsatz: es gibt ein $\xi \in [x, x']$ mit

$$G_{j}(x, f(x)) - G_{j}(x', f(x)) = \partial_{x}G_{j}(\xi, f(x))(x - x') = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_{i}}G_{j}(\xi_{j}, f(x))(x_{i} - x'_{i}).$$

Da die Funktion $\partial_{x_i}G_j(x,y)$ stetig ist, so ist sie nach dem Extremwertsatz beschränkt auf $\overline{U} \times \overline{V}$, da diese Menge beschränkt und abgeschlossen ist. Also, es existiert eine Konstante M mit $|\partial_{x_i}G_j(x,y)| \leq M$ für alle $x \in \overline{U}$, $y \in \overline{V}$ alle i,j, woraus folgt

$$|G_i(x, f(x)) - G_i(x', f(x))| \le Mn||x - x'||$$

und somit

$$||G(x', f(x)) - G(x', f(x'))|| \le Mn||x - x'||.$$

Es folgt aus (15.60) dass

$$||f(x) - f(x')|| \le Mn||x - x'|| + \frac{1}{2}||f(x) - f(x')||,$$

was (15.59) mit C = 2Mn ergibt.

Schritt 5. Beweisen wir: die Funktion $f: U \to \mathbb{R}^m$ ist in U differenzierbar und

$$f'(x) = -(\partial_y F)^{-1} \partial_x F(x, f(x)).$$
 (15.61)

Fixieren wir ein $x_0 \in U$ und beweisen, dass f differenzierbar in x_0 ist. Setzen wir $y_0 = f(x_0)$. Nach der Differenzierbarkeit von F in (x_0, y_0) gilt

$$F(x,y) - F(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varphi(x,y)$$
 (15.62)

mit

$$A = \partial_x F(x_0, y_0), \quad B = \partial_y F(x_0, y_0)$$

und

$$\varphi(x,y) = o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|) \text{ für } x \to x_0 \text{ und } y \to y_0.$$
 (15.63)

Wir benutzen (15.62) mit $x \in U$ und y = f(x). Nach Definition von f haben wir

$$F(x,y) = F(x_0, y_0) = 0. (15.64)$$

Nach (15.55) ist die Matrix B invertierbar. Es folgt aus (15.62) und (15.64), dass

$$f(x) - f(x_0) = y - y_0 = -B^{-1}A(x - x_0) - B^{-1}\varphi(x, f(x)).$$
 (15.65)

Um die Differenzierbarkeit von f in x_0 daraus zu gewinnen, reicht es zu zeigen, dass

$$B^{-1}\varphi(x, f(x)) = o(||x - x_0||) \text{ für } x \to x_0.$$

Da die Norm der Matrix B^{-1} endlich ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$\varphi(x, f(x)) = o(||x - x_0||) \text{ für } x \to x_0.$$
 (15.66)

Nach (15.63) haben wir

$$\varphi(x, f(x)) = o(||x - x_0|| + ||f(x) - f(x_0)||) \text{ für } x \to x_0,$$

woraus (15.66) folgt, da nach (15.59)

$$||f(x) - f(x_0)|| \le C||x - x_0||.$$

Es folgt aus (15.65), dass

$$f'(x_0) = -B^{-1}A = -\partial_y F(x_0, f(x_0))^{-1} \partial_x F(x_0, f(x_0)).$$

Schritt 6. Beweisen wir, dass $f \in C^l(U, \mathbb{R}^m)$.

Induktionsanfang für l=1. Da die Funktion f und alle partiellen Ableitungen von F stetig sind, so es folgt aus (15.61), dass auch f'(x) stetig ist, woraus $f \in C^1$ folgt.

Induktionsschritt von l-1 nach l. Beweisen wir, dass $F \in C^l$ ergibt $f \in C^l$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $f \in C^{l-1}$. Da $\partial_x F$ und $\partial_y F$ von der Klasse C^{l-1} sind, so folgt es aus (15.61), dass $f' \in C^{l-1}$, woraus $f \in C^l$ folgt.

15.9.3 Satz von der inversen Funktion

Beweis von dem Satz 15.15. Setzen wir

$$F(x,y) = y - f(x),$$

so dass die Gleichung y = f(x) äquivalent zu

$$F(x,y) = 0$$

ist. Die Funktion $F\left(x,y\right)$ ist für alle $(x,y)\in\Omega:=W\times\mathbb{R}^n$ definiert und nimmt die Werte in \mathbb{R}^n an. Offensichtlich haben wir $F\in C^l\left(\Omega,\mathbb{R}^n\right)$.

Mit Hilfe von dem Satz von der impliziten Funktion (Satz 15.14) lösen wir die Gleichung F(x,y)=0 bezüglich x und somit erhalten x als Funktion von y. Dafür brauchen wir die Invertierbarkeit von $\partial_x F$ in einem Punkt. Offensichtlich haben wir

$$\partial_x F(x,y) = -f'(x)$$
.

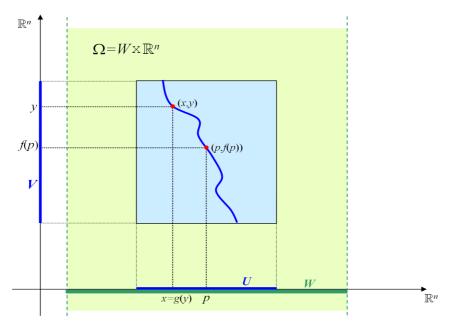
Da f'(p) invertierbar, so erhalten wir, dass $\partial_x F(p, f(p))$ invertierbar. Da auch F(p, f(p)) = 0, so erhalten wir nach dem Satz 15.14 folgendes: es gibt die Umgebungen $U \subset W$ von p und $V \subset \mathbb{R}^n$ von f(p) und eine Funktion $g: V \to U$ von der Klasse C^l mit

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y)$$
 für alle $x \in U$ und $y \in V$,

15.9. * BEWEISE 219

d.h.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \text{ für alle } x \in U \text{ und } y \in V.$$
 (15.67)



Funktion $g: V \to U$

Weiter bestimmen wir $f \circ g$ und $g \circ f$. Für jedes $y \in V$ setzen wir x = g(y). Da $x \in U$, so erhalten aus (15.67) f(g(y)) = f(x) = y, d.h.

$$f \circ g = \mathrm{Id}_V. \tag{15.68}$$

Allerdings $g \circ f$ ist nicht unbedingt gleich Id_U . Für jedes $x \in U$ setzen wir y = f(x). Es ist uns nicht gegeben, dass $f(x) \in V$. Im Fall $f(x) \in V$ gilt $y \in V$ und wir erhalten aus (15.67), dass

$$g(f(x)) = x$$
 für alle $x \in U$ mit $f(x) \in V$.

Die zusätzliche Bedingung $f(x) \in V$ ist äquivalent zu $x \in f^{-1}(V)$ wobei f^{-1} hier die Urbildabbildung ist. Somit erhalten wir

$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in U \cap f^{-1}(V) =: U_0.$$
 (15.69)

Da f stetig ist, so ist die Menge $f^{-1}(V)$ offen und somit ist U_0 auch offen. Wir haben auch $p \in U_0$ da $p \in U$ und $f(p) \in V$.

Bemerken wir, dass das Bild von g in U_0 liegt da nach (15.68) f(g(V)) = V, woraus folgt $g(V) \subset f^{-1}(V)$ und somit $g(V) \subset f^{-1}(V) \cap U = U_0$. Es folgt, dass die Bedingung (15.67) auch für U_0 anstatt U gilt. Dann erhalten wir aus (15.69)

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{U_0},$$

was zusammen mit (15.68) ergibt, dass $g:V\to U_0$ die inverse Funktion von $f:U_0\to V$ ist. Es bleibt nur U_0 in U umbenennen.

Um (15.39) zu beweisen, leiten wir die Identität $f \circ g = \mathrm{Id}_V$ ab. Nach der Kettenregel gilt für jedes $y \in V$

$$id = (f \circ g)' = f'(x) g'(y),$$

wobei $x = g(y) = f^{-1}(y)$, was $g'(y) = f'(x)^{-1}$ ergibt.

15.10 * Holomorphe und harmonische Funktionen

Hier beweisen wie wieder den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe von dem Begriff von holomorphen Funktionen.

Definition. Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{C} . Eine Funktion $f \to \Omega \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) und die reellwertigen Funktionen u und v unendlich oft stetig differenzierbar in Ω und die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{cases}
 u_x = v_y \\ v_x = -u_y
\end{cases}$$
(15.70)

Die Gleichungen (15.70) heißen Cauchy-Riemann-Gleichungen.

Offensichtlich ist die Konstante holomorph. Auch die Funktion f(z) = z ist holomorph, da u = x und v = y. Die Funktion $f(z) = \overline{z} = x - iy$ ist im Gegensatz nicht holomorph.

Lemma 15.16 Seien f und g zwei holomorphe Funktionen in Ω . Dann auch die folgenden Funktionen sind holomorph: f + g, fg, f/g (vorausgesetzt $g \neq 0$).

Beweis. Sei f = u + iv und g = a + ib. Dann erfüllen u und v die Gleichungen (15.70), und die Funktionen a und b erfüllen

$$\begin{cases} a_x = b_y \\ b_x = -a_y \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass f+g auch holomorph ist. Beweisen wir, dass fg holomorph. Wir haben

$$fg = (ua - vb) + i(ub + va).$$

und

$$(ua - vb)_x = u_x a + ua_x - v_x b - vb_x$$
$$= v_y a + ub_y + u_y b + va_y$$
$$= (ub + va)_y$$

und

$$(ub + va)_x = u_x b + ub_x + v_x a + va_x$$

= $v_y b - ua_y - u_y a + vb_y$
= $-(ua - vb)_y$,

so dass fg holomorph ist.

Beweisen wir jetzt, dass f/g holomorph ist. Es reicht zu beweisen, dass 1/g holomorph ist. Wir haben

$$\frac{1}{g} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

und

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)_x = \frac{a_x (a^2 + b^2) - 2a (aa_x + bb_x)}{(a^2 + b^2)^2}$$
$$= \frac{(-a^2 + b^2) a_x - 2abb_x}{(a^2 + b^2)^2},$$

$$\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)_y = -\frac{b_y (a^2+b^2) - 2b (aa_y + bb_y)}{(a^2+b^2)^2}
= \frac{(-a^2+b^2) b_y + 2aba_y}{(a^2+b^2)^2}.$$

Da $a_x = b_y$ und $-b_x = a_y$, so erhalten wir

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)_x = \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)_y,$$

d.h. die erste Cauchy-Riemann-Gleichung für die Funktion $\frac{1}{g}$. Die zweite Gleichung wird analog bewiesen.

Man kann beweisen, dass auch Komposition von holomorphen Funktionen wieder holomorph ist.

Sei P(z) ein Polynom über \mathbb{C} . Es folgt aus dem Lemma 15.16, dass P holomorph in \mathbb{C} ist und auch die Funktion $\frac{1}{P}$ holomorph im Bereich $\{P \neq 0\}$ ist. Man kann beweisen, dass die Summe der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ immer holomorph in jedem Bereich ist, wo die Reihe konvergiert.

Definition. Eine Funktion $u:\Omega\to\mathbb{R}$ heißt harmonisch falls $u\in C^2(\Omega)$ und in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch falls in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} \ge 0. (15.71)$$

Bemerken wir, dass der Realteil u = Re f und Imaginärteil v = Im f einer holomorphen Funktion f unbedingt harmonisch sind, da nach (15.70)

$$u_{xx} = (v_y)_x = v_{yx} = v_{xy} = (v_x)_y = -u_{yy}$$

und somit $u_{xx} + y_{yy} = 0$.

Lemma 15.17 (Maximum-Prinzip) Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 . Sei $u:\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die in Ω subharmonisch ist. Dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u. \tag{15.72}$$

Beweis. Sei zuerst

$$u_{xx} + u_{yy} > 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{15.73}$$

Es gilt eine Maximumstelle von u in $\overline{\Omega}$, sei $z_0 = (x_0, y_0)$. Ist $z_0 \in \partial \Omega$, so gilt (15.72) offensichtlich. Sei $z_0 \in \Omega$. Da diese eine Maximumstelle ist, so gelten

$$u_{xx}(z_0) \le 0 \text{ und } u_{yy}(z_0) \le 0,$$

was im Widerspruch zur Annahme (15.73) steht.

Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall von (15.71). Dafür betrachten wir für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$u_{\varepsilon}(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2).$$

Es gilt

$$(u_{\varepsilon})_{xx} = u_{xx} + 2\varepsilon$$
 und $(u_{\varepsilon})_{yy} = u_{yy} + 2\varepsilon$

so dass

$$(u_{\varepsilon})_{xx} + (u_{\varepsilon})_{yy} = (u_{xx} + u_{yy}) + 4\varepsilon > 0.$$

Nach dem ersten Fall gilt also

$$\max_{\overline{\Omega}} u_{\varepsilon} = \max_{\partial \Omega} u_{\varepsilon}.$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (15.72).

Jetzt geben wir noch einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Hauptsatz 15.18 Jedes Polynom P(z) über \mathbb{C} von dem Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen, dass P keine Nullstelle hat, betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ die in \mathbb{C} holomorph ist. Setzen wir $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ so dass u und v harmonische Funktionen auf \mathbb{R}^2 sind. Da $|P(z)| \to +\infty$ für $|z| \to \infty$, so erhalten wir $f(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert R > 0 mit

$$|f(z)| < \varepsilon$$
 für alle z mit $|z| \ge R$.

Insbesondere für die Kreisscheibe $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ gilt

$$\max_{\partial K_R} |f| \le \varepsilon.$$

Es folgt, dass auch

$$\max_{\partial K_R} |u| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \max_{\partial K_R} |v| \leq \varepsilon.$$

Nach dem Maximum-Prinzip gilt auch

$$\max_{K_R} |u| \le \varepsilon \quad \text{und} \quad \max_{K_R} |v| \le \varepsilon,$$

insbesondere

$$|u(0)| \le \varepsilon \quad \text{und} \quad |v(0)| \le \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, so folgt es u(0) = v(0) = 0 und f(0) = 0 was unmöglich ist, da $f(0) = 1/P(0) \neq 0$.

15.11 * Parameterintegral

Satz 15.19 Sei g(x,y) eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I und $J = [\alpha, \beta]$ zwei kompakte Intervalle in \mathbb{R} sind.

(a) Dann ist die Funktion

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x, y) \, dy$$

stetig für alle $x \in I$.

(b) Nehmen wir an, dass die partielle Ableitung g_x existiert und stetig auf $I \times J$ ist. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf I und für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g_x(x, y) \, dy.$$

Somit sind die Operationen ∂_x und $\int_a^\beta dy$ auf g(x,y) vertauschbar.

Beweis. (a) Da g(x,y) stetig in $I \times J$ ist, so ist f nach dem Satz 14.27 gleichmäßig stetig in $I \times J$. Sei $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $\lim x_k = x \in I$. Es folgt, dass

$$g(x_k, y) \to g(x, y)$$
 für $k \to \infty$,

und zwar die Konvergenz gleichmäßig bezüglich $y \in J$ ist. Nach dem Satz 13.7 erhalten wir $f(x_k) \to f(x)$, so dass f stetig ist.

(b) Fixieren wir ein $x \in I$ und beweisen, dass

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \int_{\alpha}^{\beta} g_x(x,y) \, dy \text{ für } h \to 0,$$

was äquivalent zu

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy \to \int_{\alpha}^{\beta} g_x(x,y) dy \tag{15.74}$$

für $h \to 0$ ist. Wir haben für alle $y \in [\alpha, \beta]$

$$\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} \to g_x(x,y) \text{ für } h \to 0.$$
 (15.75)

Wir werden beweisen, dass die Konvergenz in (15.75) gleichmäßig bezüglich $y \in [\alpha, \beta]$ ist, woraus (15.74) nach dem Satz 13.7 folgen wird. Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet in diesem Fall, dass

$$\sup_{y \in J} \left| \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} - g_x(x,y) \right| \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$
 (15.76)

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi = \xi(y) \in [x, x+h]$ mit

$$g(x+h,y) - g(x,y) = g_x(\xi,y) h.$$

Da die Funktion g_x stetig auf $I \times J$ ist, so ist sie auch gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt so dass

$$x_{1}, x_{2} \in I, |x_{1} - x_{2}| < \delta \text{ und } \forall y_{1}, y_{2} \in J, |y_{1} - y_{2}| < \delta$$

$$\downarrow \qquad \qquad (15.77)$$

$$|g_{x}(x_{1}, y_{1}) - g_{x}(x_{2}, y_{2})| < \varepsilon$$

Gilt $|h| < \delta$ so gilt auch $|x - \xi| < \delta$ und somit nach (15.77)

$$|g_x(\xi, y) - g_x(x, y)| < \varepsilon$$
 für alle $y \in J$.

Es folgt, dass für alle $y \in J$

$$\left| \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} - g_x(x,t) \right| = \left| g_x(\xi,y) - g_x(x,y) \right| < \varepsilon,$$

woraus (15.76) folgt. \blacksquare

Beispiel. Leiten wir die folgende Funktion ab:

$$f(x) = \int_{1}^{2} \frac{\ln(x+y)}{y} dy$$

wobei $x \in (0, +\infty)$. Nach dem Satz 15.19 erhalten wir

$$f'(x) = \int_{1}^{2} \partial_{x} \frac{\ln(x+y)}{y} dy = \int_{1}^{2} \frac{dy}{(x+y)y}$$

$$= \frac{1}{x} \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right) dy$$

$$= \frac{1}{x} \left[\ln \frac{y}{x+y}\right]_{y=1}^{y=2}$$

$$= \frac{1}{x} \ln \frac{2(x+1)}{x+2}.$$

Satz 15.20 Sei g(x,y) eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I ein beliebiges Intervall ist und $J = (\alpha, \beta)$ mit $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$.

(a) Gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sup_{x \in I} |g(x, y)| \, dy < \infty, \tag{15.78}$$

so ist die Funktion

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x, y) \, dy$$

stetiq für alle $x \in I$.

(b) Zusätzlich nehmen wir an, dass die partielle Ableitung g_x existiert und stetig auf $I \times J$ ist und dass

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sup_{x \in I} |g_x(x, y)| \, dy < \infty. \tag{15.79}$$

Dann ist die Funktion f differenzierbar auf I und für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \int_0^\infty g_x(x, y) \, dy.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Intervall I kompakt ist, da die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f in x nur von f in der Nähe von x abhängen. Wählen wir a, b mit $\alpha < a < b < \beta$.

(a) Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $\lim x_k = x \in I$. Wir haben

$$f(x_{k}) - f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} (g(x_{k}, y) - g(x, y)) dy$$
$$= \int_{a}^{b} (g(x_{k}, y) - g(x, y)) dy + \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta}\right) (g(x_{k}, y) - g(x, y)) dy.$$

Das erste Integral konvergiert gegen 0 nach dem Satz 15.19. Für das zweite Integral gilt

$$\left| \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta} \right) \left(g\left(x_{k}, y \right) - g\left(x, y \right) \right) dy \right| \leq 2 \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta} \right) \sup_{\xi \in I} \left| g\left(\xi, y \right) \right| dy.$$

Nach (15.78) kann die rechte Seite aufgrund der Wahl von a, b beliebig klein gemacht werden, woraus folgt $f(x_k) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

(b) Wir haben

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy \qquad (15.80)$$

$$+ \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta}\right) \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy. \qquad (15.81)$$

Das Integral (15.80) konvergiert für $h \to 0$ gegen

$$\int_{a}^{b} g_{x}\left(x,y\right) dy$$

nach dem Satz 15.19. Andererseits gilt

$$\int_{a}^{b} g_{x}(x,y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} g_{x}(x,y) dy - \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta}\right) g_{x}(x,y) dy.$$

Für das Integral (15.81) bemerken wir zuerst, dass nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} = g_x(\xi,y)$$

für ein ξ zwischen x und x+h, woraus folgt

$$\left| \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} \right| \le \sup_{\xi \in I} |g_x(\xi,y)|,$$

wobei die rechte Seite unabhängig von h ist. Es folgt, dass

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \int_{\alpha}^{\beta} g_{x}(x,y) \, dy \right| \leq \left| \int_{a}^{b} \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy - \int_{a}^{b} g_{x}(x,y) \, dy \right|$$

$$+ \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta} \right) \left| g_{x}(x,y) \right| \, dy$$

$$+ \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta} \right) \left| \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} \right| \, dy$$

$$\leq \left| \int_{a}^{b} \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy - \int_{a}^{b} g_{x}(x) \, dy \right|$$

$$+ 2 \left(\int_{\alpha}^{a} + \int_{b}^{\beta} \right) \sup_{\xi \in I} \left| g_{x}(\xi,y) \right| \, dy.$$

$$(15.83)$$

Das Integral (15.83) kann nach (15.79) aufgrund der Wahl von a,b beliebig klein gemacht werden, und zwar unabhängig von h, wohingegen der Ausdruck (15.82) konvergiert gegen 0 für $h \to 0$ nach dem Satz 15.19. Somit erhalten wir, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \int_{\alpha}^{\beta} g_x(x,y) dy,$$

was zu beweisen war.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy$$

und beweisen, dass f in $x \in (0, +\infty)$ differenzierbar ist und

$$f'(x) = \int_0^\infty \partial_x e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Es reicht dies für $x \in (\varepsilon, +\infty)$ für jedes $\varepsilon > 0$ zu beweisen. Dafür überprüfen wir die Bedingungen (15.78) und (15.79) in $I = (\varepsilon, +\infty)$. Da $|\sin y| \le y$ und $|\sin y| \le 1$, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \sup_{x \in (\varepsilon, +\infty)} \left| e^{-xy} \frac{\sin y}{y} \right| dy \le \int_0^\infty \sup_{x \in (\varepsilon, +\infty)} \left| e^{-xy} \right| dy = \int_0^\infty e^{-\varepsilon y} dy = \frac{1}{\varepsilon} < \infty$$

und

$$\int_0^\infty \sup_{x \in (\varepsilon, +\infty)} \left| \partial_x e^{-xy} \frac{\sin y}{y} \right| dy = \int_0^\infty \sup_{x \in (\varepsilon, +\infty)} \left| e^{-xy} \sin y \right| dy \le \int_0^\infty e^{-\varepsilon y} dy < \infty.$$

Nach dem Satz 15.20 erhalten wir, für alle x > 0,

$$f'(x) = \int_0^\infty \partial_x e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy.$$

Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin y dy = \frac{1}{x^2 + 1}$$

(siehe Aufgaben 48, 118), so dass

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Es folgt, dass für alle x > 0 gilt

$$f(x) = C - \arctan x. \tag{15.84}$$

Da $\left| \frac{\sin y}{y} \right| \le 1$ und somit

$$|f(x)| \le \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{1}{x},$$

so erhalten wir

$$f(x) \to 0$$
 für $x \to +\infty$.

So folgt aus (15.84), dass $C = \arctan(+\infty) = \pi/2$ und somit, für alle x > 0,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x}$$

(vergleichen mit Aufgabe 108 wo diese Identität für x>1 bewiesen wurde). Insbesondere für x=1 erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin y}{y} dy = f(1) = \frac{\pi}{4},$$

und für $x = \sqrt{3}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{3}y} \frac{\sin y}{y} dy = f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Man kann beweisen, dass

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \to \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy \quad \text{für } x \to 0,$$

woraus folgt

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = f(0+) = \frac{\pi}{2}.$$

15.12 * Kurvenintegral und Windungszahl

Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Wir bezeichnen mit $|\gamma|$ das Bild von γ , d.h. die Kurve $\gamma([a,b])$. Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^2 die $|\gamma|$ enthält, und sei $f:\Omega\to\mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung mit den Komponenten

$$f\left(x,y\right) =\left(P\left(x,y\right) ,Q\left(x,y\right) \right) .$$

Setzen wir auch

$$\gamma\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$$

und definieren das Kurvenintegral von f entlang γ mit

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy := \int_{a}^{b} (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt.$$

Lemma 15.21 Sei $\tau : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine surjective monoton steigende stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir die parametrisierte Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, d.h.

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s)), \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Dann gilt $|\widetilde{\gamma}| = |\gamma|$ und

$$\int_{\widetilde{\gamma}} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} Pdx + Qdy.$$

Beweis. Die Identität $|\tilde{\gamma}| = |\gamma|$ ist offensichtlich. Setzen wir

$$\widetilde{\gamma}(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$$

wobei

$$\widetilde{x}(s) = x(\tau(s)) \text{ und } \widetilde{y}(s) = y(\tau(s)).$$

Die Substitution $t = \tau(s)$ ergibt

$$\begin{split} \int_{\gamma} P dx + Q dy &= \int_{a}^{b} \left(P\left(\gamma\left(t\right)\right) x'\left(t\right) + Q\left(\gamma\left(t\right)\right) y'\left(t\right) \right) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(P\left(\widetilde{\gamma}\left(s\right)\right) x'\left(\tau\left(s\right)\right) + Q\left(\widetilde{\gamma}\left(s\right)\right) y'\left(\tau\left(s\right)\right) \right) \tau'\left(s\right) ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(P\left(\widetilde{\gamma}\left(s\right)\right) \widetilde{x}'\left(s\right) + Q\left(\widetilde{\gamma}\left(s\right)\right) \widetilde{y}'\left(s\right) \right) ds \\ &= \int_{\widetilde{\gamma}} P dx + Q dy, \end{split}$$

wobei we benutzt haben. dass

$$\widetilde{x}'(s) = x'(\tau(s))\tau'(s)$$
 und $\widetilde{y}'(s) = y'(\tau(s))\tau'(s)$.

Definition. Angenommen, dass $|\gamma|$ den Ursprung 0 nicht enthält, definieren wir

$$A_0(\gamma) := \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_a^b \frac{x(t) y'(t) - y(t) x'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt.$$
 (15.85)

Stellen wir γ in Polarkoordinaten (r, θ) dar:

$$\gamma\left(t\right) = \left(r\left(t\right), \theta\left(t\right)\right)$$

wobei r(t) und $\theta(t)$ erfüllen sollen

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t). \tag{15.86}$$

Die Funktion

$$r\left(t\right) = \sqrt{x\left(t\right)^{2} + y\left(t\right)^{2}}$$

ist automatisch stetig differenzierbar, wobei der Polarwinkel $\theta(t)$ von (15.86) nur bis zur additiven Konstante $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, definiert ist.

Lemma 15.22 Liegt $|\gamma|$ in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ so gibt es einen stetig differenzierbaren Polarwinkel $\theta(t)$ auf [a,b], der mit dem Polarradius

$$r\left(t\right) = \sqrt{x\left(t\right)^{2} + y^{2}\left(t\right)}$$

die Identitäten (15.86) erfüllt. Für dieses $\theta(t)$ gilt

$$A_0(\gamma) = \theta(b) - \theta(a). \tag{15.87}$$

Somit ist $A_0(\gamma)$ gleich den Winkel zwischen den Vektoren $\gamma(b)$ und $\gamma(a)$.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall wenn $|\gamma|$ in der Halbebene $H_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ liegt. Für jedes $(x,y) \in H_+$ setzen wir

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
 und $\theta(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$,

so dass r und θ als Funktionen von $(x,y) \in H_+$ stetig differenzierbar sind. Da $\tan \theta = \frac{y}{r}$ und $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ so folgt es dass $\cos \theta > 0$ und

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

und

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{y}{r}.$$

Somit ist das Paar (r, θ) die Polarkoordinaten von $(x, y) \in H_+$, und (r, θ) ist von (x, y) stetig differenzierbar abhängig.

Somit können wir jede Kurve γ mit $|\gamma| \subset H_+$ in Polarkoordinaten darstellen:

$$\gamma(t) = (r(x(t), y(t)), \theta(x(t), y(t))), \quad t \in [a, b],$$

und $\theta(x(t), y(t))$ stetig differenzierbar ist.

Das Gleiche gilt falls $|\gamma| \subset H_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$. In diesem Fall setzen wir

$$\theta(x,y) = \pi + \arctan \frac{y}{x}$$

so dass $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$, $\cos \theta < 0$ und somit

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}.$$

Analog definiert man $\theta(t)$ als eine stetig differenzierbare Funktion für jede Kurve γ die in der Halbebene $\{y > 0\}$ oder $\{y < 0\}$ liegt.

Für beliebige Kurve γ mit $|\gamma| \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt es ein ε so dass $|\gamma(t)| > \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$. Sei $\{t_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung des Intervalls [a,b] so dass für jedes k=0,...,n-2 gilt

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| < \varepsilon/2$$
 für alle $t, s \in [t_k, t_{k+2}]$.

Bezeichnen wir mit γ_k die Kurve γ auf dem Intervall $[t_k, t_{k+2}]$. Dann liegt $|\gamma_k|$ in einer Halbebene. In der Tat, liegt $\gamma_k(t_k) = (x(t_k), y(t_k))$ in einer Viertelebene V, z.B. in

$$V = \{(x, y) : x, y \ge 0\}.$$

Da $\|\gamma_k(t_k)\| > \varepsilon$, so gilt entweder $x(t_k) > \varepsilon/2$ oder $y(t_k) > \varepsilon/2$. Sei $x(t_k) > \varepsilon/2$. Es folgt, dass für alle $t \in [t_k, t_{k+2}]$ gilt

$$|x(t) - x(t_k)| < \varepsilon/2$$

woraus folgt x(t) > 0. Somit liegt $|\gamma_k|$ im H_+ .

Somit gibt es einen stetig differenzierbaren Polarwinkel $\theta_k(t)$ für jede Kurve γ_k . Auf jedem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ mit $k \geq 1$ gibt es zwei Polarwinkeln $\theta_{k-1}(t)$ und $\theta_k(t)$. Für die Differenz davon gilt

$$\theta_k(t) - \theta_{k-1}(t) = 2\pi n_k$$
 für jedes $t \in [t_k, t_{k+1}]$

für ein $n_k \in \mathbb{Z}$. Die Zahl n_k ist von $t \in [t_k, t_{k+1}]$ unabhängig da die Differenz $\theta_k(t) - \theta_{k-1}(t)$ eine stetige Funktion auf $[t_k, t_{k+1}]$ ist.

Jetzt definieren wir die Funktion $\theta(t)$ auf [a,b] wie folgt: für jedes k=0,...,n-1

$$\theta(t) = \theta_k(t) - 2\pi(n_1 + \dots + n_k)$$
 für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Dann ist $\theta(t)$ der Polarwinkel von $\gamma_k(t)$ und somit der Polarwinkel von $\gamma(t)$ für jedes $t \in [a, b]$.

Beweisen wir, dass die Funktion θ auf [a, b] stetig differenzierbar ist. Es folgt, dass auf $[t_k, t_{k+1}]$ gilt

$$\theta(t) = (\theta_{k-1}(t) + 2\pi n_k) - 2\pi (n_1 + \dots + n_k)$$

= $\theta_{k-1}(t) - 2\pi (n_1 + \dots + n_{k-1}).$

Somit gilt die Identität

$$\theta(t) = \theta_{k-1}(t) - 2\pi (n_1 + ... + n_{k-1})$$

auf dem Intervall $[t_{k-1}, t_{k+1}] = [t_{k-1}, t_k] \cup [t_k, t_{k+1}]$. Da θ auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ stetig differenzierbar ist, so folgt es dass θ auch auf [a, b] stetig differenzierbar ist.

Für r(t) und $\theta(t)$ wie oberhalb gilt

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}, \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\sin\theta}{r}$$

$$x' = r'\cos\theta - (r\sin\theta)\theta', \quad y' = r'\sin\theta + (r\cos\theta)\theta'$$

und

$$\frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r} \left(r' \sin \theta + (r \cos \theta) \theta' \right) - \frac{\sin \theta}{r} \left(r' \cos \theta - (r \sin \theta) \theta' \right)$$
$$= \left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \theta' = \theta'.$$

Somit erhalten wir aus (15.85)

$$A_{0}(\gamma) = \int_{a}^{b} \theta' dt = \theta(b) - \theta(a),$$

was zu beweisen war.

Sei jetzt $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ geschlossen ist, d.h. $\gamma(a)=\gamma(b)$. Dann gilt r(a)=r(b) und

$$\theta\left(b\right) = \theta\left(a\right) + 2\pi n$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass

$$A_0(\gamma) = 2\pi n.$$

Definition. Die ganze Zahl n heißt die Windungszahl (auch Index genannt) der geschlossenen Kurve γ bezüglich 0 und wird mit $\operatorname{ind}_0 \gamma$ bezeichnet. In anderen Wörtern, gilt

$$\operatorname{ind}_{0} \gamma := \frac{1}{2\pi} A_{0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^{2} + y^{2}},$$
 (15.88)

vorausgesetzt, dass $0 \notin |\gamma|$.

Beispiel. Sei $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi n]$, die *n*-fach Kreislinie von Radius r, wobei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\operatorname{ind}_{0} \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi n} \frac{(r \cos t) (r \sin t)' - r \sin t (r \cos t)'}{(r \cos t)^{2} + (r \sin t)^{2}} dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi n} \frac{r^{2} (\cos^{2} t + \sin^{2} t)}{r^{2} (\cos^{2} t + \sin^{2} t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi n} dt = n.$$

Beispiel. Nehmen wir an, dass das Bild $|\gamma|$ in einer von vier Halbebenen von \mathbb{R}^2 liegt, und beweisen, dass

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = 0.$$

Wie im Beweis von Lemma 15.22, der Polarwinkel θ in der Halbebene ist eine Funktion von (x,y). Da

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b)),$$

so folgt es aus (15.87), dass

$$\operatorname{ind}_{0} \gamma = \theta \left(x \left(b \right), y \left(b \right) \right) - \theta \left(x \left(a \right), y \left(a \right) \right) = 0,$$

Beispiel. Betrachten wir die Kreislinie

$$\gamma_r(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t), \ t \in [0, 2\pi],$$

mit dem Mittelpunkt (a, b) wobei $0 < r < \sqrt{a^2 + b^2}$. Dann $0 \notin |\gamma_r|$ und gilt

$$\begin{split} \operatorname{ind_0} \gamma_r &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(a + r \cos t \right) \left(b + r \sin t \right)' - \left(b + r \sin t \right) \left(a + r \cos t \right)'}{\left(a + r \cos t \right)^2 + \left(b + r \sin t \right)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a r \cos t + b r \sin t + r^2}{a^2 + b^2 + 2 a r \cos t + 2 b r \sin t + r^2} dt. \end{split}$$

Der Integrand ist eine stetige Funktion bezüglich $(r,t) \in (0,\sqrt{a^2+b^2}) \times [0,2\pi]$, woraus folgt, dass auch ind $_0 \gamma_r$ stetig bezüglich r ist. Da ind $_0 \gamma_r$ ganze Zahl ist, so

ist ind
0 γ_r eine Konstante und von runabhängig ist. Da für
 $r\to 0$ das Integral offensichtlich 0 konvergiert, so erhalten wir

$$\operatorname{ind}_0 \gamma_r = 0$$

für alle $r < \sqrt{a^2 + b^2}$. Alternativ kann man bemerken, dass für kleine Werten von r liegt $|\gamma_r|$ in einer Halbebene, so dass ind₀ $\gamma_r = 0$ nach dem obigen Beispiel gilt.

Setzen wir b = 0 und a = 1. Dann für alle 0 < r < 1 erhalten wir die folgende nicht-triviale Identität

 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t + r}{\cos t + \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r}\right)} dt = 0.$

Definition. Für eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve γ und für beliebigen Punkt $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$ definieren wir den Index ind $_w \gamma$ mit

$$\operatorname{ind}_{w} \gamma = \operatorname{ind}_{0} (\gamma - w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{(x - w_{x}) dy - (y - w_{y}) dx}{(x - w_{x})^{2} + (y - w_{y})^{2}}.$$
 (15.89)

Der folgende Satz 15.23 ist eine 2-dimensionale Version von dem Zwischenwertsatz aus Analysis 1. Umformulieren wir zunächst dem Zwischenwertsatz wie folgt. Für jedes Paar $\{\alpha, \beta\}$ von reellen Zahlen und jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$ setzen wir

$$\operatorname{ind}_{c} \{\alpha, \beta\} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \alpha < c < \beta \\ -1, \text{ falls } \beta < c < \alpha, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ergibt der Zwischenwertsatz folgendes. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt für ein $c\in\mathbb{R}\setminus\{f(a),f(b)\}$

$$\operatorname{ind}_{c} \{ f(a), f(b) \} \neq 0,$$

so liegt c im f([a,b]).

Hauptsatz 15.23 Sei $f: D \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung von der abgeschlossen Kreisscheibe $D \subset \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^2 . Sei γ die parametrisierte Kreislinie ∂D . Gilt für einen Punkt $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |f \circ \gamma|$

$$\operatorname{ind}_{w} f \circ \gamma \neq 0$$
,

so liegt w im f(D).

Für jedes $w \in |f \circ \gamma|$ gilt offensichtlich $w \in f(D)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass w = 0 (sonst bezeichnen wir f - w wieder mit f). Sei

$$D = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : ||z|| \le R \right\}.$$

Betrachten wir eine Familie von parametrisierten Kreislinien

$$\gamma_r(t) = (r\cos t, r\sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei $r \in [0,R]$ als der Parameter der Familie betrachtet wird. Betrachten wir die Kurve \widetilde{y}

$$\widetilde{\gamma}_r = f \circ \gamma_r.$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass 0 nicht im f(D) liegt. Dann $0 \notin |\widetilde{\gamma}_r|$ für jedes $r \in [0, R]$ so dass ind0 $\widetilde{\gamma}$ für alle r definiert ist. Wir haben

$$\operatorname{ind}_{0} \widetilde{\gamma}_{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{\widetilde{\gamma}_{r}} \frac{xdy - ydx}{x^{2} + y^{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{\widetilde{x}_{r}\left(t\right) \widetilde{y}_{r}'\left(t\right) - \widetilde{y}_{r}\left(t\right) \widetilde{x}_{r}'\left(t\right)}{\widetilde{x}_{r}\left(t\right)^{2} + \widetilde{y}_{r}\left(t\right)^{2}} dt$$

wobei

$$\widetilde{\gamma}_{r}\left(t\right)=\left(\widetilde{x}_{r}\left(t\right),\widetilde{y}_{r}\left(t\right)\right).$$

Sei f = (P, Q). Dann

$$\widetilde{\gamma}_r = f \circ \gamma_r = (P(r\cos t, r\sin t), Q(r\cos t, r\sin t)).$$

Wir sehen, dass die Funktionen

$$\widetilde{x}_r(t) = P(r\cos t, r\sin t)$$
 und $\widetilde{y}_r(t) = Q(r\cos t, r\sin t)$

stetig differenzierbar in $(r,t) \in [0,R] \times [0,2\pi]$ sind, woraus folgt, dass der Integrand

$$\frac{\widetilde{x}_r(t)\widetilde{y}_r'(t) - \widetilde{y}_r(t)\widetilde{x}_r'(t)}{\widetilde{x}_r(t)^2 + \widetilde{y}_r(t)^2}$$

stetig in $(r,t) \in [0,R] \times [0,2\pi]$ ist. Es folgt aus dem Satz 15.19, dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ stetig in $r \in [0,R]$ ist. Da die Zahl $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ ganz ist, so folgt es daraus, dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ eine Konstante in $r \in [0,R]$ ist.

Andererseits bemerken wir, dass für r=0 ist $|\gamma_0|$ ein Punkt 0 und somit ist $|\widetilde{\gamma}_0|$ ein Punkt f(0). Es folgt, dass

$$\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_0 = 0$$

und somit ind $_0 \widetilde{\gamma}_r = 0$ für alle $r \in [0, R]$. Insbesondere gilt auch

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_R = 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Jetzt geben wir noch einen (dritten) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Hauptsatz 15.24 Jedes Polynom f(z) über \mathbb{C} von dem Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Betrachten wir die Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ wobei R groß genug ist. Sei γ die folgende Parametrisierung der Kreislinie ∂D :

$$\gamma(t) = R(\cos t + i\sin t).$$

Um zu beweisen, dass f(z) = 0 für ein z gilt, reicht es zu zeigen, dass $0 \in f(D)$, was nach dem Satz 15.23 der Fall ist, falls

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma \neq 0.$$

Sei $f(z) = z^n + g(z)$ wobei g(z) ein Polynom des Grades $\leq n - 1$ ist. Wählen wir R so groß, dass

$$\sup_{\{z:|z|=R\}} |g(z)| \le \frac{1}{2} R^n. \tag{15.90}$$

Betrachten wir eine Familie von Kurven

$$\gamma_{\lambda}(t) = \gamma(t)^{n} + \lambda g(\gamma(t))$$

wobei $\lambda \in [0, 1]$. Insbesondere ist $\gamma_0(t) = \gamma(t)^n$ eine *n*-fach Kreislinie und $\gamma_1(t) = f(\gamma(t))$.

Es folgt aus (15.90), dass $|\gamma_{\lambda}|$ den Ursprung 0 nicht enthält. Da

$$\gamma_0(t) = R^n \left(\cos nt + i\sin nt\right),\,$$

so erhalten wir

$$\operatorname{ind}_0 \gamma_0 = n.$$

Es folgt aus (15.88) nach dem Satz 15.19, dass der Index ind₀ γ_{λ} eine stetige Funktion von λ ist. Somit ist ind₀ γ_{λ} eine Konstante als Funktion von λ . Daraus folgt, dass

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \gamma_1 = \operatorname{ind}_0 \gamma_0 = n$$

und somit ind₀ $f \circ \gamma \neq 0$, was zu beweisen war.

Hauptsatz 15.25 (Fixpunktsatz von Brouwer) Sei $f: D \to D$ eine stetige Selbstabbildung von der abgeschlossen Kreisscheibe D in \mathbb{R}^2 . Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. einen Punkt $z \in D$ mit f(z) = z.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz im Fall wenn f stetig differenzierbar ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass f keinen Fixpunkt hat, d.h. $f(z) \neq z$ für alle $z \in D$. Dann gibt es eine eindeutige Gerade durch f(z) und z. Betrachten wir den Halbgerade

$$G = \{tz + (1 - t) g(z) : t \ge 0\}$$

die an f(z) anfängt und durch z geht. Sei g(z) der Punkt von Durchschnitt von ∂D mit G. Dann erhalten wir eine stetig differenzierbare Abbildung $g:D\to\partial D$. Bemerken auch, dass für $z\in\partial D$ gilt g(z)=z.

Sei γ die standarte Parametrisierung der Kreislinie ∂D . Da $g\circ\gamma=\gamma,$ so folgt es. dass

$$\operatorname{ind}_0 q \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \gamma = 1.$$

Nach dem Satz 15.23 beschließen wir, dass $0 \in g(D)$ was unmöglich ist, da $g(D) = \partial D$ und $0 \notin \partial D$.

Satz 15.26 (a) Der Index $\operatorname{ind}_w \gamma$ ist eine stetige Funktion von $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$.

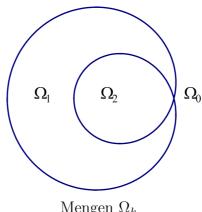
(b) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist sie Menge

$$\Omega_k = \{ w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma| : \operatorname{ind}_w \gamma = k \}.$$

offen und

$$\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma. \tag{15.91}$$

(c) Die Menge Ω_0 ist unbeschränkt während Ω_k für $k \neq 0$ ist immer beschränkt.



Mengen Ω_k

Beweis. (a) Das folgt aus (15.89).

(b) Da ind_w γ nur die ganzen Werte annimmt, so gilt

$$\Omega_k = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma| : \operatorname{ind}_w \gamma \in (k - 1/2, k + 1/2) \right\}.$$

Da das Intervall (k-1/2, k+1/2) offen ist und die Funktion $w \mapsto \operatorname{ind}_w \gamma$ stetig, so ist Ω_k offen. Die Identität (15.91) folgt nach der Definition von Ω_k .

(c) Ist w weit genug von $|\gamma|$ so liegt $|\gamma|$ in einer Halbebene bezüglich w, woraus folgt, dass ind_w $\gamma = 0$. Somit enthält Ω_0 alle w die weit genug von $|\gamma|$ liegen, woraus die beiden Aussagen folgen.

Die folgenden zwei Sätze geben wir ohne Beweis an.

Hauptsatz 15.27 (Satz von Jordan) Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Dann in der Folge $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ gibt es nur zwei nicht-leere Mengen: Ω_0 und Ω_i wobei entweder i = 1 oder i = -1. Darüber sind die Mangen Ω_0 und Ω_i zusammenhängend und es gilt

$$\partial\Omega_0=\partial\Omega_i=\gamma.$$

Die Menge Ω_i heißt das *Innere* von γ , Ω_0 heißt das *Äußere* von γ .

Satz 15.28 Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Sei Ω das Innere von γ . Der Flächeninhalt von Ω ist gleich

$$F(\Omega) = \int_{\gamma} y dx = -\int_{\gamma} x dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (y dx - x dy).$$

Jetzt benutzen wir die komplexwertige Notation für eine parametrisierte geschlossene Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Setzen wir

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Dann gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

236

und

$$dz = dx + idu$$

so dass

$$\frac{dz}{z} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + i\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Bemerken wir, dass

$$\int_{\gamma} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \left[\frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2 \right) \right]_{a}^{b} = \ln \| \gamma(b) \| - \ln \| \gamma(a) \| = 0.$$

Somit erhalten wir, dass

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Für beliebigen Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ gilt

$$\operatorname{ind}_{w} \gamma = \operatorname{ind}_{0} (\gamma - w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w}.$$

Chapter 16

* Flächen in \mathbb{R}^n

Es gibt die folgenden zwei Wege um einen Unterraum von \mathbb{R}^n zu bestimmen. Für jede lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist das Bild

$$im A = \{Au : u \in \mathbb{R}^m\}$$

ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Man sagt, dass der Unterraum S = im A durch die parametrische Gleichung v = Au gegeben wird, was bedeutet, dass jeder Punkt $x \in S$ sich als x = Au mit $u \in \mathbb{R}^m$ darstellen lässt. Der Punkt u heißt Parameter. Wir haben

$$\dim S = \dim \operatorname{im} A = \operatorname{rg} A$$
,

da die linear unabhängigen Spalten von A eine Basis in im A liefern und der Rang rg A gleich die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen) der Matrix A ist.

Für jede lineare Abbildung $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist der Kern

$$\ker B = \{ x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0 \}$$

ein Unterraum von \mathbb{R}^n . Man sagt, dass der Unterraum $S = \ker B$ durch die Gleichung Bx = 0 gegeben wird. Nach dem Rangsatz gilt

$$\dim S = \dim \ker B = n - \operatorname{rg} B.$$

Es ist leicht zu sehen, dass jeder Unterraum von \mathbb{R}^n sich in den beiden Formen darstellen lässt: sowohl parametrisch wie als Kern.

16.1 Parametrische Gleichung einer Fläche

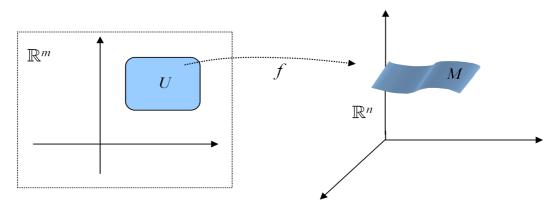
Seien M eine Teilmenge von \mathbb{R}^n und m eine ganze Zahl zwischen 1 und n.

Definition. Die Menge M heißt m-dimensionale Fläche falls es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $f: U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

- 1. M = f(U);
- 2. f ist injektiv;

- 3. f ist stetig differenzierbar;
- 4. f' ist nichtsingulär, d.h. $\operatorname{rg} f'(u) = m$ für alle $u \in U$.

Das Paar (U, f) heißt Parametrisierung von M. Das Dreifache (M, U, f) heißt parametrisierte Fläche. Die parametrisierte Fläche gehört zur Klasse C^l falls $f \in C^l$.



m-dimensionale parametrisierte Fläche (M, U, f)

Wir bezeichnen die Punkte in U mit u und nennen u Parameter. Nach Definition gilt für jeden Punkt $x \in M$ die eindeutige Darstellung x = f(u) mit $u \in U$. Man sagt auch, dass M mit der parametrischen Gleichung x = f(u) gegeben wird. Die Komponenten $u_1, ..., u_m$ von dem Parameter u heißen die lokalen Koordinaten von x. In ausführlicher Form sieht die parametrische Gleichung wie folgt aus:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1, ..., u_m) \\ ... \\ x_n = f_n(u_1, ..., u_m). \end{cases}$$

Die Ableitung $f' = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ ist eine $n \times m$ Matrix (die Jacobi-Matrix) und die Bedingung rg f'(x) = m bedeutet, dass der Rang von f'(u) an jeder Stelle $u \in U$ maximal ist.

Im Fall m = 1 nehmen wir an, dass U ein offenes Intervall ist. Die 1-dimensionale parametrisierte Fläche (M, U, f) ist offensichtlich eine parametrisierte Kurve.

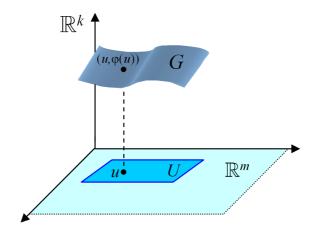
Beispiel. (m-dimensionale Ebene) Sei $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung oder, was äquivalent ist, eine $n \times m$ Matrix. Angenommen, dass $m \leq n$ und $\operatorname{rg} A = m$, wir erhalten, dass A eine Parametrisierung von im A ist. Somit ist der Unterraum im A von \mathbb{R}^n eine m-dimensionale Fläche.

Betrachten wir jetzt eine affine Abbildung $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ d.h. f(u) = Au + b wobei A eine Matrix wie oberhalb ist und $b \in \mathbb{R}^n$. Da f' = A und somit rg f' = m, so ist die Menge $M = f(\mathbb{R}^m)$ eine m-dimensionale Fläche. Offensichtlich ist M das Bild des Unterraums im A unter Translation $x \mapsto x + b$, d.h. M eine m-dimensionale Ebene ist.

Beispiel. (Graphen) Seien U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m und $\varphi:U\to\mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir den Graph von φ

$$G = \{(u, \varphi(u)) \in \mathbb{R}^n : u \in U\}, \qquad (16.1)$$

wobei das Paar $(u, \varphi(u))$ ein Element von \mathbb{R}^n mit n = m + k ist.



Der Graph G der Funktion φ

Lemma 16.1 Der Graph G ist eine m-dimensionale Fläche.

Beweis. Es folgt aus (16.1), dass G = f(U) wobei die Abbildung $f: U \to \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert wird:

$$f(u) = (u, \varphi(u)).$$

Die Abbildung f ist offensichtlich injektiv und stetig differenzierbar. Es gilt

$$f'(u) = \left(\begin{array}{c} \operatorname{id} \\ \varphi'(u) \end{array}\right), \tag{16.2}$$

wobei id die identische $m \times m$ Matrix ist und $\varphi'(u)$ eine $k \times m$ Matrix. Da die ersten m Zeilen der Matrix f'(u) linear unabhängig sind, so erhalten wir rg f'(u) = m. Somit ist (G, U, f) eine Parametrisierung und G ist eine m-dimensionale Fläche.

Der nächste Satz wird ohne Beweis angegeben.

Satz. Jede m-dimensionale Fläche ist lokal der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion.

Im Beweis dieses Satzes wird der Satz von der impliziten Funktion benutzt und die Bedingung, dass die Parametrisierung der Fläche nichtsingulär sein soll, spielt eine wichtige Role. Dafür betrachten wir ein Beispiel.

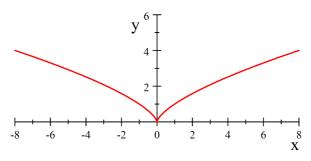
Beispiel. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$f(u) = (u^3, u^2)$$

erfüllt die Bedingungen 1-3 von der Definition der Parametrisierung, aber die Bedingung 4 gilt nicht im Punkt u=0 da

$$f'(0) = (3u^2, 2u)|_{u=0} = (0, 0)$$

und somit rg f'(0) = 0 < 1. Das Bild von f ist eine Kurve und sogar der Graph der Funktion $y = x^{2/3}$, aber diese Funktion ist in 0 nicht differenzierbar.



Die Kurve $f(u) = (u^3, u^2)$ ist der Graph der Funktion $y = x^{2/3}$

16.2 Tangentialebene

Definition. Seien U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m und $f:U\to\mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Die *Tangentialabbildung* von f im Punkt $u\in U$ ist die folgende affine Abbildung

$$\tau: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\tau(h) = f(u) + f'(u) h.$$
(16.3)

In anderen Wörtern ist $\tau(h)$ das Taylor-Polynom der Ordnung 1 der Funktion f in u. Nach der Differenzierbarkeit von f gilt

$$f(u + h) = f(u) + f'(u)h + o(||h||) = \tau(h) + o(||h||)$$

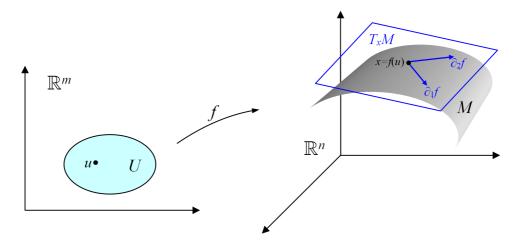
für $h \to 0$, so dass $\tau(h)$ eine affine Approximation von f(u+h) für die kleinen Werte von ||h|| ist.

Definition. Sei (M, U, f) eine m-dimensionale parametrisierte Fläche in \mathbb{R}^n . Die Tangentialebene T_xM an M im Punkt $x = f(u) \in M$ ist das Bild der Tangentialabbildung τ von f im Punkt u.

Es folgt aus (16.3), dass

$$T_x M = \operatorname{im} \tau = x + \operatorname{im} f'(u)$$
.

Da rg f'(u) = m, so ist $T_x M$ eine m-dimensionale Ebene und (\mathbb{R}^n, τ) ist die Parametrisierung von $T_x M$. Die Ebene $T_x M$ ist eine "gute" Approximation der Fläche M in der Nähe von x.



Tangentialebene T_xM

In Anwendungen ist es bequem die parametrische Gleichung (16.3) wie folgt darstellen:

$$\tau(h) = f(u) + h_1 \partial_1 f(u) + h_2 \partial_2 f(u) + \dots + h_m \partial_m f(u),$$

wobei $h_1, ..., h_m$ die Komponenten von h sind und $\partial_1 f, ..., \partial_m f$ die Spalten von der Matrix f' sind, die eine Basis in im f'(u) liefern.

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung des Kreises

$$f: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

 $f(u) = (\cos u, \sin u)$

Da $f'(u) = (-\sin u, \cos u)$, so ist die Tangente (=1-dimensionale Tangentialebene)

$$\tau(h) = (\cos u, \sin u) + h(-\sin u, \cos u)$$
$$= (\cos u - h\sin u, \sin u + h\cos u).$$

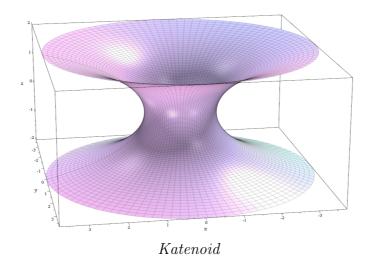
Die Richtung $(-\sin u, \cos u)$ der Tangente ist offensichtlich orthogonal zum Radiusvektor $(\cos u, \sin u)$.

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung

$$f : U \to \mathbb{R}^3$$

$$f(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

wobei $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$. Die Fläche M = im f heißt Katenoid.



Berechnen wir die Ableitung:

$$f' = (\partial_u f, \partial_v f) = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \sinh u \sin v & \cosh u \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus folgt rg f'=2. Die Tangentialabbildung von f im Punkt (u,v) ist

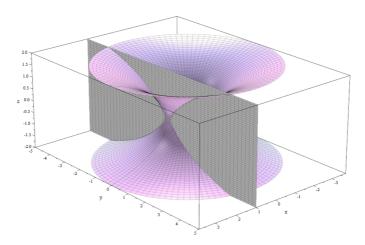
$$\tau(h) = f(u,v) + h_1 \partial_u f + h_2 \partial_v f$$

= $f(u,v) + h_1 \left(\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1\right) + h_2 \left(-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0\right).$

Zum Beispiel für u=v=0 haben wir $x=f\left(0,0\right)=\left(1,0,0\right)$ und

$$\tau(h) = (1,0,0) + h_1(0,0,1) + h_2(0,1,0).$$

Die Tangentialebene $T_xM=\operatorname{im} \tau$ geht durch (1,0,0) und wird von den Vektoren (0,0,1) und (0,1,0) erzeugt.



Katenoid und Tangentialebene

16.3 Implizite Flächen

Satz 16.2 Seien Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $F:\Omega\to\mathbb{R}^k$, k< n, eine stetig differenzierbare Funktion. Gilt $\operatorname{rg} F'(p)=k$ in einem Punkt $p\in\Omega$, so existiert eine offene Menge W mit $p\in W\subset\Omega$ so dass die Null-Niveaumenge

$$M = \{x \in W : F(x) = 0\}$$

eine (n-k)-dimensionale Fläche ist.

Darüber hinaus gilt für jedes $x \in M$

$$T_x M = x + \ker F'(x). \tag{16.4}$$

Die von der Gleichung F(x) = 0 gegebene Menge heißt implizite Fläche. Der Satz 16.2 besagt, dass jede implizite Fläche in der Nähe von jedem Punkt p mit nichtsingulärem F'(p) eine Fläche ist.

Es folgt aus (16.4), dass $X \in T_xM$ äquivalent zu $X - x \in \ker F'(x)$ ist, d.h. zu

$$F'(x)(X - x) = 0.$$

Das ist die Gleichung der Tangentialebene T_xM .

Beweis. Setzen wir m = n - k. Die Matrix F'(x) hat k Zeilen und n Spalten. Da rg F'(p) = k, so existieren k linear unabhängige Spalten von F'(p). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die letzten k Spalten, d.h. die Spalten m + 1, ..., n linear unabhängig sind. Setzen wir x = (u, v) wobei

$$u = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \text{ and } v = (x_{m+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^k$$

und schreiben die Gleichung F(x) = 0 in der Form F(u, v) = 0. Da

$$F'(p) = (\partial_u F(p) \mid \partial_v F(p))$$

und die Matrix $\partial_v F(p)$ aus den letzten k Spalten von der Matrix F'(p) besteht, so erhalten wir nach der Voraussetzung, dass $\partial_v F(p)$ invertierbar ist.

Nach dem Satz von der impliziten Funktion existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V \subset \Omega$ und eine C^1 -Funktion $\varphi : U \to V$ mit

$$F(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = \varphi(u) \text{ für alle } u \in U \text{ und } v \in V.$$
 (16.5)

Setzen wir $W = U \times V$ und bemerken, dass die Menge

$$M = \{x \in W : F(x) = 0\}$$

= \{(u, v) \in U \times V : F(u, v) = 0\}
= \{(u, v) \in U \times V : v = \varphi(u)\}

der Graph der Funktion $v=\varphi\left(u\right)$ in U ist. Nach Lemma 16.1 ist M eine m-dimensionale Fläche.

Diese Fläche hat die Parametrisierung x = f(u), wobei $f(u) = (u, \varphi(u))$. Die Tangentialebene an M im Punkt x = f(u) ist

$$T_x M = x + \operatorname{im} f'(u).$$

Es bleibt zu beweisen, dass

$$\operatorname{im} f'(u) = \ker F'(x)$$
.

Nach (16.5) gilt $F(u, \varphi(u)) = 0$ für alle $u \in U$, was äquivalent zu $F \circ f = 0$. Ableiten von dieser Identität ergibt

$$F'(x) f'(u) = 0,$$

woraus folgt

$$\operatorname{im} f'(u) \subset \ker F'(x)$$
. (16.6)

Da $\operatorname{rg} F'(x) = k$ in der Nähe von p, so erhalten wir nach dem Rangsatz

$$\dim \ker F'(x) = n - \operatorname{rg} F'(x) = n - k = m.$$

Andererseits nach dem Beweis von Lemma 16.1 gilt

$$\dim \operatorname{im} f'(u) = \operatorname{rg} f'(u) = m.$$

Somit haben die Unterräume ker F'(x) und im f'(u) die gleiche Dimensionen, woraus folgt, dass sie übereinstimmen.

Beispiel. Betrachten wir die Gleichung $x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$, die die Einheitssphäre bezüglich der 2-Norm bestimmt. Die Sphäre ist die Null-Niveaumenge der Funktion $F(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 - 1$. Wir haben

$$F'(x) = (\partial_1 F, ..., \partial_n F) = 2(x_1, ..., x_n)$$

woraus die Gleichung der Tangentialebene folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (X_i - x_i) = 0.$$

Insbesondere sehen wir, dass X - x orthogonal zu x ist.