Probeklausur Analysis 2, SS 2021
(keine Abgabe, nur für Selbstkontrolle)

Die Dauer der Klausur ist 120 Minuten.
Benutzung von Notizen, Büchern, Taschenrechnern, Handys usw. ist *nicht* erlaubt, aber man darf die Tabelle von Grundintegralen benutzen.
Jede Aufgabe beträgt 25 Punkte.
Die Note "1" $\Leftrightarrow$ mindestens 95 Punkte.
Die Note "4" (Bestanden) $\Leftrightarrow$ ca. 50 Punkte.

Aufgabe 1

8 Pkt (*a*) Geben Sie die Definition von Riemann-Integral an. Formulieren Sie ohne Beweis den Satz über hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit.

9 Pkt (*b*) Formulieren und beweisen Sie die Regel von partieller Integration für bestimmtes Integral.

8 Pkt (*c*) Mit Hilfe von partieller Integration bestimmen Sie die Integrale:

$$\text{(i)} \int_0^\pi e^x \cos x \, dx \qquad \text{(ii)} \int_0^e \sin(\ln x) \, dx$$

Aufgabe 2

8 Pkt (*a*) Beweisen Sie: der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall ist eine stetige Funktion.

9 Pkt (*b*) Formulieren und beweisen Sie Weierstraßsches Majorantenkriterium für Funktionenreihen.

8 Pkt (*c*) Beweisen Sie: die Reihe $\sum_{k=1}^\infty ke^{-kx}$ konvergiert lokal gleichmäßig im Intervall $(0, \infty)$. Beschließen Sie, dass ihre Summe

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty ke^{-kx}$$

eine stetige Funktion in $(0, \infty)$ ist. Bestimmen Sie

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x) \, dx.$$

Aufgabe 3

8 Pkt (*a*) Formulieren Sie ohne Beweis den Satz über Differenzierbarkeit einer Potenzreihe im Konvergenzintervall. Sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^k$$

konvergent in einem Intervall $(-R, R)$ mit $R > 0$. Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ gilt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Geben Sie Definition von Taylor-Reihe an.

$\boxed{\text{9 Pkt}}$ (*b*) Formulieren und beweisen Sie die Taylorformel mit Integralrestglied.

$\boxed{\text{8 Pkt}}$ (*c*) Beweisen Sie für alle $x \in (-1, 1)$ die Identität:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots .$$

Dafür verwenden Sie die Potenzreihe der Ableitung $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 4

$\boxed{\text{7 Pkt}}$ (*a*) Geben Sie Definitionen von einer Metrik und von einem metrischen Raum an. Definieren Sie den Begriff von Konvergenz von Folgen im metrischen Raum. Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Grenzwertes.

$\boxed{\text{9 Pkt}}$ (*b*) Geben Sie Definition von offenen und abgeschlossenen Mengen im metrischen Raum an. Formulieren und beweisen Sie die äquivalente Bedingung für Abgeschlossenheit mit Hilfe von Konvergenz von Folgen.

$\boxed{\text{9 Pkt}}$ (*c*) Geben Sie Definition von stetigen Abbildungen zwischen metrischen Räumen an. Formulieren und beweisen Sie die äquivalente Bedingung für Stetigkeit mit Hilfe von Urbildern der offenen und abgeschlossenen Mengen.

Aufgabe 5

$\boxed{\text{7 Pkt}}$ (*a*) Definieren Sie die Begriffe von einer Norm und von einem normierten Vektorraum. Geben Sie Definition von äquivalenten Normen an. Beweisen Sie, dass die Begriffe von Konvergenz bezüglich äquivalenter Normen übereinstimmen.

$\boxed{\text{9 Pkt}}$ (*b*) Sei S eine nichtleere Menge. Beweisen Sie: der Raum $B(S)$ von allen beschränkten reellwertigen Funktionen auf S mit der sup-Norm ist ein Banachraum.

$\boxed{\text{9 Pkt}}$ (*c*) Definieren Sie die p-Norm in $\mathbb{R}^n$ für alle $p \in [1, \infty]$. Formulieren Sie ohne Beweis die Hölder- und Minkowski-Ungleichungen. Beweisen Sie, dass alle p-Normen äquivalent sind. Beschließen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ mit der p-Norm ein Banachraum ist.