Analysis II

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

SS 2025

Zusammenfassung: Definitionen, Sätze, Lemmas, Korollars, Beispiele (ohne Beweise)

Contents

Chapter 8

Differentialrechnung (Fortsetzung)

Definition. Die Ableitung von f an einer Stelle $x \in J$ ist der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \tag{8.1}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert.

8.1 Berechnungsmethoden der Ableitung

Rechenregeln

Satz 8.1 Seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, die in einem $x \in J$ differenzierbar sind. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ auch in x differenzierbar (im Fall von f/g vorausgesetzt $g \neq 0$) und die folgenden Identitäten gelten an der Stelle x:

(a) *Summenregel:*

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'.} \tag{8.2}$$

(b) *Produktregel (* oder *Leibnizregel):*

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'.} \tag{8.3}$$

(c) *Quotientenregel:*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.} \tag{8.4}$$

Sind f und g in J differenzierbar so gelten diese Identitäten auch in J.

Kettenregel

Satz 8.2 *(Kettenregel)* Seien f eine Funktion auf einem Intervall A und g eine Funktion auf einem Intervall B, so dass die Verkettung $g \circ f$ definiert ist (d.h. $f(A) \subset B$). Sei f differenzierbar in einem $x \in A$ und g differenzierbar in $y = f(x) \in B$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x und es gilt

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(y) f'(x)} = g'(f(x)) f'(x). \tag{8.5}$$

Lemma 8.3 Sei f eine Funktion auf einem Intervall J die in einem $a \in J$ differenzierbar ist. Dann existiert eine Funktion $\Phi : J \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $f(x) - f(a) = \Phi(x)(x-a)$ für alle $x \in J$;

(ii) $\Phi(a) = f'(a)$

(iii) Φ ist stetig in a.

Ableitung der inversen Funktion

Satz 8.4 *(Ableitung der inversen Funktion)* Sei f eine stetige streng monotone Funktion auf einem Intervall J, so dass die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$ wohldefiniert ist *(Satz 6.9 aus A1)*. Nehmen wir an, dass f in einem $x \in J$ differenzierbar ist und dass $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}. \tag{8.6}$$

8.2 Sätze von Fermat, Rolle und Lagrange

Hauptsatz 8.5 *(Satz von Fermat)* Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall (a,b) und sei $x \in (a,b)$ eine Maximumstelle (bzw Minimumstelle) von f. Ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.

Korollar 8.6 Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a,b]$ mit $a < b$, die auf (a,b) differenzierbar ist. Ist x eine Maximum- oder Minimumstelle von f auf $[a,b]$, so gilt eine von drei Bedingungen:

1. entweder $x \in (a,b)$ und $f'(x) = 0$,
2. oder $x = a$,
3. oder $x = b$.

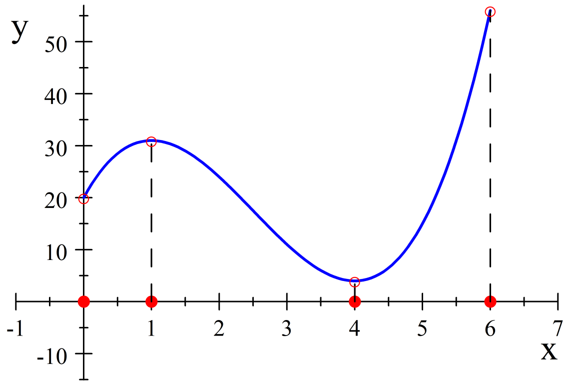
Definition. Definieren wir die *kritische* Menge von f wie folgt:

$$\boxed{K_f = \{x \in (a,b) : f'(x) = 0\} \cup \{a,b\}}.$$

Beispiel. Bestimmen wir das Maximum und Minimum der folgenden Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$$

auf dem Intervall $[0,6]$.



Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 20$ und die kritischen Stellen von f

Die Ableitung ist

$$f'(x) = \left(2x^3 - 15x^2 + 24x + 20\right)' = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4),$$

und sie hat zwei Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$. Somit erhalten wir die kritische Menge

$$K_f = \{0, 1, 4, 6\}.$$

Die Werte von f an den kritischen Stellen sind

$$f(0) = 20, \quad f(1) = 31, \quad f(4) = 4, \quad f(6) = 56.$$

Deshalb $\max_{[0,6]} f = 56$ wird an der Stelle $x = 6$ angenommen, und $\min_{[0,6]} f = 4$ wird an $x = 4$ angenommen.

Satz 8.7 *(Satz von Rolle)* Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Gilt $f(a) = f(b)$ so existiert eine Stelle $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

Hauptsatz 8.8 *(Mittelwertsatz von Lagrange)* Sei f eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{8.7}$$

8.3 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f'

Konstantentest

Satz 8.9 *(Konstantentest)* Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt $f = \text{const}$ auf J genau dann wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in J$.

Beispiel. Bestimmen wir alle Funktionen f mit $f'(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bemerken wir zunächst, dass die Funktion $g(x) = \frac{x^2}{2}$ die Gleichung $g' = x$ erfüllt. Es folgt, dass für beliebige Funktion f mit $f' = x$ gilt

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Somit lässt sich die Funktion $f(x)$ durch ihre Ableitung wiederherstellen.

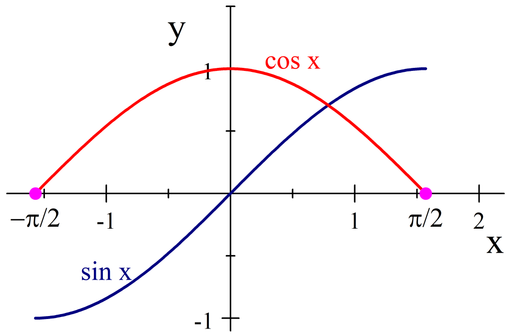
Monotonietest

Satz 8.10 *(Monotonietest)* Sei J ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ mit den Grenzen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Sei f eine stetige Funktion auf J, die auf (a,b) differenzierbar ist.

(a) Funktion f ist monoton steigend auf J genau dann wenn $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$.
Funktion f ist monoton fallend auf J genau dann wenn $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

(b) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton steigend auf J.
Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton fallend auf J.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ auf dem Intervall $J = [-\pi/2, \pi/2]$. Es gilt $f'(x) = \cos x > 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, woraus folgt, dass $\sin x$ streng monoton steigend auf $[-\pi/2, \pi/2]$ ist, was wir schon aus $A1$ wissen.

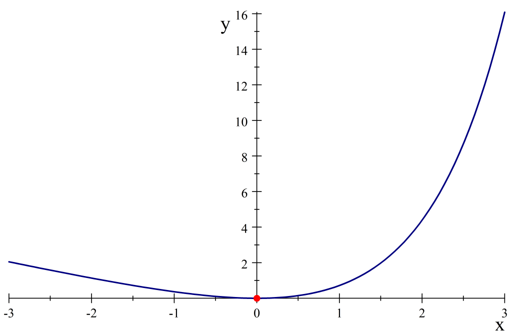


Die Graphen von $\cos x$ (blau) und $\sin x$ (rot) auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Beispiel. Untersuchen wir die Monotonieintervallen der Funktion $f(x) = e^x - 1 - x$ im Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$. Wir haben

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Da $f'(x) > 0$ für $x \in (0, \infty)$, so beschließen, dass $f(x)$ streng monoton steigend auf $[0, \infty)$ ist. Da $f'(x) < 0$ für $x \in (-\infty, 0)$, so ist $f(x)$ streng monotone fallend auf $(-\infty, 0]$.



Die Funktion $f(x) = e^x - 1 - x$

Folglich hat die Funktion $f(x)$ eine Minimumstelle an $x = 0$. Da $f(0) = 0$, so gilt die Ungleichung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Bestimmen wir die Minimumstelle der Funktion $f(x) = x^x$ im Definitionsbereich $(0, +\infty)$. Die logarithmische Ableitung dieser Funktion ist

$$(\ln x^x)' = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + 1.$$

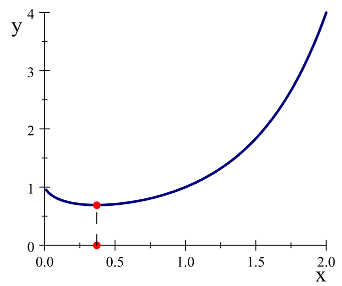
Da $f'(x) = (\ln f(x))' f(x)$, so erhalten wir

$$(x^x)' = (\ln x + 1) x^x.$$

Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet when $\ln x + 1 = 0$, d.h. when $\ln x = -1$ und somit $x = \frac{1}{e}$. Wir haben

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln x + 1) x^x \ > 0 \text{ für } x > \frac{1}{e}, \\ f'(x) &= (\ln x + 1) x^x < 0 \ \text{ für } x < \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Es folgt dass für $x > \frac{1}{e}$ die Funktion $f(x)$ streng monoton steigend ist, and für $x < \frac{1}{e}$ – streng monoton fallend.



Funktion $f(x) = x^x$

Folglich ist $x = \frac{1}{e} \approx 0.37$ die Minimumstelle von $f(x)$. Der minimale Wert von $f(x)$ ist

$$\min_{(0,+\infty)} f = f(\frac{1}{e}) = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} \approx 0.69.$$

Anwendung zur inversen Funktion

Satz 8.11 *(Satz von der inversen Funktion)* Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Nehmen wir an, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in J$ (bzw $f'(x) < 0$ für alle $x \in J$). Dann existiert die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$, f^{-1} ist differenzierbar auf I und es gilt für alle $y \in I$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{8.8}$$

wobei $x = f^{-1}(y)$.

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = e^x$ auf $J = (-\infty, +\infty)$ gilt $f'(x) = e^x > 0$. Somit existiert die inverse Funktion im Definitionsbereich $I = f(J) = (0, +\infty)$, die mit ln bezeichnet wird, und es gilt

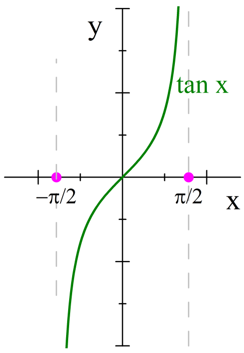
$$(\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

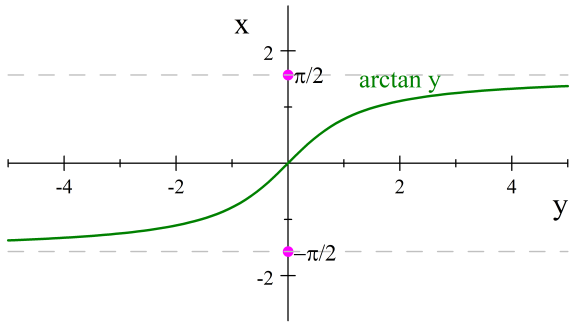
Beispiel. Für die Funktion $f(x) = \tan x$ auf $J = (-\pi/2, \pi/2)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0.$$

Somit existiert die inverse Funktion im Definitionsbereich $I = f(J) = (-\infty, +\infty)$, die mit arctan bezeichnet wird, und es gilt

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$





8.4 Vergleichstest und Ungleichungen

Satz 8.12 *(Vergleichstest)*

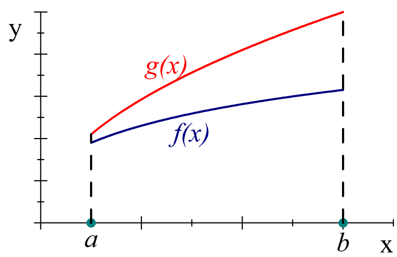
(a) Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b)$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Nehmen wir an, dass

(i) $f(a) \leq g(a)$

(ii) $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

Dann gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

Gilt $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt auch $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

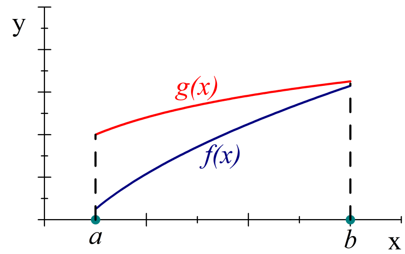


(b) Seien f und g zwei stetige Funktionen auf einem Intervall $(a, b]$, $a < b$, die auf (a, b) differenzierbar sind. Angenommen seien die Bedingungen:

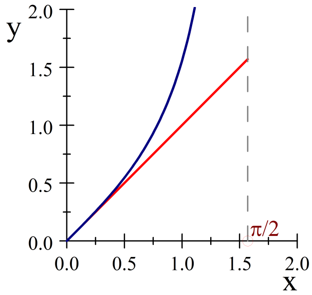
(i) $f(b) \le g(b)$
(ii) $f'(x) \ge g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

Dann gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

Gilt $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so gilt auch $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a,b)$.



Beispiel. Beweisen wir für alle $x \in [0, \pi/2)$ die Ungleichung $\tan x \ge x$. Da $x = \tan x$ für $x = 0$, so reicht es zu zeigen, dass $(\tan x)' \ge x'$ was der Fall ist da $(\tan x)' = 1+\tan^2 x \ge 1$.

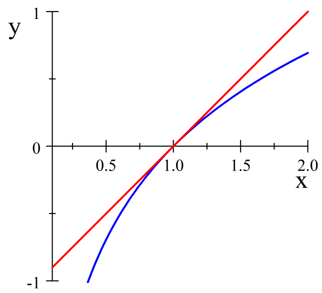


Die Graphen von Funktionen $\tan x$ (blau) und x (rot)

Beispiel. Beweisen wir die Ungleichung

$$\ln x \le x - 1 \quad \text{für alle } x > 0. \tag{8.9}$$

Die Graphen dieser beiden Funktionen werden auf dem folgenden Bild gezeigt:



Die Funktionen $\ln x$ (blau) und $x - 1$ (rot)

Für $x = 1$ sind die beiden Seiten von (8.9) gleich 0. Für $x \in (1, +\infty)$ haben wir

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} < 1 = (x-1)'.$$

Wir verwenden den Vergleichstest des Satzes 8.12(a) auf dem Interval $[1, +\infty)$ und beschließen, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x > 1$.

Für $x \in (0,1)$ haben wir

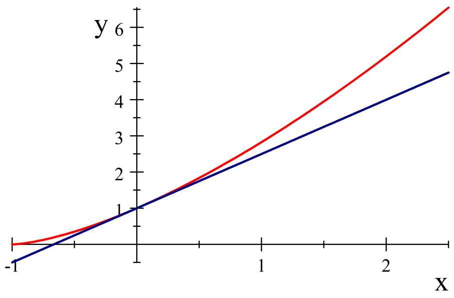
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 1 = (x-1)'.$$

Nach dem Vergleichstest des Satzes 8.12(b) auf dem Interval $(0,1]$ erhalten wir $\ln x < x-1$ für alle $x \in (0,1)$. Somit gilt (8.9) für alle $x > 0$.

Beispiel. Beweisen wir, dass für alle $a > 1$ und $x > -1$ gilt

$$(1+x)^a \geq 1 + ax. \tag{8.10}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der Bernoulli-Ungleichung, die für $a \in \mathbb{N}$ in $A1$ per Induktion nach a bewiesen wurde.



Die Graphen von Funktionen $(1+x)^{3/2}$ (rot) und $1 + \frac{3}{2}x$ (blue)

Für $x = 0$ sind die beiden Seiten von (8.10) gleich 1. Für $x \in (0, +\infty)$ gilt

$$((1+x)^a)' = a\,(1+x)^{a-1} > a = (1+ax)',$$

da $(1+x)^{a-1} > 1$, und für $x \in (-1,0)$ gilt

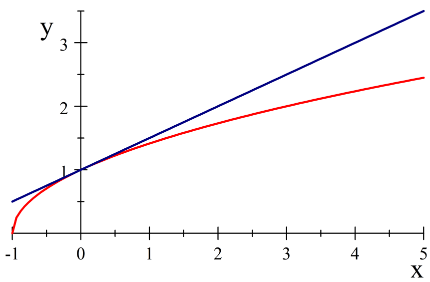
$$((1+x)^a)' = a\,(1+x)^{a-1} < a = (1+ax)',$$

da in diesem Fall $(1+x)^{a-1} < 1$. Nach dem Satz 8.12 beschließen wir, dass (8.10) für alle $x > -1$ gilt.

Analog beweist man, dass für alle $0 < a < 1$ und $x > -1$ die umgekehrte Ungleichung gilt:

$$(1+x)^a \leq 1 + ax$$

(Aufgabe 19).



Die Graphen von Funktionen $\sqrt{1+x}$ (rot) und $1 + \frac{1}{2}x$ (blue)

8.5 Unbestimmte Ausdrücke und Regel von L'Hôspital

Hauptsatz 8.13 *(Regel von L'Hôspital)* Seien f und g differenzierbare Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Angenommen sei, dass für ein $a \in \overline{J}$

(a) entweder

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0, \tag{8.11}$$

(b) oder

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty. \tag{8.12}$$

Nehmen wir an, dass $g \neq 0$ und $g' \neq 0$ auf $J \setminus \{a\}$ und dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \tag{8.13}$$

für ein $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b. \tag{8.14}$$

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$

Das ist unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$. Nach dem Satz 8.13 mit $J = (-1, 1)$ und $a = 0$ erhalten wir

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1/(1+x)}{\cos x} = 1. \tag{8.15}$$

Um rigorous zu sein, man soll die Gültigkeit der Gleichheiten in (8.15) rückwärts beweisen: da $\lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(\sin x)'}$ existiert und gleich 1 ist, so gilt nach dem Satz 8.13 auch

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1.$$

Diese Bemerkung gilt auch für alle Anwendungen von der Regel von L'Hôspital.

2. Die Regel von L'Hôspital gilt nur wenn $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck ist. Betrachten wir, zum Beispiel, $\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x}$, dass kein unbestimmter Ausdruck ist und offensichtlich gleich 1 ist. Andererseits gilt

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2)'}{(x)'} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

und somit

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x} \neq \lim_{x \to 1} \frac{(x^2)'}{(x)'}.$$

3. Bestimmen wir

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2},$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Versuchen wir die Regel von L'Hôspital mit $J = (0, +\infty)$ und $a = +\infty$ zu benutzen:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x}, \tag{8.16}$$

und erhalten, dass der Grenzwert in der rechten Seite wieder ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Verwenden wir noch einmal die Regel von L'Hôspital und erhalten

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty. \tag{8.17}$$

Somit erhalten wir nach zwei Anwendungen von der Regel von L'Hôspital, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Analog beweist man per Induktion nach n, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \tag{8.18}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das gleiche Ergebnis kann man auch mit Hilfe von der Exponentialreihe erhalten.

4. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to0} x \ln x$$

wobei die Funktion $f(x) = x \ln x$ im $J = (0, +\infty)$ definiert ist. Da $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0$, so bekommen wir einen unbestimmten Ausdruck der Form $0 \cdot \infty$. Um ihn zu lösen, stellen wir den Grenzwert in der Form von Quotient dar:

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln x}{1/x},$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ ist. Nach der Regel von L'Hôspital erhalten wir

$$\lim_{x\to0} x \ln x = \lim_{x\to0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to0} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = -\lim_{x\to0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to0} x = 0. \tag{8.19}$$

5. Bestimmen wir

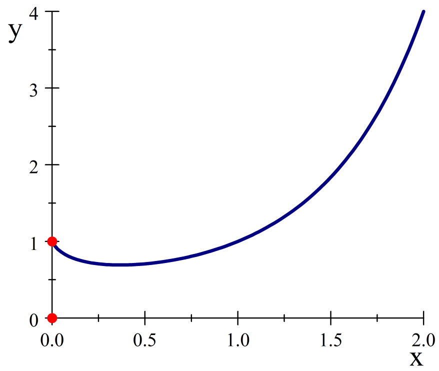
$$\lim_{x\to0} x^x,$$

wobei die Funktion $f(x) = x^x$ im $J = (0, +\infty)$ definiert ist. Das ist unbestimmter Ausdruck der Form 0^0. Um ihn zu lösen, betrachten wir den Logarithmus der Funktion x^x:

$$\lim_{x\to0} \ln x^x = \lim_{x\to0} x \ln x = 0,$$

wo wir (8.19) verwendet haben. Mit Substitution $y = x \ln x$ erhalten wir

$$\lim_{x\to0} x^x = \lim_{x\to0} e^{x \ln x} = \lim_{y\to0} e^y = 1.$$



Der Graph der Funktion x^x

6. Bestimmen wir

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

was ein unbestimmter Ausdruck der Form 1^∞ ist. Die Funktion $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ist im Intervall $J=(0,+\infty)$ definiert. Der Logarithmus ist

$$\ln f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

was unbestimmter Ausdruck der Form $\infty\cdot 0$ ist. Dann erhalten wir mit Hilfe von Substitution $y=\frac{1}{x}$ und der Regel von L'Hôspital

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{(\ln(1+y))'}{(y)'}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{1+y}}{1}=1.$$

Es folgt mit Hilfe von Substitution $z=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, dass

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{z\to1}e^z=e.$$

Zum Vergleich erinnern wir uns daran, dass $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Hauptsatz 8.14 *(Mittelwertsatz von Cauchy)* Seien f,g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$, $a<b$, die auf (a,b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $c\in(a,b)$ mit

$$g'(c)\,(f(b)-f(a))=f'(c)\,(g(b)-g(a)). \tag{8.20}$$

Beispiel. Bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right).$$

Es handelt sich hier um einen unbestimmten Ausdruck $\infty-\infty$. Wir formen diesen Ausdruck wie folgt um:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\right)=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

und wechseln die Variable $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Wir erhalten

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+y}-1}{y},$$

und das ist ein unbestimmter Ausdruck $\frac{0}{0}$. Mit Hilfe von l'Hôspital-Regel erhalten wir

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+y}-1\right)'}{y'} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+y}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Die Antwort ist

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

8.6 Landau-Symbol und Differential

Definition. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf einem Interval $J \subset \mathbb{R}$, und sei $a \in \overline{J}$. Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to a \tag{8.21}$$

wenn

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(vorausgesetzt $g(x) \neq 0$ in $J \setminus \{a\}$). Man sagt in diesem Fall: $f(x)$ ist klein o von $g(x)$, oder $f(x)$ ist vernachlässigbar klein gegenüber $g(x)$. Das Symbol o heißt das *Landau-Symbol*.

Behauptung. Ist f differenzierbar in $a \in J$, so gilt

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{für } x \to a. \tag{8.22}$$

Schreiben wir (8.22) wie folgt um:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + o(y-x) \quad \text{für } y \to x$$

und bezeichnen die Differenz $y-x$ mit dx. Man nennt die Differenz dx auch das *Differential* der Variable x. Man betrachten dx als eine neue Variable (anstatt y) während x fixiert ist. Es folgt, dass

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx + o(dx) \text{ für } dx \to 0. \tag{8.23}$$

Definition. Der Ausdruck $f'(x)\,dx$ in der rechten Seite von (8.23) heißt das *Differential* der Funktion f und wird auch mit $df(x)$ bezeichnet, so dass

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx.} \tag{8.24}$$

D.h. das Differential $df(x)$ der Funktion f ist eine lineare Funktion von dem Differential dx der Variable x, mit dem Koeffizient $f'(x)$.

Es folgt aus (8.24) dass
$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$
Der Ausdruck $\frac{df}{dx}$ wird häufig anstatt f' für Bezeichnung der Ableitung benutzt.

Nach (8.23) haben wir
$$f(x+dx) - f(x) = df(x) + o(dx),$$
so dass das Differential df eine Annäherung der Differenz der Funktion ist, nämlich ein *linearer Hauptteil* der Differenz.

Beispiel. Benutzen wir die oberhalb berechneten Ableitungen und erhalten aus (8.24)
$$\begin{aligned} dx^n &= nx^{n-1}dx \\ de^x &= e^x dx \\ d\sin x &= \cos x \; dx \\ d\cos x &= -\sin x \; dx. \end{aligned}$$

8.7 Zweite Ableitung und Taylorformel

Definition. Ist f' in $a \in J$ differenzierbar, so heißt f *2-fach* differenzierbar in a. Die Ableitung $(f')'(a)$ heißt die *zweite Ableitung* von f in a und wird mit $f''(a)$ bezeichnet, d.h.
$$f''(a) = (f')'(a).$$
Ist f 2-fach differenzierbar in jedem $a \in J$, so heißt f 2-fach differenzierbar in J.

Beispiel. Wir haben
$$\begin{aligned} (e^x)'' &= (e^x)' = e^x \\ (\sin x)'' &= (\cos x)' = -\sin x \\ (\cos x)'' &= -(\sin x)' = -\cos x \\ (\ln x)'' &= \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\ (x^a)'' &= \left(ax^{a-1}\right)' = a(a-1)x^{a-2}. \end{aligned}$$

Hauptsatz 8.15 *(Taylorformel 2er Ordnung mit Peano-Restglied)* Sei f differenzierbar in J und 2-fach differenzierbar in einem $a \in J$. Dann gilt die asymptotische Identität
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) \quad \text{für } x \to a. \tag{8.25}$$

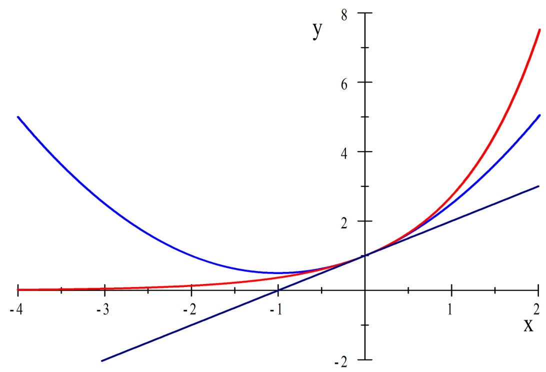
Definition. $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen Taylor-Polynome von f der Ordnung 1 bzw 2 im Punkt a.

Beispiel. Bemerken wir, dass der Graph von $T_1(x)$ die Tangente zum Graph G von f im Punkt $(a.f(a))$ ist. Der Graph von $T_2(x)$ ist eine Parabel (die *Schmiegparabel*), die eine bessere Approximation von G in der Nähe von a liefert als die Tangente.

Zum Beispiel, für die Funktion $f(x) = e^x$ im Punkt $a = 0$ erhalten wir $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ und somit

$$T_1(x) = 1 + x \quad \text{und} \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Die Funktion e^x, ihre Tangente $T_1(x)$ und ihre Schmiegparabel $T_2(x)$ sind hier gezeichnet:



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) und $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau) im Punkt 0.

Beispiel. Für $f(x) = \ln x$ auf $(0, +\infty)$ erhalten wir $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$ und somit

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) \text{ für } x \to a.$$

Für $a = 1$ und $x = 1,2$ erhalten wir

$$\ln 1,2 \approx \ln 1 + 0,2 - \frac{1}{2} \cdot 0,2^2 = 0,18$$

während $\ln 1,2 = 0,182\,321556\,793955...$

Hauptsatz 8.16 *(Taylorformel 2er Ordnung mit Lagrange-Restglied)* Sei f 2-fach differenzierbar auf einem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ so dass

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2. \tag{8.26}$$

Ersetzen wir b in (8.2) mit beliebigem $x \in [a,b]$ und erhalten

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 = T_1(x) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2, \tag{8.27}$$

für ein c zwischen x und a. Somit bekommen wir eine andere Darstellung des Restgliedes $R_1(x)$ wie folgt:

$$R_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2. \tag{8.28}$$

Diese Darstellung von $R_1(x)$ heißt *die Restgliedform nach Lagrange.*

Beispiel. Berechnen wir $\sqrt{1,1}$ mit Hilfe von (8.27). Für $f(x) = \sqrt{x}$ haben wir

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}.$$

Die Formel (8.27) mit $x = 1,1$ und $a = 1$ ergibt

$$\sqrt{1,1} = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 + R_1 = 1,05 + R_1,$$

wobei nach (8.28) für ein $1 < c < 1,1$ gilt

$$R_1 = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{c^{3/2}}0,1^2 = -0.001\,25\frac{1}{c^{3/2}}.$$

Da $\frac{1}{c^{3/2}} \leq 1$, so folgt es, dass $|R_1| \leq 0,00125$ so dass

$$\sqrt{1,1} \approx 1,05$$

mit dem Approximationsfehler $\leq 0,00125$. Eine genaue Berechnung ergibt $\sqrt{1,1} = 1,0488088...$ so dass der tatsächliche Approximationsfehler ist $\approx 0,001\,2$.

8.8 Lokale Extrema

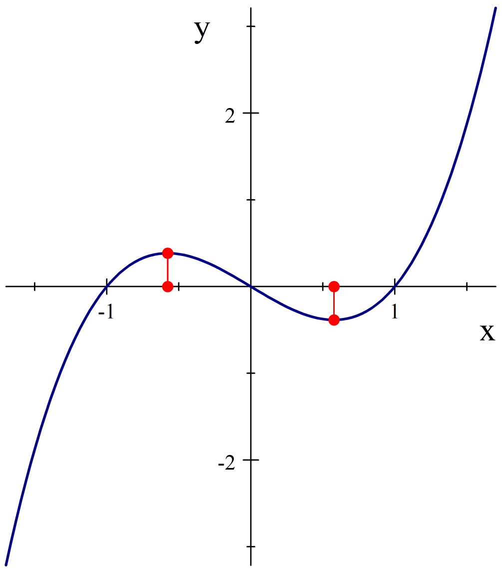
Definition. Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall J und sei $a \in J$. Man sagt, dass a eine *lokale Maximumstelle* von f ist wenn es eine Umgebung $U \subset J$ von a gibt, so dass a eine Maximumstelle von f in U ist.

Satz 8.17 Sei f eine Funktion auf einem offenen Intervall J.

(a) *(Notwendige Bedingung für locales Extremum)* Sei f differenzierbar auf J. Ist $a \in J$ eine lokale Extremumstelle von f, so gilt $f'(a) = 0$.

(b) *(Hinreichende Bedingung für locales Extremum)* Sei f 2-fach differenzierbar auf J. Sei $f'(a) = 0$ für ein $a \in J$. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f. Gilt $f''(a) < 0$, so ist a eine lokale Maximumstelle von f.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^3 - x$. Dann hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 1$ die Nullstellen $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Da $f''(x) = 6x$, so erhalten wir $f''(a_1) > 0$ und $f''(a_2) < 0$. Deshalb ist a_1 eine lokale Minimumstelle und a_2 – eine lokale Maximumstelle.



Die Funktion $f(x) = x^3 - x$ hat zwei lokale Extremumstellen a_1 und a_2

8.9 Konvexe und konkave Funktionen

Definition. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall J heißt *konvex* wenn für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t) f(a) + tf(b). \tag{8.29}$$

Die Funktion f heißt *konkav* auf J wenn für alle $a, b \in J$ und $t \in (0,1)$ gilt

$$f((1-t)a + tb) \geq (1-t) f(a) + tf(b). \tag{8.30}$$

Satz 8.18 *(Kriterium von Konvexität/Konkavität)* Sei f eine 2-fach differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$.

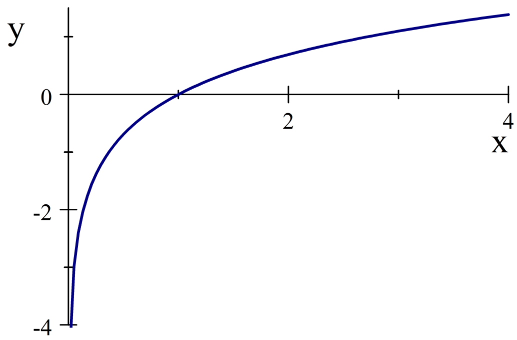
(a) Funktion f ist konvex auf J genau dann, wenn $f'' \geq 0$ auf J.

(b) Funktion f ist konkav auf J genau dann, wenn $f'' \leq 0$ auf J.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \ln x$ für $x \in (0, +\infty)$. Da

$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

so erhalten wir nach dem Satz 8.18, dass $\ln x$ konkav auf $(0, +\infty)$ ist.



Die Funktion $\ln x$ ist konkav

Nach (8.30) gilt die folgende Ungleichung

$$\ln\left(\left(1-t\right)a+tb\right)\geq\left(1-t\right)\ln a+t\ln b \tag{8.31}$$

für alle $a,b>0$ und $t\in(0,1)$. Bezeichnen wir

$$p=\frac{1}{1-t}\quad\text{und } q=\frac{1}{t},$$

so dass $p,q>1$ und

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{8.32}$$

Die Zahlen $p,q>1$ mit (8.32) heißen *konjugierte Hölder-Exponenten*. Es folgt aus (8.31), dass

$$\ln\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right)\geq\frac{1}{p}\ln a+\frac{1}{q}\ln b=\ln\left(a^{1/p}b^{1/q}\right). \tag{8.33}$$

Setzen wir $x=a^{1/p}$, $y=b^{1/q}$ und erhalten aus (8.33) die *Young-Ungleichung*

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy,$$

die für alle konjugierte Hölder-Exponenten p,q und alle $x,y>0$ (und auch für $x,y\geq0$) gilt.

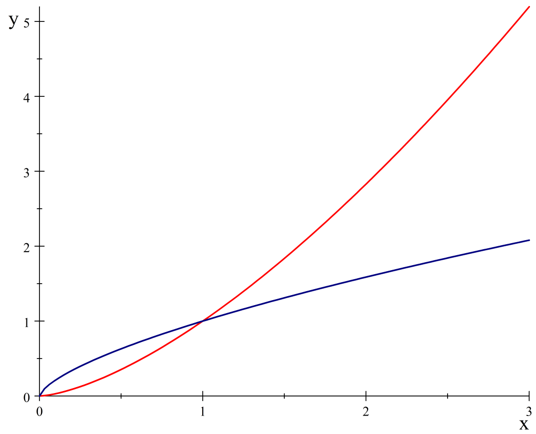
Beispiel. Sei $f\left(x\right)=x^p$ auf $J=(0,+\infty)$, wobei $p\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Da

$$f''\left(x\right)=p\left(p-1\right)x^{p-2},$$

so erhalten wir folgendes:

- für $0<p<1$ gilt $f''\left(x\right)<0$ für alle $x>0$;
- für $p<0$ oder $p>1$ gilt $f''\left(x\right)>0$ für alle $x>0$.

Somit ist die Funktion $f\left(x\right)=x^p$ konkav wenn $0<p<1$ und konvex wenn $p<0$ oder $p>1$.



Die konvexe Funktion $x^{3/2}$ (rot) und konkave Funktion $x^{2/3}$ (blau)

Es folgt, dass für $p > 1$ und alle $a, b > 0$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}, \tag{8.34}$$

d.h.

$$\frac{a+b}{2} \leq \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Das ist die Ungleichung vom arithmetischen Mittel und *Hölder-Mittel zur Stufe p*.

Für $p < 1$ gilt die umgekehrte Ungleichung

$$\frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}. \tag{8.35}$$

In der Tat, im Fall $0 < p < 1$ folgt (8.35) aus der Konkavität von x^p. Im Fall $p < 0$ gilt (8.34) nach der Konvexität von x^p, woraus (8.35) folgt, da $p < 0$.

Es ist interessant zu bemerken dass nach Aufgabe 24

$$\lim_{p \to 0} \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p} = \sqrt{ab}$$

so dass das geometrische Mittel sich betrachten lässt als das Hölder-Mittel zur Stufe 0. Die weitere Entwicklung von diesem Thema befindet sich in Aufgabe 37.

8.10 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von f' und f''

Definition. Eine Nullstelle $y \in (a, b)$ von f'' heißt *Wendestelle* von f wenn f'' in den Intervallen $(y - \varepsilon, y)$ und $(y, y + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ unterschiedliche Vorzeichen hat, d.h. in einem Intervall ist f'' positiv und im anderen Intervall ist f'' negativ.

Beispiel. Untersuchen wir die Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Schritt 1. Wir haben

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt $\ln x = 1$ und somit $x = e$. Deshalb haben wir

$$K_f = \{0, e, +\infty\}.$$

Schritt 2. Weiter haben wir

$$f(0) := \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$$

$$f(e) = \frac{1}{e} \approx 0,37,$$

$$f(+\infty) := \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Schritt 3. Für $x \in (0, e)$ gilt $f'(x) > 0$ und für $x \in (e, +\infty)$ gilt $f'(x) < 0$. Somit ist die Funktion $f(x)$ streng monoton steigend in $(0, e)$ und streng monoton fallend in $(e, +\infty)$.

Schritt 4. Wir haben

$$f'' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Insbesondere $f''(e) = \frac{2-3}{e^2} < 0$ so dass e eine lokale Maximumstelle ist. In der Tat ist e sogar die Maximumstelle von f auf $(0, +\infty)$, da $f(x)$ streng monoton steigend in $(0, e)$ und streng monoton fallend in $(e, +\infty)$ ist.

Schritt 5. Bestimmen wir die kritische Menge von f'. Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt

$$2\ln x - 3 = 0$$

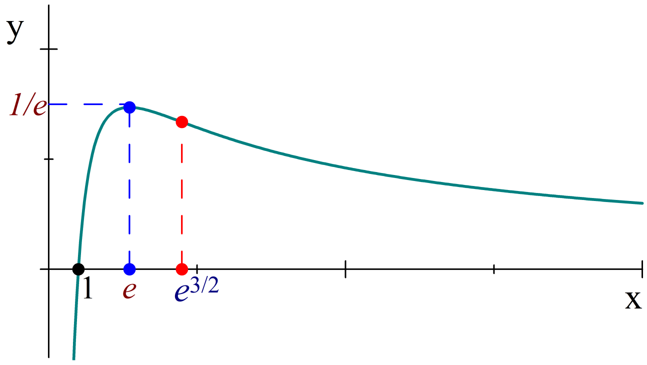
d.h. $x = e^{3/2} \approx 4,48$. Somit

$$K_{f'} = \left(0, e^{3/2}, +\infty\right).$$

Schritt 6. Im Intervall $\left(0, e^{3/2}\right)$ gilt $2\ln x < 3$ und $f''(x) < 0$; somit ist die Funktion f auf $\left(0, e^{3/2}\right)$ konkav. Im Intervall $\left(e^{3/2}, +\infty\right)$ gilt $f''(x) > 0$ und somit ist f konvex. Deshalb ist $e^{3/2}$ eine Wendestelle von f, und

$$f\left(e^{3/2}\right) = \frac{3}{2e^{3/2}} \approx 0,33.$$

Schritt 7. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sieht wie folgt aus:



Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ mit der Maximumstelle (blau) und Wendestelle (rot)

Beispiel. Untersuchen wir auf $(-\infty, +\infty)$ die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10.$$

Schritt 1. Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3).$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ ergibt zwei Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$, so dass die kritische Menge von f ist

$$K_f = \{-\infty, -2, 3, +\infty\}.$$

Schritt 2. Die Werte von f auf K_f sind

$$f(-\infty) = -\infty, \quad f(-2) = 54, \quad f(3) = -71, \quad f(+\infty) = +\infty.$$

Schritt 3. Das Vergleichen von Werten von f ergibt: f ist auf $(-\infty, -2)$ und $(3, +\infty)$ streng monoton steigend, und auf $(-2, 3)$ streng monoton fallend.

Schritt 4. Die zweite Ableitung ist

$$f'' = 12x - 6.$$

Da $f''(-2) < 0$ so ist -2 eine lokale Maximumstelle. Da $f''(3) > 0$ so ist 3 ist eine lokale Minimumstelle (was aus der Monotonie auch klar ist).

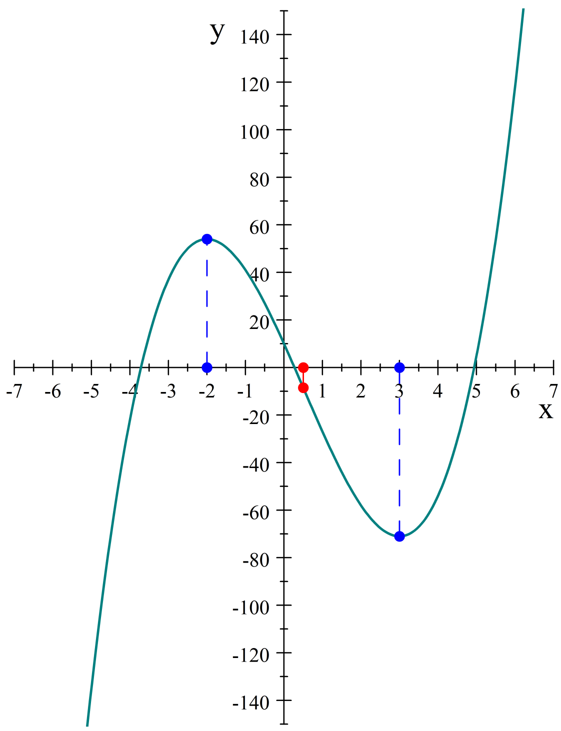
Schritt 5. Die Gleichung $f''(x) = 0$ ergibt $x = \frac{1}{2}$, so dass die kritische Menge von f' ist

$$K_{f'} = \{-\infty, \tfrac{1}{2}, +\infty\}.$$

Schritt 6. Auf dem Intervall $(-\infty, \frac{1}{2})$ gilt $f'' < 0$ so dass f konkav ist. Auf dem Intervall $(\frac{1}{2}, +\infty)$ gilt $f'' > 0$ so dass f konvex ist. Der Punkt $x = \frac{1}{2}$ ist somit eine Wendestelle, und

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -8,5.$$

Schritt 7. Somit erhalten wir den folgenden Graph.



Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10$, die lokalen Extrema (blau) und Wendestellen (rot)

8.11 Höhere Ableitungen

Definition. Sei f eine Funktion auf einem Intervall J. Die Ableitung $f^{(n)}$ der Ordnung $n \in \mathbb{Z}_+$ (=die n-te Ableitung) wird per Induktion nach n wie folgt definiert:

$$f^{(0)} = f \text{ und } f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \text{ für jedes } n \geq 1,$$

vorausgesetzt, dass $f^{(n-1)}$ auf J definiert und differenzierbar ist. In diesem Fall heißt f n-fach differenzierbar.

Definition. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt *unendlich oft* differenzierbar auf J, wenn f n-fach differenzierbar auf J für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. 1. Sei $f = e^x$. Dann $f' = e^x$ und per Induktion erhalten wir, dass

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist e^x unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

2. Sei $f = \sin x$. Dann

$$f' = \cos x,\ f'' = -\sin x,\ f''' = -\cos x,\ f^{IV} = \sin x,$$

woraus folgt

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 0 \bmod 4 \\ \cos x, & n = 1 \bmod 4 \\ -\sin x, & n = 2 \bmod 4 \\ -\cos x, & n = 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Insbesondere sind $\sin x$ und $\cos x$ unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

3. Sei $f(x) = x^a$ wobei $x \in (0, +\infty)$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann

$$f' = ax^{a-1}, \quad f'' = a(a-1)x^{a-2}, \quad f''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3},$$

usw. Per Induktion erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(x^a)^{(k)} = \underbrace{a(a-1)\dots(a-k+1)}_{k \text{ Glieder}} x^{a-k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\right)x^{a-k}.$$

Insbesondere ist x^a unendlich oft differenzierbar auf $(0, +\infty)$.

4. Sei $f(x) = x^n$ wobei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $k \leq n$

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Für $k = n$ erhalten wir

$$(x^n)^{(n)} = n! = \text{const},$$

woraus folgt, dass $(x^n)^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Insbesondere ist x^n unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Beispiel. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \tag{8.36}$$

mit reellen Koeffizienten c_k, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$ und $c_n \neq 0$. Die Zahl n heißt der Grad des Polynoms f und wird mit $\deg f$ bezeichnet. Ist $n \geq 1$ so gilt

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}.$$

Somit ist die Ableitung von f ein Polynom des Grades $n-1$.

Es folgt per Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = c_nn! = \text{const}$$

und $f^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Die Eigenschaft, dass $f^{(k)} \equiv 0$ für ein k, ist eine charakteristische Eigenschaft von Polynomen (siehe Aufgabe 36).

8.12 Taylorformel mit Peano-Restglied

Definition. Sei f n-fach differenzierbar auf einem Intervall J. Sei $a \in J$. Das Polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{8.37}$$

heißt *Taylor-Polynom* von f der Ordnung n an der Stelle a.

Hauptsatz 8.19 *(Taylorformel mit Peano-Restglied)* Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt es für jedes $a \in J$

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o\left((x-a)^n\right)} \quad \text{für } x \to a, \tag{8.38}$$

wobei T_n das Taylor-Polynom von f an der Stelle a ist.

Umgekehrt, gilt für ein Polynom

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n$$

die asymptotische Identität

$$f(x) = P(x) + o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a, \tag{8.39}$$

so gilt dann $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ für alle $k = 0, 1, ..., n$, d.h. $P(x) \equiv T_n(x)$.

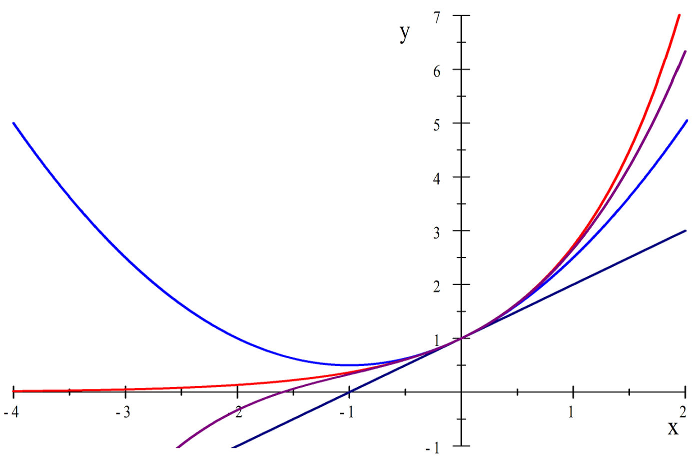
Beispiel. Sei $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(a) = e^a$ für alle n, so erhalten wir aus (8.37)

$$T_n(x; a) = e^a \left(1 + \frac{(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}\right).$$

Insbesondere für $a = 0$ erhalten wir

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!},$$

d.h. $T_n(x)$ ist die n-te Partialsumme der Exponentialreihe.



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau) und $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (lila)

Beispiel. Sei $f(x) = x^p$, wobei $x > 0$ und $p \in \mathbb{R}$. Das Taylor-Polynom an einer Stelle $a > 0$ ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} a^{p-k} (x-a)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} a^{p-k} (x-a)^k , \tag{8.40}$$

wobei

$$\binom{p}{k} := \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

eine Verallgemeinerung von Binomialkoeffizienten ist. Nach (8.38) gilt

$$x^p = T_n(x) + o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a.$$

Für $b = x - a$ erhalten wir aus (8.40)

$$\boxed{(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{n} a^{p-n} b^n + o(b^n)}, \tag{8.41}$$

für $b \to 0$. Im Fall $p = n$ stimmt (8.41) mit dem binomischen Lehrsatz überein (wobei das Restglied $o(b^n)$ verschwindet).

Insbesondere für $n = 1$ erhalten wir

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + o(b),$$

für $n = 2$

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} b^2 + o(b^2),$$

and für $n = 3$

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6} a^{p-3} b^3 + o(b^3). \tag{8.42}$$

Zum Beispiel, (8.42) ergibt für $p = 1/3$

$$(a+b)^{1/3} = a^{1/3} + \frac{1}{3} a^{-2/3} b + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(-\frac{2}{3}\right) a^{-5/3} b^2 + \frac{1}{6 \cdot 3} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{5}{3}\right) a^{-8/3} b^3 + o(b^3)$$
$$= a^{1/3} + \frac{1}{3} a^{-2/3} b - \frac{1}{9} a^{-5/3} b^2 + \frac{5}{81} a^{-8/3} b^3 + o(b^3). \tag{8.43}$$

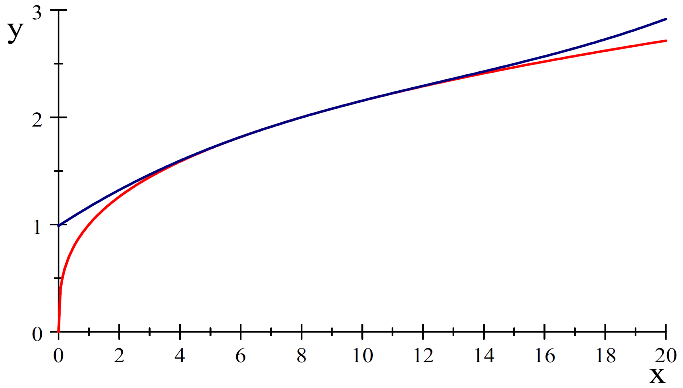
Berechnen wir mit Hilfe von (8.43) die Kubikwurzel aus 9. Für $a = 8$ und $b = 1$ erhalten wir

$$\sqrt[3]{9} = (8+1)^{1/3} \approx 8^{1/3} + \frac{1}{3} 8^{-2/3} - \frac{1}{9} 8^{-5/3} + \frac{5}{81} 8^{-8/3}$$
$$= 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{9 \cdot 2^5} + \frac{5}{81 \cdot 2^8}$$
$$= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20\,736} = 2,08010\ldots \tag{8.44}$$

In der Tat gilt es

$$\sqrt[3]{9} = 2,08008\ldots$$

so dass der Approximationsfehler von (8.44) ca. $0,00002$ ist.



Function $f(x) = x^{1/3}$ (rot) und ihres Taylor-Polynom an $a = 8$:

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2}(x-8) - \frac{1}{9 \cdot 2^5}(x-8)^2 + \frac{5}{81 \cdot 2^8}(x-8)^3 \text{ (blau)}$$

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome $T_{2n+1}(x)$ der Funktion $\sin x$ an der Stelle 0. Wir haben die folgende Reihe für $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Nach Aufgabe 45 gilt

$$T_{2n+1}(x) = S_{2n+1}(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Analog bestimmt man die Taylor-Polynome von $\cos x$. Alternativ kann man die Taylor-Polynome von $\cos x$ mit Hilfe der Identität

$$T'_{n,f}(x) = T_{n-1,f'}(x)$$

erhalten d.h. als die Ableitungen von Taylor-Polynomen von $\sin x$:

$$T_{2n,\cos}(x) = T'_{2n+1,\sin}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Es gelten die folgenden Taylorformeln:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)} \text{ für } x \to 0$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})} \text{ für } x \to 0$$

(siehe Aufgaben 43 und 46).

8.13 Taylorformel mit Lagrange-Restglied

Hauptsatz 8.20 *(Taylorformel mit Lagrange-Restglied)* Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann, für alle $a, x \in J$, $x \neq a$, gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{8.45}$$

für ein c zwischen a und x (d.h. $c \in (a,x)$ oder $c \in (x,a)$).

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ und ihre Taylor-Polynome an 0

$$T_4(x) = T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

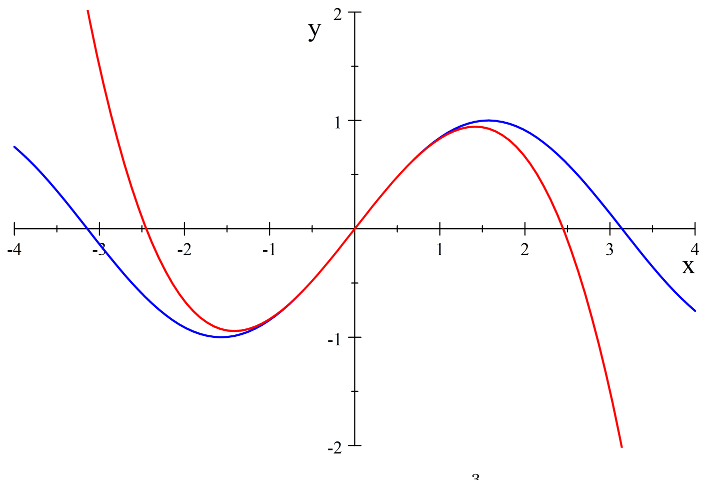
Nach dem Satz 8.20 gilt für alle $x \neq 0$

$$\sin x - T_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$$

für ein c zwischen 0 und x. Da $f^{(5)}(c) = \cos c$ und $|\cos c| \leq 1$, so erhalten wir die Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$|\sin x - T_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{120},$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.



Funktionen $\sin x$ (blau) und $T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ (rot) in der Nähe von 0

Zum Beispiel, für $x = 0,1$ erhalten wir

$$\sin 0,1 \approx T_4(0,1) = 0,1 - \frac{0,1^3}{6} = 0,0998333... ,$$

und der Approximationsfehler ist kleiner gleich

$$\frac{0,1^5}{120} < 10^{-7}.$$

Chapter 9

Integralrechnung: unbestimmtes Integral

9.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition. Gilt $F' = f$ auf einem Intervall J, so heißt die Funktion F eine *Stammfunktion* von f auf J.

Satz 9.1 *(Existenz von Stammfunktion)* Jede stetige Funktion auf einem Interval J hat eine Stammfunktion auf diesem Intervall.

Satz 9.2 *(Eindeutigkeit von Stammfunktion)* Ist F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall J, so hat jede Stammfunktion von f die Form $F(x) + C$, wobei C eine beliebige Konstante ist.

Definition. Die Menge von allen Stammfunktionen von $f(x)$ bezeichnet man mit

$$\int f(x)\, dx$$

("Integral von f von x dx"). Dieser Ausdruck heißt auch *unbestimmtes* Integral von f. Nach dem Satz 9.2 ist $\int f(x)\, dx$ eine Funktion plus beliebige Konstante.

9.2 Linearität des unbestimmten Integrals

Satz 9.3 Seien f und g zwei stetige Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt

$$\int (f+g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx. \tag{9.1}$$

Auch für beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gilt

$$\int a\, f\, dx = a \int f\, dx.$$

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$. Es gilt

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x},$$

und somit

$$\begin{aligned}\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx &= \int x^2 dx + 2\int x^{1/2} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{4x^{3/2}}{3} + \ln|x| + C.\end{aligned}$$

2. Bestimmen wir $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$. Da

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1},$$

wir erhalten

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = x - 2\arctan x + C.$$

3. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$. Bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x},$$

woraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C.$$

4, Bestimmen wir $\int \cos^2 x \, dx$. Dafür bemerken wir, dass

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C.\end{aligned} \tag{9.2}$$

Hier haben wir benutzt, dass $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ und somit

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

5. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Dann erhalten wir

$$\int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int c_k x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$
$$= C + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + ... + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Die unbestimmte Konstante C lässt sich bestimmen wenn die Stammfunktion noch eine Bedingung erfüllen muss. Z.B., bestimmen wir die Stammfunktion F des Polynoms f mit der zusätzlichen *Anfangsbedingung* $F(0) = a$, wobei a gegeben ist. Für die Funktion

$$F(x) = C + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + ... + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

gilt $F(0) = C$, woraus folgt, dass $C = a$ und somit

$$F(x) = a + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + ... + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

9.3 Partielle Integration

Satz 9.4 *Seien u, v zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem Intervall J. Dann gilt auf diesem Intervall die Identität*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{9.3}$$

Beispiel. 1. Bestimmen $\int \ln x\,dx$. Für $u = \ln x$ und $v = x$ haben wir

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x\,d\ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C,$$

so dass

$$\boxed{\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C}$$

2. Bestimmen $\int x^2 e^x dx$. Wir benutzen, dass $e^x dx = de^x$. Für $u = x^2$ und $v = e^x$ haben wir

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Um $\int x e^x dx$ zu bestimmen, wir benutzen den Satz 9.4 wieder, diesmal mit $u = x$ und $v = e^x$:

$$\int x e^x dx = \int x\,de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Somit erhalten wir

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

3. Bestimmen wir $\int e^x \cos x\, dx$. Mit Hilfe von partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x\, dx = \int \cos x\, de^x &= e^x \cos x - \int e^x d \cos x \\
&= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\
&= e^x \cos x + \int \sin x\, de^x \\
& e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x d \sin x \\
&= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

4. Bestimmen $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$. Für $u = \sqrt{x^2+1}$ und $v = x$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\, dx &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)\, dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\, dx + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass dasselbe Integral in den beiden Seiten erscheint. Lösen diese Gleichung bezüglich $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ ergibt

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2+1} + \tfrac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.}$$

Analog zeigt man, dass

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \tfrac{1}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C}$$

auf $(1, +\infty)$ und $(-\infty, -1)$ (siehe Aufgabe 55).

9.4 Substitutionsregel

Satz 9.5 *(Substitutionsregel für unbestimmtes Integral)* Sei f eine Funktion auf einem Intervall I und sei F eine Stammfunktion von f auf I, d.h.

$$\int f(y)\, dy = F(y) + C. \tag{9.4}$$

Sei u eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $u(J) \subset I$. Dann gilt auf J

$$\int f(u(x))\, du(x) = F(u(x)) + C. \tag{9.5}$$

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int (ax+b)^n\, dx$ wobei $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{R}$. Da

$$d(ax+b) = adx$$

und somit

$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b),$$

so erhalten wir mit der Substitution $y = ax + b$

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a} \int (ax+b)^n\, d(ax+b) = \frac{1}{a} \int y^n dy.$$

Da

$$\int y^n dy = \begin{cases} \dfrac{y^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1, \\ \ln|y| + C, & n = -1. \end{cases}$$

so erhalten wir

$$\int (ax+b)^n\, dx = \begin{cases} \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, & n \neq -1, \\ \dfrac{1}{a} \ln|ax+b| + C, & n = -1. \end{cases} \tag{9.6}$$

2. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{x^2+4}$. Wir haben

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+4} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{1}{4}x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{2d(\frac{1}{2}x)}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1} \qquad \text{(Substitution } \ y = \frac{1}{2}x) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2} \arctan y + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}x + C. \end{aligned} \tag{9.7}$$

3. Bestimmen wir $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$. Da

$$x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} d\left(1+x^2\right),$$

so haben wir

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Die Substitution $y = 1 + x^2$ ergibt

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln|y| + C = \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

4. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{\sin x}$. Mit der Substitution $y = \cos x$ erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{dy}{y^2-1} \tag{9.8}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C. \tag{9.9}$$

Um die Antwort weiter zu vereinfachen, benutzen wir die trigonometrische Identität[1]

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}, \tag{9.10}$$

was ergibt

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\tfrac{x}{2}\right| + C.}$$

Analog beweist man, dass

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos x} = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C}$$

(Aufgabe 62) und

$$\boxed{\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C}$$

(Aufgabe 56).

5. Bestimmen wir $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Da

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = -\frac{1}{2}d(1-x^2),$$

so erhalten wir mit Substitution $y = 1 - x^2$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}dy = -y^{1/2}+C = -\sqrt{1-x^2}+C. \tag{9.11}$$

6. Bestimmen wir $\int \arcsin x\, dx$. Wir verwenden zunächst partielle integration und danach (9.11):

$$\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int x\, d\arcsin x \qquad (u = \arcsin x,\ v = x)$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

[1] In der Tat gilt

$$2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x,$$

woraus folgt

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

Ersetzen x durch $x/2$ ergibt (9.10).

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Somit gilt es

$$\boxed{\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

Analog beweist man dass

$$\boxed{\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C}$$

und

$$\boxed{\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \tfrac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C}$$

(siehe Aufgabe 55).

Korollar 9.6 *(Inverse Substitution)* Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall J. Sei v eine differenzierbare streng monotone Funktion auf einem Intervall I mit $v(I) = J$, so dass die inverse Funktion $v^{-1} : J \to I$ existiert. Gilt auf I

$$\int f(v(y))\, dv(y) = G(y) + C \tag{9.12}$$

so gilt auf J

$$\int f(x)\, dx = G\left(v^{-1}(x)\right) + C. \tag{9.13}$$

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ im Definitionsbereich $x \in (0,1)$. Mit der inversen Substitution

$$\begin{aligned} x &= y^2, \quad y \in (0,1) \\ dx &= 2y dy \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int \frac{2y\, dy}{y\sqrt{1-y^2}} \\ &= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2 \arcsin y + C \\ &= 2 \arcsin \sqrt{x} + C, \end{aligned}$$

da $y = \sqrt{x}$.

2. Bestimmen wir $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ im Definitionsbereich $x \in [-1,1]$. Dafür verwenden wir die inverse Substitution

$$\begin{aligned} x &= \sin y, \qquad y \in [-\pi/2, \pi/2] \\ dx &= \cos y\, dy. \end{aligned}$$

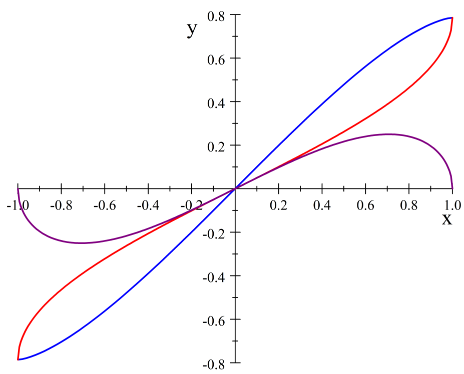
Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 y}\cos y\,dy \\ &= \int \cos y\ \cos y\,dy \qquad\qquad (\text{da } \cos y \geq 0) \\ &= \int \cos^2 y\ dy \qquad\qquad\qquad (\text{nach } (9.2)) \\ &= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin y\cos y + C \\ &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,\end{aligned}$$

da $y = \arcsin x$, $\sin y = x$ und $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Die Antwort ist

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C}. \tag{9.14}$$

Die Identität (9.14) gilt auf $[-1,1]$.



Funktionen $\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ (blau), $\frac{1}{2}\arcsin x$ (rot) und $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ (lila)

Es ist interessant, dass die einzelnen Funktionen $\arcsin x$ und $x\sqrt{1-x^2}$ nur auf $(-1,1)$ differenzierbar sind, aber ihre Summe ist auch an den Grenzen $x = \pm 1$ differenzierbar.

3. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

im Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$. Wir benutzen die Substitution $y = e^x$, d.h. die inverse Substitution

$$\begin{aligned}x &= \ln y, \quad y \in (0,+\infty), \\ dx &= \frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{e^x+1} &= \int \frac{dy}{y\,(y+1)} \\ &= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{d(y+1)}{y+1} \\
&= \ln y - \ln(y+1) + C \\
&= x - \ln(e^x + 1) + C.
\end{aligned}
$$

9.5 Integration von rationalen Funktionen

Beispiel. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^2-1}.$$

Das ist ein Grundintegral, aber trotzdem zeigen wir, wie man dieses Integral direkt berechnen kann. Es gilt die Identität

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

woraus folgt dass

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.
\end{aligned}
$$

Hier haben wir die Substitutionen $y = x-1$ und $y = x+1$ verwendet.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}dx.$$

Es gilt

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

und wir versuchen den Integrand wie folgt zerlegen:

$$\frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}, \tag{9.15}$$

wobei die Konstanten a, b noch unbekannt sind. Sie lassen sich wie folgt bestimmen.

Um a zu bestimmen, multiplizieren wir (9.15) mit $x-1$:

$$\frac{x+1}{x+2} = a + b\frac{x-1}{x+2},$$

dann setzen $x = 1$ ein und erhalten

$$a = \left.\frac{x+1}{x+2}\right|_{x=1} = \frac{2}{3}.$$

Um b zu bestimmen, multiplizieren wir (9.15) mit $x+2$:

$$\frac{x+1}{x-1} = a\frac{x+2}{x-1} + b,$$

dann setzen $x=-2$ ein und erhalten

$$b = \left.\frac{x+1}{x-1}\right|_{x=-2} = \frac{1}{3}.$$

Folglich erhalten wir

$$\int \frac{x+1}{x^2+x-2}dx = \int \frac{2/3}{x-1}dx + \int \frac{1/3}{x+2}dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$$

2. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Da die Diskriminante von x^2+2x+5 negative ist, so ist die Funktion $\frac{1}{x^2+2x+5}$ schon ein Partialbruch 2^{er} Art. Mit Hilfe von quadratischer Ergänzung erhalten wir

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4.$$

Somit ergibt die Substitution $y=x+1$, dass

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x+4} &= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \int \frac{dy}{y^2+4}\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}y + C \qquad \text{(siehe (9.7))}\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.\end{aligned}$$

3. Bestimmen wir

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}.$$

Die Funktion $\frac{x}{x^2+2x+5}$ ist auch ein Partialbruch 2^{er} Art. Wie oberhalb haben wir

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(x+1-1)\,d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \int \frac{(x+1)\,d(x+1)}{(x+1)^2+4} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}.$$

Das zweite Integral haben wir schon berechnet. Das erste Integral berechnen wir auch mit Hilfe von Substitution $y=x+1$:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)\,d(x+1)}{(x+1)^2+4} &= \int \frac{ydy}{y^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(y^2+4\right)}{y^2+4}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(y^2+4\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) + C.\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$$

4. Bestimmen wir

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x\,(x^2+1)}.$$

Für den Integrand bestimmen wir eine Partialbruchzerlegung in der Form:

$$\frac{x+1}{x\,(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2+1},$$

wobei a eine Konstante und $b = b(x)$ eine lineare Funktion ist. Um a zu bestimmen, multiplizieren wir diese Identität mit x:

$$\frac{x+1}{x^2+1} = a + \frac{bx}{x^2+1},$$

setzen $x = 0$ ein und erhalten $a = 1$. Die Funktion b erhalten wir wie folgt:

$$\frac{bx}{x^2+1} = \frac{x+1}{x^2+1} - 1 = \frac{x-x^2}{x^2+1} = \frac{x\,(1-x)}{x^2+1},$$

woraus folgt $b = 1 - x$. Somit erhalten wir

$$\frac{1}{x\,(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1}$$

und

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)dx}{x\,(x^2+1)} &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1-x)\,dx}{x^2+1} = \ln|x| + \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{x^2+1} \\ &= \ln|x| + \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.\end{aligned}$$

5. Bestimmen wir

$$\int \frac{x^4+x^3-1}{x^3-x}dx.$$

Zunächst dividieren wir durch $x^3 - x$ mit Rest wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{x^4+x^3-1}{x^3-x} &= \frac{x(x^3-x)+(x^3-x)+x^2+x-1}{x^3-x} \\ &= x+1+\frac{x^2+x-1}{x^3-x}\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x^3-1}{x^3-x}dx &= \int (x+1)\,dx + \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx.\end{aligned}$$

Weiterhin faktorisieren wir den Nenner

$$x^3 - x = x\,(x+1)\,(x-1)$$

und finden die Partialbruchzerlegung von $\frac{x^2+x-1}{x^3-x}$ wie folgt:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x} = \frac{x^2+x-1}{x\,(x+1)\,(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

Um a zu bestimmen, multiplizieren wir diese Identität mit x

$$\frac{x^2+x-1}{(x+1)\,(x-1)} = a + \left(\frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}\right) x,$$

setzen $x = 0$ ein und erhalten

$$a = \left.\frac{x^2+x-1}{(x+1)\,(x-1)}\right|_{x=0} = 1.$$

Analog bestimmen wir

$$b = -\frac{1}{2} \text{ und } c = \frac{1}{2}$$

so dass

$$\frac{x^2+x-1}{x\,(x+1)\,(x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\,(x+1)} + \frac{1}{2\,(x-1)}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

und

$$\int \frac{x^4+x^3-1}{x^3-x}dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

Chapter 10

Integralrechnung: bestimmtes Integral

10.1 Riemann-Integral

Definition. Eine *Zerlegung* von einem Intervall $[a, b]$ ist eine endliche streng monoton steigende Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$ und $x_n = b$, d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Wir bezeichnen eine Zerlegung mit Z, d.h. Z bezeichnet die ganze Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$.

Definition. Für jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit den Zwischenstellen ξ definieren wir die *Riemann-Summe* mit

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

wobei

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

die Differenz der Folge $\{x_k\}$ ist.

Definition. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ definieren wir die *Feinheit* von Z mit

$$\varphi(Z) = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}.$$

Definition. Wir schreiben

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} S(f, Z, \xi) = A$$

mit einem $A \in \mathbb{R}$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $\varphi(Z) < \delta$ und für jede Folge ξ von Zwischenstellen von Z gilt

$$|S(f, Z, \xi) - A| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

Kurz gesagt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall Z \ \text{ mit } \varphi(Z) < \delta \ \text{ und } \forall \xi \ \text{ gilt } \quad (10.1).$$

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf $[a, b]$ heißt *Riemann-integrierbar* wenn der Grenzwert

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} S(f, Z, \xi)$$

existiert. Der Wert des Grenzwertes heißt das Riemann-Integral (=bestimmtes Integral) von f und wird wie folgt bezeichnet:

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

d.h.

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\varphi(Z) \to 0} S(f, Z, \xi) = \lim_{\varphi(Z) \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \Delta x_k, \tag{10.2}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert.

Definition. Sei f eine nicht-negative Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$. Dann definieren wir den *Flächeninhalt* des Untergraphes U_f von f we folgt:

$$F(U_f) := \int_a^b f(x)\, dx.$$

Beispiel. 1. Sei $f(x) \equiv c$ eine Konstantefunktion. Dann gilt für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit Zwischenstellen ξ

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a),$$

woraus folgt, dass

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a). \tag{10.3}$$

Insbesondere ist f Riemann-integrierbar. Da der Untergraph von f der Rechteck $[a, b] \times [0, c]$ ist, so beschließen wir, dass der Flächeninhalt dieses Rechteckes gleich $c(b - a)$ ist, wie erwartet.

2. Sei f die *Dirichlet-Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{10.4}$$

Zeigen wir, dass f auf jedem Intervall $[a, b]$ nicht Riemann-integrierbar ist. Gegeben sei eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$, wählen wir alle Zwischenstellen ξ_k irrational. Dann gilt $f(\xi_k) = 0$ und somit

$$S(f, Z, \xi) = 0.$$

Andererseits, für dieselbe Zerlegung wählen wir jetzt die anderen Zwischenstellen ξ_k so dass alle ξ_k rational sind. Dann gilt $f(\xi_k) = 1$ und somit

$$S(f, Z, \xi) = b - a.$$

Wir sehen, dass $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi)$ nicht existiert.

Satz 10.1 *(Hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)*
(a) Jede stetige Funktion f auf $[a, b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.
(b) Jede monotone Funktion f auf $[a, b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.

10.2 Fundamentalsatz der Analysis, 1

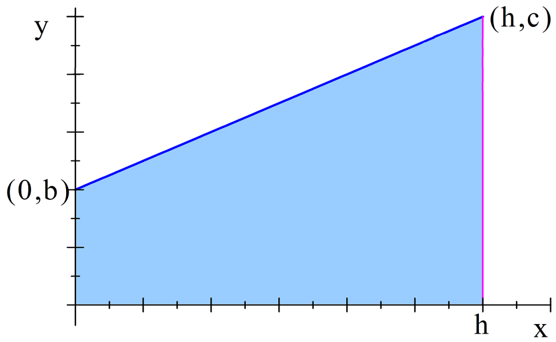
Hauptsatz 10.2 *(Fundamentalsatz der Analysis: Newton-Leibniz-Formel)* Sei $f(x)$ eine Riemann-integrierbare Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit $a < b$. Hat f auf $[a, b]$ eine Stammfunktion F, so gilt die Identität

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}. \tag{10.5}$$

Beispiel. 1. Betrachten wir die Funktion $f(x) = ax + b$ auf einem Intervall $[0, h]$ mit $h > 0$. Es gilt

$$\int_0^h (ax+b)\,dx = \left[\int (ax+b)\,dx\right]_0^h = \left[a\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = \frac{ah+2b}{2}h = \frac{b+c}{2}h,$$

wobei $c = ah + b = f(h)$. Der Graph der Funktion $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade zwischen den Punkten $(0, b)$ und (h, c).

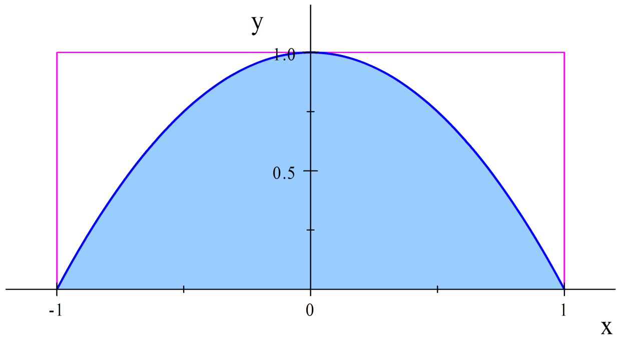


Im Fall $f \geq 0$ ist der Untergraph von f ein Trapez mit der Höhe h und den Grundseiten b and c. Somit erhalten wir: der Flächeninhalt von dem Trapez ist gleich $\frac{b+c}{2}h$.

2. Für die Funktion $f(x) = 1 - x^2$ erhalten wir

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx = \left[\int (1-x^2)\,dx\right]_{-1}^1 = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Flächeninhalt zwischen der Parabel $y = 1 - x^2$ und der Achse x gleich $4/3$ ist.

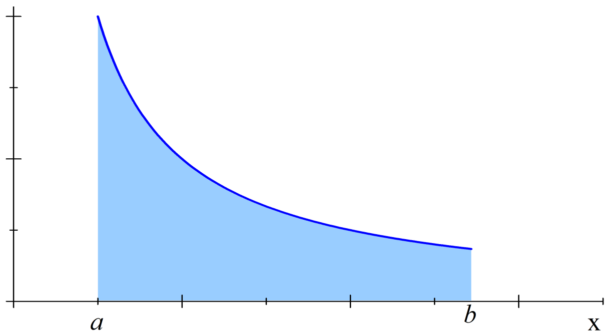


Insbesondere beträgt dieser Flächeninhalt genau $2/3$ von den Flächeninhalt von dem umgeschriebenen Rechteck $[-1, 1] \times [0, 1]$. Diese Regel von $\frac{2}{3}$ wurde erst von Archimedes entdeckt. Er konnte den Flächeninhalt unter der Parabel direkt als der Grenzwert von Riemann-Summen berechnen, ohne Newton-Leibniz-Formel zu wissen.

3. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle $0 < a < b$ erhalten wir

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_a^b = [\ln x]_a^b = \ln \frac{b}{a}. \tag{10.6}$$

Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel, und der Flächeninhalt unter der Hyperbel auf $[a, b]$ ist gleich $\ln \frac{b}{a}$.



Insbesondere gilt

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln e = 1.$$

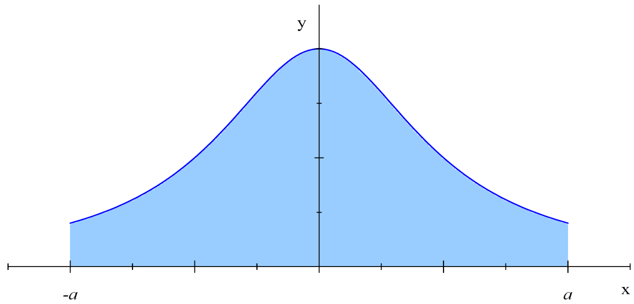
4. Die Existenz der Stammfunktion in (10.5) auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ ist wichtig. Hier ist ein Gegenbeispiel, wie man falsches Ergebnis erhält:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_{-1}^1 = [\ln |x|]_{-1}^1 = 0.$$

Warum ist diese Berechnung falsch? Die Stammfunktion $\ln |x|$ ist nicht auf dem ganzen Intervall $[-1, 1]$ definiert wie die Newton-Leibniz-Formel anfordert, sondern auf zwei disjunkten Intervallen $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$. Somit gilt diese Formel für $\int_a^b \frac{dx}{x}$ nur dann wenn entweder $[a, b] \subset (0, \infty)$ oder $[a, b] \subset (-\infty, 0)$.

5. Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ haben wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\int \frac{dx}{1+x^2}\right]_{-1}^{1} = [\arctan x]_{-1}^{1} = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$



Beispiel. Bestimmen wir den Flächeninhalt der Kreisscheibe von Radius 1:

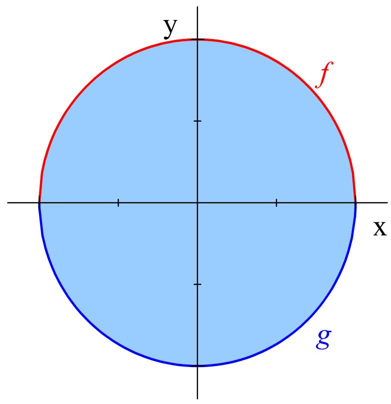
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

Wir haben

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\} = U_{f,g},$$

wobei

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = -\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$



Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F(K) &= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} g(x)dx \\ &= \left[\int \sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} - \left[-\int \sqrt{1-x^2}dx\right]_{-1}^{1} \\ &= 2\left[\int \sqrt{1-x^2}\,dx\right]_{-1}^{1} \end{aligned}$$

$$= \left[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \pi.$$

Genau so erhalten wir für die Kreisscheibe

$$K_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\right\}$$

von Radius $r > 0$ dass

$$F(K_r) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \pi r^2$$

da

$$\begin{aligned} 2\int \sqrt{r^2-x^2}dx &= 2r^2 \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} d\left(\frac{x}{r}\right) \\ &= r^2\left(\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x}{r}^2}\right) + C \\ &= r^2 \arcsin\frac{x}{r} + x\sqrt{r^2-x^2} + C. \end{aligned}$$

10.3 Linearität und partielle Integration

Satz 10.3 *(Linearität für bestimmtes Integral)* Sind die Funktionen f und g integrierbar auf einem Intervall $[a,b]$, so ist auch $f+g$ integrierbar und

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx. \tag{10.7}$$

Auch für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist cf integrierbar und

$$\int_a^b (cf)\,dx = c\int_a^b f dx. \tag{10.8}$$

Satz 10.4 *(Partielle Integration für bestimmtes Integral)* Für stetig differenzierbare Funktionen u, v auf einem Intervall $[a,b]$ gilt

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{10.9}$$

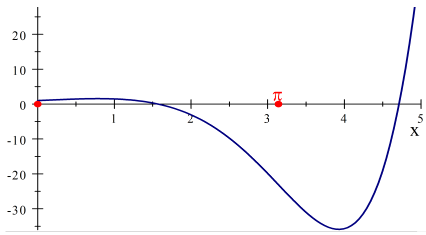
Beispiel. Bestimmen wir $\int_0^\pi e^x \cos x\,dx$. Da $e^x dx = de^x$, so erhalten wir nach (10.9) mit $u = \cos x$ und $v = e^x$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \cos x\,dx &= \int_0^\pi \cos x\,de^x \\ &= [e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x d\cos x \\ &= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx \end{aligned}$$

$$= -\left(e^{\pi}+1\right) + \int_0^{\pi} \sin x \, de^x$$
$$= -\left(e^{\pi}+1\right) + \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx,$$

woraus folgt

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx = -\frac{e^{\pi}+1}{2}.$$



Funktion $e^x \cos x$

Definition. Im Fall $a > b$ setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$$

und im Fall $a = b$ setzen wir

$$\int_a^a f((x)dx := 0.$$

Behauptung. Die Newton-Leibniz-Formel bleibt gültig für beliebige $a, b \in J$.

10.4 Substitutionsregel

Satz 10.5 *(Substitutionsregel für bestimmtes Integral)* Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall I und u eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a, b]$ mit $u(J) \subset I$ so dass die Komposition $f(u(x))$ auf $[a, b]$ definiert ist. Dann gilt

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\, du(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy.} \tag{10.10}$$

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1}.$$

Wir haben

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1} = \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x-1\right)} = \int_1^2 \frac{de^x}{e^x\left(e^x-1\right)},$$

und die Substitution $y = u(x) = e^x$ ergibt

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x-1} = \int_{u(1)}^{u(2)} \frac{dy}{y\left(y-1\right)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy \\
&= [\ln(y-1)]_e^{e^2} - [\ln y]_e^{e^2} \\
&= \ln \frac{e^2-1}{e-1} - 1 = \ln(e+1) - \ln e = \ln\left(1+e^{-1}\right).
\end{aligned}
$$

2. Bestimmen wir

$$\int_0^{5\pi} (2+\cos x)^2 \sin x \, dx.$$

Wir erhalten mit Hilfe von der Substitution $y = u(x) = 2 + \cos x$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{5\pi} (2+\cos x)^2 \sin x \, dx &= - \int_0^{5\pi} (2+\cos x)^2 \, d(2+\cos x) \\
&= - \int_{u(0)}^{u(5\pi)} y^2 dy = - \int_3^1 y^2 dy \\
&= \int_1^3 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.
\end{aligned}
$$

In diesem Beispiel ist die Substitution $y = u(x)$ nicht monoton (und muss nicht monoton sein).

Korollar 10.6 *(Inverse Substitution)* Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $J = [A, B]$. Sei v eine stetig differenzierbare streng monotone Funktion auf einem Intervall I mit $v(I) = J$, so dass die inverse Funktion $v^{-1} : J \to I$ existiert. Dann gilt

$$\boxed{\int_A^B f(x) dx = \int_{v^{-1}(A)}^{v^{-1}(B)} f(v(y)) \, dv(y).} \tag{10.11}$$

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int_{\sqrt{3}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$$

mit Hilfe von der inversen Substitution $x = \sin y$. Die Funktion $v(y) = \sin y$ ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ invertierbar mit der inversen Funktion $v^{-1}(x) = \arcsin x$, die auf $[-1, 1]$ definiert ist. Da $dx = \cos y$, wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx &= \int_{v^{-1}(\sqrt{3}/2)}^{v^{-1}(1)} \frac{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin y} \cos y dy \\
&= \int_{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}}^{\arcsin 1} \frac{\cos^2 y}{\sin y} dy \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 y}{\sin y} dy \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dy}{\sin y} - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin y dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|\right]_{\pi/3}^{\pi/2} + [\cos y]_{\pi/3}^{\pi/2} \\
&= \left(\ln\tan\frac{\pi}{4} - \ln\tan\frac{\pi}{6}\right) + \left(0 - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} = 0.0493...
\end{aligned}
$$

2. Bestimmen wir

$$\int_0^{a^2} \frac{dx}{\cos^2\sqrt{x}}$$

wobei $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Die inverse Substitution $x = y^2$ im Definitionsbereich $y \in [0, a]$ ergibt $dx = 2ydy$, $y = \sqrt{x}$ und

$$
\begin{aligned}
\int_0^{a^2} \frac{dx}{\cos^2\sqrt{x}} &= 2\int_0^a \frac{ydy}{\cos^2 y} = 2\int_0^a yd\tan y \\
&= 2\left[y\tan y\right]_0^a - 2\int_0^a \tan ydy \\
&= 2a\tan a + 2\left[\ln|\cos y|\right]_0^a \\
&= 2a\tan a + 2\ln\cos a.
\end{aligned}
$$

10.5 Länge von Kurve

Koordinatenvektorraum.

Parametrisierte Kurve und ihre Länge. **Definition.** Die Abbildung φ heißt stetig wenn alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig sind, und stetig differenzierbar wenn alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig differenzierbar sind. Im letzten Fall definieren wir die Ableitung φ' von φ mit

$$\varphi'(t) = \left(\varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t)\right),$$

so dass φ' auch eine Abbildung von J nach $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition. Das Bild $K = \varphi(J)$ einer stetigen Abbildung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt *Kurve.* Die Abbildung φ heißt die *Parametrisierung* der Kurve K, und das Paar (K, φ) heißt *parametrisierte Kurve* oder *ein Weg.* Die Variable t heißt der Parameter.

Definition. Seien $J = [\alpha, \beta]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall mit $\alpha < \beta$ und $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Definieren wir die *Länge* $L(K, \varphi)$ der parametrisierten Kurve (K, φ) mit

$$\boxed{L(K, \varphi) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + ... + \varphi_n'(t)^2} dt}. \tag{10.12}$$

Beispiel. Fixieren wir zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ und betrachten die Parametrisierung

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$$

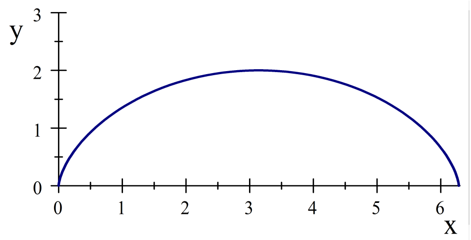
$$\varphi(t) = (1-t)\,a + tb = a + t(b-a).$$

Das Bild $K = \varphi(J)$ ist eine gerade Strecke zwischen a und b. Dann gilt $\varphi' = b - a$ und

$$L(K,\varphi) = \int_0^1 |\varphi'(t)|\,dt = |b-a|\,.$$

Beispiel. Die *Zykloide* ist eine Kurve K mit der Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)\,.$$



Die Zykloide

Es gilt

$$\varphi'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

und

$$|\varphi'| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\sin\frac{t}{2},$$

woraus folgt, dass die Länge der Zykloide wie folgt ist:

$$L(K,\varphi) = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}dt = 4\int_0^{\pi} \sin s\ ds = -4\left[\cos s\right]_0^{\pi} = 8.$$

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$.

Satz 10.7 Für jeden Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r > 0$ und ein $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit

$$x = r\cos\theta \quad \text{und} \quad y = r\sin\theta. \tag{10.13}$$

Beispiel. Fixieren wir ein $r > 0$ und betrachten die Parametrisierung

$$\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t)\,,$$

Da $|\varphi(t)| = r$, so liegt $\varphi(t)$ auf dem Kreis K von Radius r und Zentrum 0. Umgekehrt, es folgt aus dem Satz 10.7 dass jeder Punkt $z \in K$ die Form $z = (r\cos t, r\sin t)$ hat wobei (r,t) die Polarkoordinaten von z sind. Somit ist das Bild $\varphi([-\pi,\pi])$ gleich K. Da

$$\varphi' = (-r\sin t, r\cos t)$$

und

$$|\varphi'| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r,$$

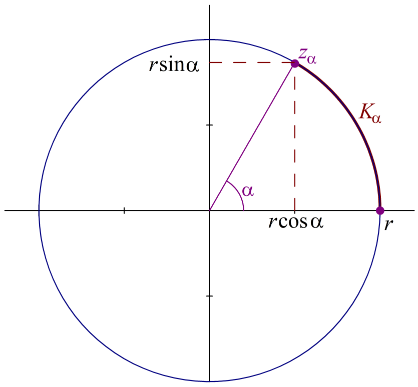
so erhalten wir

$$L(K, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Fixieren wir jetzt ein $\alpha \in (0, \pi]$ und betrachten die folgenden Parametrisierung

$$\varphi : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Das Bild $K_\alpha = \varphi([0, \alpha]) \subset K$ ist der *Kreisbogen* zwischen den Punkten $z_\alpha = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ und $z_0 = (r, 0)$ auf K.



Der Kreisbogen K_α von Radius r

Es folgt

$$L(K_\alpha, \varphi) = \int_0^\alpha |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^\alpha r\, dt = \alpha r.$$

Funktionsgraphen als Kurven. Betrachten wir den Graph

$$G = \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta],\ y = f(x)\}$$

einer Funktion $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Der Graph lässt sich betrachten als eine Kurve mit Parametrisierung

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$$
$$\varphi(x) = (x, f(x))$$

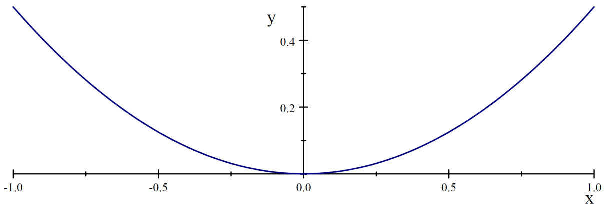
Ist f stetig differenzierbar, so erhalten wir

$$\varphi' = (1, f'(x)) \quad \text{und} \quad |\varphi'| = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

woraus folgt

$$\boxed{L(G, \varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}. \tag{10.14}$$

Beispiel. Berechnen wir die Länge der Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf $[-1, 1]$.



Die Parabel

Nach (10.14) erhalten wir die Länge der Parabel:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} \approx 2,296, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben dass

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Unabhängigkeit der Länge von der Parametrisierung.

Satz 10.8 Sei $u : I \to J$ stetig differenzierbar, surjektiv und monoton. Dann bestimmen die Parametrisierungen

$$\varphi : J \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \psi = \varphi \circ u : I \to \mathbb{R}^n$$

dieselbe Kurve $K = \varphi(J) = \psi(I)$, und die parametrisierten Kurven (K, φ) und (K, ψ) haben die gleichen Längen, d.h.

$$L(K, \varphi) = L(K, \psi). \tag{10.15}$$

10.6 Darboux-Integrierbarkeit

Ab diesem Abschnitt entwickeln wir eine Theorie von integrierbaren Funktionen die uns zu den Beweisen von den Sätzen 9.1 und 10.1 führt, d.h. zur Existenz von Stammfunktion einer stetigen Funktion und zur Integrierbarkeit von stetigen und monotonen Funktionen.

Definition. Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$, definieren wir die *obere Darboux-Summe* von f und Z mit

$$S^*(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f)\, \Delta x_k$$

und die *untere Darboux-Summe* mit

$$S_*(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} (\inf_{[x_{k-1},x_k]} f)\,\Delta x_k.$$

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf $[a,b]$ heißt *Darboux-integrierbar* wenn

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^*(f,Z) - S_*(f,Z)\right) = 0, \tag{10.16}$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall Z \ \text{ mit } \ \varphi(Z) < \delta \ \text{ gilt } \ |S^*(f,Z) - S_*(f,Z)| < \varepsilon.$$

Die Differenz $S^*(f,Z) - S_*(f,Z)$ heißt *Darboux-Differenz.* Sie ist wohldefiniert da $S^*(f,Z)$ und $S_*(f,Z)$ nicht gleichzeitig $+\infty$ oder $-\infty$ sein können.

Beispiel. Für die Dirichlet-Funktion (10.4) gilt auf jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = 1 \ \text{ und } \ \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = 0$$

woraus folgt

$$S^*(f,Z) = b - a \quad \text{und} \quad S_*(f,Z) = 0.$$

Die Bedingung (10.16) ist somit nicht erfüllt und f ist nicht Darboux-integrierbar.

Hauptsatz 10.9 *(Darboux-Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit)* Sei f eine reellwertige Funktion auf $[a,b]$. Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:

(a) Funktion f ist Riemann-integrierbar.

(b) Funktion f ist Darboux-integrierbar.

(c) Die Grenzwerte $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z)$ und $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z)$ existieren (in $\mathbb{R}$) und sind gleich.

Darüber hinaus gelten unter jeder von den Bedingungen $(a), (b), (c)$ die Identitäten:

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z) = \int_a^b f(x)\,dx = \sup_Z S_*(f,Z) = \inf_Z S^*(f,Z). \tag{10.17}$$

Definition. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar* auf $[a,b]$ wenn f eine ($\Leftrightarrow$jede) von den Bedingungen $(a), (b), (c)$ erfüllt.

Behauptung 1. Für $Z' \subset Z$ gelten die Ungleichungen

$$S_*(f,Z') \le S_*(f,Z) \le S^*(f,Z) \le S^*(f,Z'). \tag{10.18}$$

Behauptung 2. Für zwei beliebige Zerlegungen Z' und Z'' von $[a,b]$ gilt

$$S_*(f,Z') \le S^*(f,Z''). \tag{10.19}$$

Korollar 10.10 *(Notwendige Bedingung für Integrierbarkeit)* Ist eine Funktion f auf $[a,b]$ integrierbar, so ist f auf $[a,b]$ beschränkt.

10.7 Integrierbarkeit von stetigen und monotonen Funktionen

Hier beweisen wir den Satz 10.1:

(a) Jede stetige Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$ ist auf diesem Intervall Riemann-integrierbar.

(b) Jede monotone Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$ ist auf diesem Intervall Riemann-integrierbar.

Definition. Eine Funktion f auf einem Intervall J heißt *gleichmäßig* stetig auf J wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in J \;\; \text{mit} \;\; |x - y| < \delta \text{ gilt } \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{10.20}$$

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[1, 2]$ da

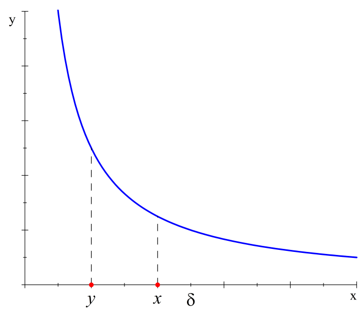
$$\left|x^2 - y^2\right| = |x + y| \, |x - y| \leq 4 \, |x - y|$$

und man in (10.20) $\delta = \varepsilon/4$ wählen kann: $|x - y| < \varepsilon/4$ impliziert $|x^2 - y^2| < \varepsilon$.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0, 1]$ aber nicht gleichmäßig stetig auf J ist. Die Negation von (10.20) ist die folgende Aussage:

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x, y \in J \;\; \text{mit} \;\; |x - y| < \delta \;\; \text{und} \;\; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{10.21}$$

Um (10.21) für $f(x) = \frac{1}{x}$ zu beweisen, setzen wir $\varepsilon = 1$ und, für jedes $\delta > 0$, wählen wir ein $x \in (0, 1]$ so dass $x < \delta$, und setzen $y = x/2$.



Dann gilt $|x - y| < \delta$, aber

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \frac{1}{x} \geq 1 = \varepsilon,$$

d.h. (10.21) ist erfüllt.

Lemma 10.11 *(Gleichmäßige Stetigkeit)* Sei J ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Dann jede stetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf J.

10.8 Integration und Ungleichungen

Satz 10.12 Seien f und g integrierbare Funktionen auch einem Intervall $[a,b]$, $a<b$.

(a) *(Monotonie)* Gilt $f(x)\leq g(x)$ für alle $x\in[a,b]$ so gilt auch

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx. \tag{10.22}$$

(b) *(LM-Ungleichung)* Es gilt

$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f. \tag{10.23}$$

Korollar 10.13 Ist f stetig auf $[a,b]$, $a<b$, dann gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{10.24}$$

Satz 10.14 *(Mittelwertsatz für Integration)* Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a,b]$. Dann gibt es ein $\xi\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{10.25}$$

10.9 Additivität von Integral

Definition. Eine Funktion f auf einem Intervall J heißt *lokal integrierbar* wenn f auf jedem kompakten Teilintervall von J integrierbar ist.

Definition. Seien $a,b\in J$. Im Fall $a>b$ setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx, \tag{10.26}$$

und im Fall $a=b$:

$$\int_a^a f(x)dx := 0. \tag{10.27}$$

Satz 10.15 *(Additivität)* Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall J. Dann für alle $a,b,c\in J$ gilt die Identität

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx. \tag{10.28}$$

10.10 Fundamentalsatz der Analysis, 2

Hauptsatz 10.16 *(Fundamentalsatz der Analysis: Existenz der Stammfunktion)* Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Für jedes $c \in J$ ist die Funktion

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt, \quad x \in J, \tag{10.29}$$

eine Stammfunktion von f auf J. Insbesondere hat jede stetige Funktion eine Stammfunktion.

Korollar 10.17 *(Fundamentalsatz der Analysis I+II)* Für jede stetige Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ existiert eine Stammfunktion F auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

10.11 Taylorformel mit Integralrestglied

Hauptsatz 10.18 Sei f eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gilt für alle $a, x \in J$ die Identität

$$f(x) = T_n(x) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)\,(x-y)^n}{n!} dy, \tag{10.30}$$

wobei $T_n(x)$ das Taylor-Polynom von f an der Stelle a ist, d.h. ,

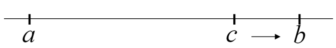
$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

10.12 Uneigentliches Integral

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem rechtsoffenen Intervall $[a,b)$ mit $-\infty < a < b \leq +\infty$. Dann definieren wir das *uneigentliche* Integral von f auf $[a,b)$ mit

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx := \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\, dx, \tag{10.31}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Die Notation $c \to b-$ bedeutet $c \to b$ und $c < b$.



Da $[a,c]$ ein kompaktes Teilintervall von $[a,b)$ ist und f auf $[a,b)$ lokal integrierbar ist, so f ist auf $[a,c]$ Riemann-integrierbar und das Integral $\int_a^c f(x)\, dx$ ist wohldefiniert.

Ist der Grenzwert in (10.31) endlich, so sagt man, dass das Integral $\int_a^{b-} f(x)\, dx$ an der Grenze b konvergiert. Ist der Grenzwert in (10.31) unendlich, so sagt man, dass das Integral an der Grenze b bestimmt divergiert. Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, dass das Integral an der Grenze b unbestimmt divergiert. Im letzten Fall ist der Wert des Ausdrucks $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ nicht definiert.

Die Grenze b für das uneigentliche Integral in (10.31) heißt *kritisch*.

Beispiel. Zum Beispiel, im Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf dem Intervall $[0,1)$ definiert so dass 1 die kritische Grenze ist und dieses Integral als uneigentliches verstanden werden muss.

Im Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

ist der Definitionsbereich $[1,+\infty)$ so dass $+\infty$ eine kritische Grenze ist (die Unendlichkeit ist immer eine kritische Grenze).

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem linksoffenen Intervall $(a,b]$ mit $-\infty \le a < b < +\infty$. Dann definieren wir das uneigentliche Integral mit

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx, \tag{10.32}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Die Notation $c \to a+$ bedeutet $c \to a$ und $c > a$. Die Grenze a für das uneigentliche Integral (10.32) heißt kritisch.

Satz 10.19 *(Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral)* Sei $f(x)$ eine lokal integrierbare Funktion auf einem halboffenen Intervall $J = [a,b)$ oder $J = (a,b]$. Sei F eine Stammfunktion von f auf J. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b\,,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir das uneigentliche $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ wobei die kritische Grenze 1 ist. Mit Hilfe von Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]_0^1 = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Somit ist das Integral konvergent.

2. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ mit der kritischen Grenze $+\infty$. Es gilt

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = -[\cos x]_0^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty} \cos x + 1.$$

Allerdings existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \cos x$ nicht. Somit beschließen wir, dass $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ unbestimmt divergiert und keinen Wert hat.

3. Bestimmen wir das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, wobei $p \in \mathbb{R}$ und die kritische Grenze $+\infty$ ist. Im Fall $p \neq 1$ haben wir

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Im Fall $p < 1$ gilt $x^{1-p} \to +\infty$ für $x \to +\infty$, woraus folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty,$$

d.h. das Integral bestimmt divergent ist.

Im Fall $p > 1$ gilt $x^{1-p} \to 0$ für $x \to +\infty$, woraus folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1},$$

d.h. das Integral konvergent ist. Insbesondere gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

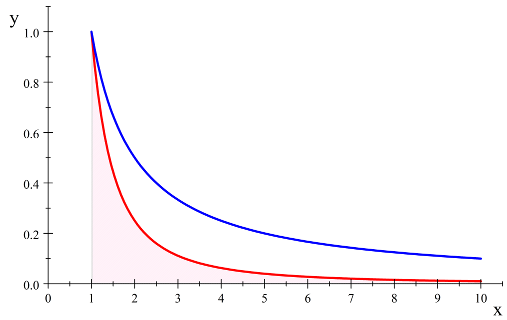
Im Fall $p = 1$ haben wir

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x \to +\infty,$$

woraus folgt

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Somit ist das Integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ konvergent für $p > 1$ und bestimmt divergent für $p \leq 1$.



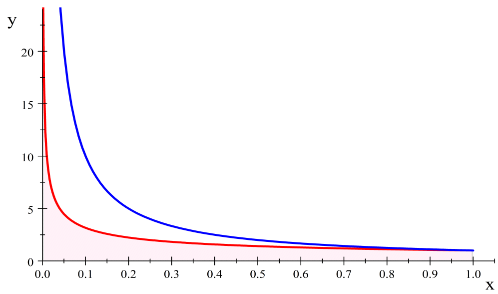
Funktionen $\frac{1}{x}$ (blau) und $\frac{1}{x^2}$ (rot)

4. Bestimmen wir $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Hier ist 0 die kritische Grenze. Nach der Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\int x^{-1/2} dx\right]_0^1 = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = 2.$$

Analog erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_0^1 = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln(0+) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

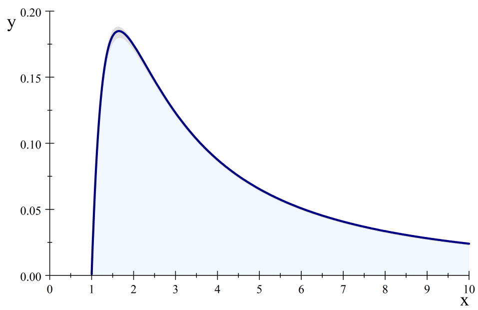


Funktionen $\frac{1}{x}$ (blau) und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (rot)

5. Bestimmen wir $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$, wobei die kritische Grenze $+\infty$ ist. Wir erhalten mit Hilfe von der partiellen Integration

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\int_1^{\infty} \ln x\, d\frac{1}{x} = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} d\ln x$$
$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1,$$

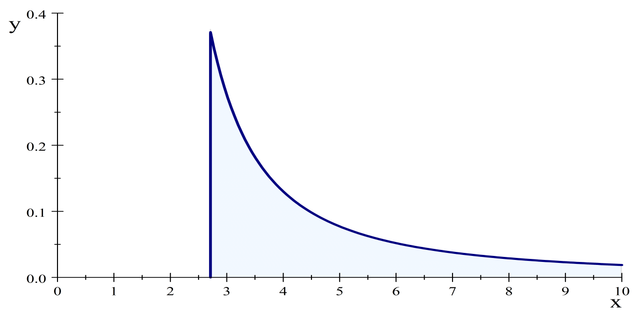
wobei wir benutzt haben, das $\frac{\ln x}{x} \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow +\infty$.



Funktion $\frac{\ln x}{x^2}$ auf $[1, +\infty)$

6. Bestimmen wir $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ mit der kritischen Grenze $+\infty$. Mit Hilfe von Substitution $y = u(x) = \ln x$ erhalten wir

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_e^{\infty} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \int_{u(e)}^{u(\infty)} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^{\infty} = 1.$$



Funktion $\frac{1}{x \ln^2 x}$ auf $[e, +\infty)$

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem offenen Intervall (a,b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Definieren wir das uneigentliche Integral mit zwei kritischen Grenzen a,b wie folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+}^{b-} f(x)\,dx := \int_{a+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b-} f(x)\,dx, \tag{10.33}$$

wobei $c \in (a,b)$, vorausgesetzt, dass die beiden Integrale in der rechten Seite existieren als uneigentliche Integrale und deren Summe auch wohldefiniert ist.

Behauptung. Der Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$ in *(10.33)* ist unabhängig von der Wahl von $c \in (a,b)$.

Satz 10.20 *(Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral mit zwei kritischen Grenzen)* Seien $f(x)$ eine lokal integrierbare Funktion auf (a,b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und F eine Stammfunktion von f auf (a,b). Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

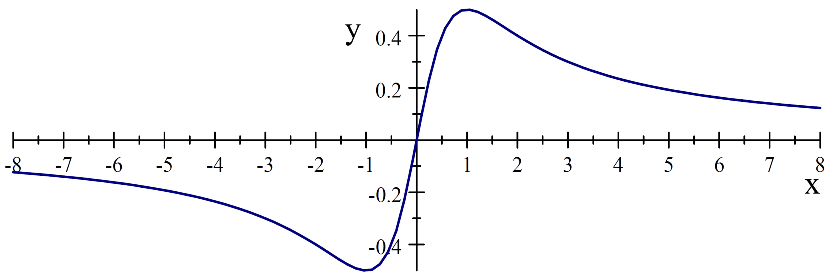
Beispiel. 1. Betrachten wir $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$, wobei die beiden Grenzen $\pm\infty$ kritisch sind. Da

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C,$$

so erhalten wir nach der Newton-Leibniz-Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - (+\infty),$$

was unbestimmter Ausdruck ist. Somit ist das Integral nicht wohldefiniert.

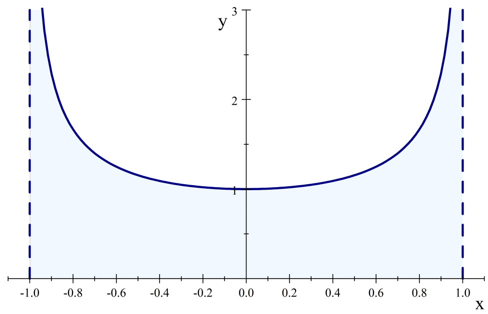


Funktion $\frac{x}{1+x^2}$

2. Bestimmen wir $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Die beiden Grenzen ± 1 sind kritisch. Nach de Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= [\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$



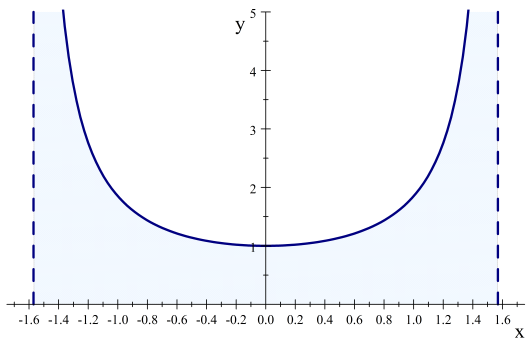
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Bestimmen wir $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$. Die beiden Grenzen $\pm\pi/2$ sind kritisch da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Da

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(+\infty) - \ln 0\right) = \frac{1}{2}\left(+\infty - (-\infty)\right) = +\infty.\end{aligned}$$



Funktion $\frac{1}{\cos x}$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$

10.13 Konvergenzkriterien von uneigentlichen Integralen

Integrale von nichtnegativen Funktionen.

Satz 10.21 Sei f eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dann ist das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \in [0, +\infty].$$

Behauptung. Der Grenzwert $\lim_{x\to b-} F(x)$ existiert für jede monoton steigende Funktion F auf (a, b).

Integralkriterium für Konvergenz von Reihen.

Satz 10.22 *(Integralkriterium für Konvergenz von Reihen)* Sei $f(x)$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion auf $[m, +\infty)$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt die Äquivalenz

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \iff \sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty. \tag{10.34}$$

Beispiel. Untersuchen wir die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

wobei $p \in \mathbb{R}$. Im Fall $p \leq 0$ konvergiert die Folge $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ gegen 0 nicht, und somit ist die Reihe divergent. Sei $p > 0$. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ist dann monoton fallend auf $[1, +\infty)$. Nach dem Satz 10.22 gilt die Äquivalenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty. \tag{10.35}$$

Wir haben früher schon gesehen, dass das Integral in (10.35) genau dann konvergiert wenn $p > 1$. Es folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann konvergiert wenn $p > 1$.

Absolute Konvergenz. **Definition.** Sei f eine stetige Funktion auf (a, b). Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *absolut konvergent* wenn $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent ist, d.h. wenn

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Satz 10.23 Sei f eine stetige Funktion auf (a, b). Ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10.36}$$

Behauptung. Nehmen wir an dass für jede Folge $x_n \to b-$ die Folge $\{F(x_n)\}$ konvergent ist. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to b-} F(x)$.

Landau-Symbol O. **Definition.** Seien f, g zwei Funktionen auf (a, b) und $g(x) > 0$. Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to b- \tag{10.37}$$

und sagt "$f(x)$ ist groß O von $g(x)$ für $x \to b-$" wenn es ein $c \in (a, b)$ und ein $C > 0$ gibt mit

$$|f(x)| \le Cg(x) \quad \text{für alle } x \in (c, b).$$

Die Funktion g aus der Bedingung (10.37) heißt eine *Majorante* von f.

Man kann zeigen dass (10.37) äquivalent zur folgenden Bedingung ist:

$$\limsup_{x \to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$$

Die ähnliche Definition gilt für $x \to a+$.

Beispiel. Wir haben

$$x^2 \cos x + x\sqrt{x} = O\left(x^2\right) \quad \text{für } x \to +\infty,$$

da für $x > 1$

$$\frac{|x^2 \cos x + x\sqrt{x}|}{x^2} \le |\cos x| + \frac{1}{\sqrt{x}} \le 2.$$

Satz 10.24 *(Majorantenkriterium)* Seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige Funktionen auf $[a, b)$ und $g(x) > 0$. Nehmen wir an, dass

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to b- \tag{10.38}$$

und

$$\int_a^b g(x)\, dx < \infty.$$

Dann ist das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ absolut konvergent.

Beispiel. Untersuchen wir die Konvergenz von

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2}\, \sin x}{x^2} dx. \tag{10.39}$$

Da $|\sin x| \le 1$ und $\sqrt{x+2} \le \sqrt{2x}$ für $x \ge 2$, so gilt

$$\left| \frac{\sqrt{x+2}\, \sin x}{x^3} \right| \le \sqrt{2}\frac{\sqrt{x}}{x^2} = Cx^{-\frac{3}{2}} \quad \text{für } x \ge 2$$

und somit

$$\frac{\sqrt{x+2}\, \sin x}{x^2} = O(x^{-\frac{3}{2}}) \text{ für } x \to +\infty.$$

Da $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx < +\infty$, so folgt es dass das Integral (10.39) absolut konvergent ist.

Äquivalenz von Funktionen. **Definition.** Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf (a,b), die in einer Umgebung von b nicht verschwinden. Man sagt, dass $f(x)$ äquivalent zu $g(x)$ für $x\to b-$ ist und schreibt

$$f(x)\sim g(x) \text{ für } x\to b-$$

wenn

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1 \text{ für } x\to b-.$$

Analog definiert man die Äquivalenz für $x\to a+$.

Lemma 10.25 Die Äquivalenz hat die folgenden Eigenschaften.

(a) Die Relation $f\sim g$ für $x\to b-$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Gelten $f_1\sim g_1$ und $f_2\sim g_2$ für $x\to b-$ so gelten auch $f_1f_2\sim g_1g_2$ und $\frac{f_1}{f_2}\sim\frac{g_1}{g_2}$ für $x\to b-$.

(c) Die Äquivalenz $f\sim g$ gilt genau dann wenn $f(x)=g(x)+o(g(x))$ für $x\to b-$.

Beispiel. 1. Es gilt

$$x^2+x\sim x^2 \quad \text{für } x\to+\infty$$

da

$$\frac{x^2+x}{x^2}=1+\frac{1}{x}\to 1 \text{ für } x\to+\infty.$$

Andererseits, wir haben

$$x^2+x\sim x \quad \text{für } x\to 0$$

da

$$\frac{x^2+x}{x}=x+1\to 1 \text{ für } x\to 0.$$

2. Es gilt

$$\ln(1+x)\sim x \text{ für } x\to 0$$

da nach der Taylorformel

$$\ln(1+x)=x+o(x).$$

Es folgt, dass für $x\to 0$

$$\left(x^2+x\right)\ln(1+x)\sim x\cdot x=x^2.$$

Satz 10.26 *(Vergleichskriterium)* Seien f und g positive stetige Funktionen auf $[a,b)$. Gilt

$$f(x)\sim g(x) \text{ für } x\to b-$$

so sind die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ und $\int_a^b g(x)\,dx$ gleichzeitig konvergent oder bestimmt divergent.

Beispiel. 1. Untersuchen wir die Konvergenz von

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^6}}$$

an der kritischen Grenze $+\infty$. Wir haben

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^6}} = \frac{x}{x^3\sqrt{x^{-6}+1}} \sim \frac{x}{x^3} = x^{-2} \text{ für } x \to +\infty,$$

d.h. $f(x) \sim x^{-2}$ für $x \to +\infty$. Da

$$\int_1^{+\infty} x^{-2}dx < +\infty,$$

so beschließen wir nach dem Satz 10.26, dass auch

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^6}} < +\infty.$$

2. Untersuchen wir die Konvergenz von

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \tag{10.40}$$

wobei $0 < a < \pi/2$. Da $\cos x$ in $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend ist, so gilt $\cos x - \cos a > 0$ für $0 \leq x < a$. Die Grenze a ist kritisch da der Nenner an $x = a$ verschwindet. Nach der Differenzierbarkeit von $\cos x$ gilt es für $x \to a-$

$$\cos x - \cos a = -(\sin a)(x-a) + o(x-a) \sim (\sin a)(a-x),$$

woraus folgt

$$\sqrt{\cos x - \cos a} \sim \sqrt{(\sin a)(a-x)} \quad \text{für } x \to a$$

und somit

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sin a}\sqrt{a-x}} \text{ für } x \to a$$

Mit Hilfe von Substitution $y = a - x$ erhalten wir

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = -\int_a^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y}} = [2\sqrt{y}]_0^a = 2\sqrt{a} < \infty,$$

woraus folgt, dass das Integral (10.40) konvergent ist.

Chapter 11

Metrische Räume und stetige Abbildungen

11.1 Abstandsfunktion

Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* (=Abstandsfunktion) auf X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (somit $d(x, y) > 0$ für alle $x \neq y$).
2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
3. Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ist d eine Metrik auf X, so heißt das Paar (X, d) ein *metrischer Raum.*

Die Dreiecksungleichung impliziert, dass für alle $x, y, z \in X$

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z). \tag{11.1}$$

Beispiel. 1. Sei $X = \mathbb{R}$. Dann ist $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$.
2. Sei $X = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Dann ist $d(z, w) = |z - w|$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$.
3. Für beliebige Menge X ist die folgende Funktion

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

eine Metrik. Diese Metrik heißt *diskrete Metrik* auf X.

Definition. Eine Funktion $N : V \to \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V heißt eine *Norm* wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $N(x) \geq 0$ und $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (somit $N(x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$).
2. Absolute Homogenität: $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. Dreiecksungleichung: $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Das Paar (V, N) heißt ein *normierter* Vektorraum.
Die übliche Notation von der Norm ist $\|x\|$ anstatt $N(x)$.

Beispiel. 1. Die Funktion $N(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Norm.
2. Die Funktion $N(z) = |z|$ auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist eine Norm.
3. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Für jeden Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die 1-Norm

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \tag{11.2}$$

und die ∞-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\|x\|_1$ und $\|x\|_\infty$ die Normen sind.

Beispiel. Sei S eine beliebige Menge. Bezeichnen wir mit $B(S)$ die Menge von allen *beschränkten* reellwertigen Funktionen auf S. Die Menge $B(S)$ ist offensichtlich ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Vektoraddition

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Definieren wir die sup-Norm (=die ∞-Norm) auf $B(S)$ wie folgt:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Es ist einfach zu beweisen dass die sup-Norm eine Norm ist (siehe Aufgabe 130).

Behauptung. Ist (V, N) ein normierter Vektorraum, so ist die Funktion

$$d(x, y) := N(x - y)$$

eine Metrik auf V. Die Metrik d heißt die *induzierte Metrik* der Norm N.

Beispiel. Für $V = \mathbb{R}^n$ erhalten wir die 1-Metrik

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

und die ∞-Metrik

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k - y_k|\}.$$

Für $V = B(S)$ erhalten wir die sup-Metrik:

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|.$$

11.2 Die p-Norm in $\mathbb{R}^n$

Definition. Für jedes $1 \leq p < \infty$ definieren wir die *p-Norm* in $\mathbb{R}^n$ wie folgt: für jedes $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} . \tag{11.3}$$

Satz 11.1 *(Hölder-Ungleichung)* Für alle reellen Zahlen $p, q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{11.4}$$

gilt die folgende Ungleichung

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{11.5}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Satz 11.2 *(Minkowski-Ungleichung)* Die p-Norm erfüllt die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{11.6}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $p \in [1, \infty]$. Folglich ist die p-Norm eine Norm in $\mathbb{R}^n$ für alle $p \in [1, \infty]$.

11.3 Metrische Kugel

Definition. Für jedes $z \in X$ und $r > 0$ definieren wir die *offene Kugel* $U_r(z)$ mit Zentrum z und Radius r wie folgt:

$$U_r(z) = \{x \in X : d(x, z) < r\} .$$

Definieren wir auch die *abgeschlossene Kugel* mit

$$\overline{U}_r(z) = \{x \in X : d(z, x) \leq r\} .$$

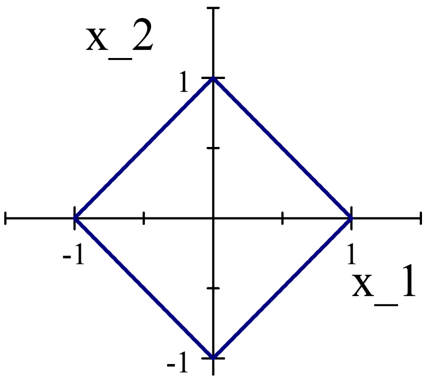
Beispiel. In $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ die Kugel $U_r(z)$ ist das offene Intervall $(z - r, z + r)$ und $\overline{U}_r(z) = [z - r, z + r]$.

Beispiel. Betrachten wir $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik d_p $(1 \leq p \leq \infty)$ und beschreiben wir die entsprechende Kugel $U_r(0)$ abhängig von p.

Für $p = 1$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r\right\}$$

Somit ist $U_r(0)$ ein Rhombus wie auf dem Bild:

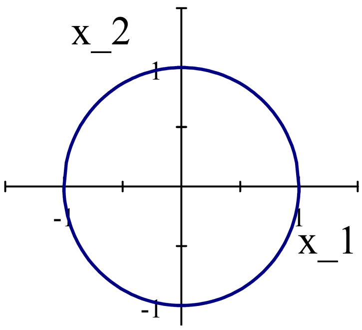


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 1$

Für $p = 2$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\right\},$$

und die Kugel ist eine Kreisscheibe

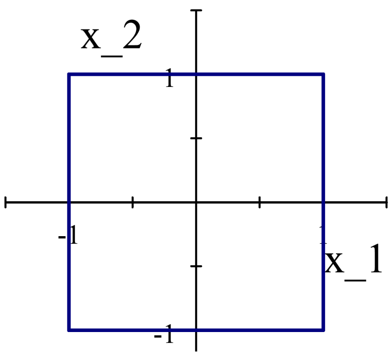


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 2$

Für $p = \infty$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < r\right\},$$

was ein Quadrat ist

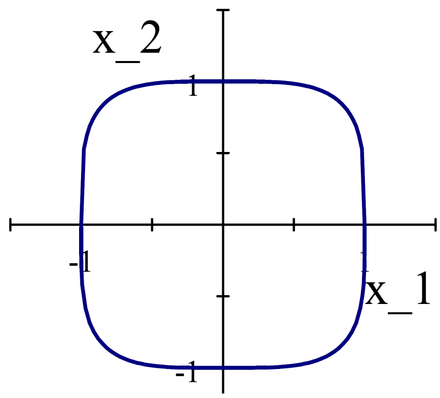


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = \infty$

Für $p = 4$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_4 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^4 < r^4\right\},$$

was auf dem Bild gezeigt ist:



Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 4$

Lemma 11.3 Seien $U_r(x)$ und $U_s(y)$ zwei Kugeln in einem metrischen Raum (X, d).

(a) Gilt $d(x, y) \geq r + s$ so sind die Kugeln $U_r(x)$ und $U_s(y)$ disjunkt.

(b) Gilt $d(x, y) \leq r - s$, so gilt $U_s(y) \subset U_r(x)$.

11.4 Konvergenz in metrischen Räumen

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Punkten aus X *konvergiert* gegen ein $a \in X$ wenn

$$d(x_n, a) \to 0 \ \text{ für } \ n \to \infty.$$

Der Punkt a heißt der Grenzwert (=Limes) der Folge $\{x_n\}$. Schreibweise: $x_n \xrightarrow{d} a$ oder

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Beispiel. In $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist die Konvergenz $x_n \xrightarrow{d} a$ äquivalent zu $|x_n - a| \to 0$ und somit zur üblichen Konvergenz $x_n \to a$. Gleiches gilt in $\mathbb{C}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y| = \|x - y\|_2$.

Behauptung. Der Grenzwert einer Folge $\{x_n\}$ im metrischen Raum (X, d) ist eindeutig bestimmt (wenn er existieren).

11.5 Stetige Abbildungen

Definition. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Die Abbildung f heißt stetig in einem Punkt $a \in X$ wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.d. } \forall x \in X \text{ mit } \; d_X(x,a) < \delta \; \text{ gilt } \; d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon. \tag{11.7}$$

Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig wenn sie in allen Punkten $a \in X$ stetig ist.

Lemma 11.4 Die folgenden zwei Bedingungen sind äquivalent.

(i) Die Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig in $a \in X$.

(ii) Für jede Folge $\{x_n\} \subset X$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$.

Korollar 11.5 Sind die Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ (oder $f, g : X \to \mathbb{C}$) stetig in $a \in X$ so sind $f + g$, fg, f/g auch stetig in a sind (im Fall f/g vorausgesetzt, dass $g \neq 0$).

Beispiel. Fixieren wir einen Punkt $c \in X$ und betrachten die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ die mit $f(x) = d(x, c)$ definiert ist. Zeigen wir, dass diese Funktion stetig in jedem Punkt $a \in X$ ist. Sei $x_n \to a$. Es gilt nach (11.1)

$$|f(x_n) - f(a)| = |d(x_n, c) - d(a, c)| \leq d(x_n, a) \to 0,$$

woraus folgt, dass $f(x_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.

11.6 Offene und abgeschlossene Mengen

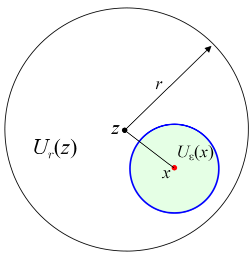
Definition. Eine Menge $V \subset X$ heißt *offen* wenn $\forall x \in V \;\; \exists \varepsilon > 0$ s.d. $U_\varepsilon(x) \subset V$.

Beispiel. 1. Die leere Menge $\emptyset$ und die ganze Menge X sind offensichtlich offen.

2. Zeigen wir, dass jede offene metrische Kugel $U_r(z)$ eine offene Menge ist. Es reicht für jedes $x \in U_r(z)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U_r(z)$ zu finden. Nach dem Lemma 11.3 ist diese Bedingung erfüllt vorausgesetzt dass

$$d(x, z) \leq r - \varepsilon,$$

und diese Bedingung gilt mit $\varepsilon := r - d(x, z) > 0$.



Definition. Eine Menge $F \subset X$ heißt *abgeschlossen* wenn das Komplement $F^c := X \setminus F$ offen ist.

Beispiel. 1. Die Mengen $X = \emptyset^c$ und $\emptyset = X^c$ sind abgeschlossen.

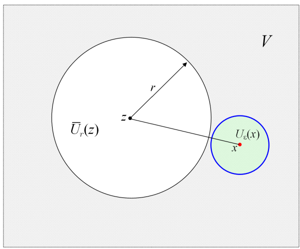
2. Zeigen wir, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{U}_r(z)$ eine abgeschlossene Menge ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass das Komplement

$$V := \overline{U}_r(z)^c = \{x \in X : d(x,z) > r\}$$

offen ist. Es reicht für jedes $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset V$ zu finden, was äquivalent dazu, dass $U_\varepsilon(x)$ und $\overline{U}_r(z)$ disjunkt sind. Nach dem Lemma 11.3, die Kugeln $U_\varepsilon(x)$ und $\overline{U}_r(z)$ sind disjunkt wenn

$$d(x,z) \geq r + \varepsilon,$$

und diese Bedingung gilt mit $\varepsilon := d(x,z) - r > 0$.



Beispiel. In $\mathbb{R}$ ist jedes offenes Intervall $J = (a,b)$ eine offene Menge. In der Tat, im Fall $a,b \in \mathbb{R}$ stimmt J mit der offenen Kugel $U_r(c)$ überein wobei $c = \frac{a+b}{2}$ und $r = \frac{b-a}{2}$. Für unbeschränktes J beweist man die Offenheit von J direkt wie oberhalb. Jedes abgeschlossenes Intervall $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Menge da $J = \overline{U}_r(c)$.

Satz 11.6 Die folgenden Eigenschaften gelten für Teilmengen eines metrischen Raums X.

(a) Die Vereinigung von einem beliebigen Mengensystem von offenen Mengen ist offen.

(b) Der Schnitt von einem endlichen Mengensystem von offenen Mengen ist offen.

(c) Die Vereinigung von einem endlichen Mengensystem von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

(d) Der Schnitt von einem beliebigen Mengensystem von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Bemerkung. Der Schnitt unendlich vieler offenen Mengen muss nicht offen sein. Zum Beispiel, der Schnitt von allen offenen Intervallen $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist gleich $\{0\}$, was nicht offen ist.

Satz 11.7 Die folgenden Eigenschaften gelten für Teilmengen eines metrischen Raums X.

(a) Eine Menge $V \subset X$ ist offen genau dann, wenn V eine Vereinigung von offenen metrischen Kugeln ist.

(b) Eine Menge $F \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge aus F der Grenzwert auch in F liegt.

Beispiel. Es folgt aus dem Satz 11.7(b) dass jede Menge $F = \{a\}$ die aus einem Punkt $a \in X$ besteht, abgeschlossen ist. Es folgt aus dem Satz 11.6(c) dass jede endliche Menge $F \subset X$ abgeschlossen ist.

11.7 Stetigkeit und offene Mengen

Satz 11.8 Seien X, Y zwei metrischen Räumen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Menge in X ist.

(b) f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $F \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(F)$ eine abgeschlossene Menge in X ist.

Korollar 11.9 Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen von metrischen Räumen. Dann ist die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ stetig.

11.8 Äquivalente Metriken

Definition. Seien d_1 und d_2 zwei Metriken in X. Man sagt, dass d_1 und d_2 *äquivalent* sind und schreibt $d_1 \sim d_2$, wenn es positive Konstanten c, C gibt s.d. für alle $x, y \in X$

$$cd_1(x,y) \le d_2(x,y) \le Cd_1(x,y). \tag{11.8}$$

Satz 11.10 Seien d_1 und d_2 zwei äquivalente Metriken in X. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) Die Begriffe von der Konvergenz von Folgen in X bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein, d.h. $x_n \overset{d_1}{\to} a \Leftrightarrow x_n \overset{d_2}{\to} a$

(b) Die Begriffe von offenen und abgeschlossenen Mengen in X bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

(c) Die Begriffe von stetigen Abbildung von X bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

Definition. Zwei Normen N_1 und N_2 in einem Vektorraum V heißen äquivalent when wenn es positive Konstanten c, C gibt s.d. für alle $x \in V$

$$cN_1(x) \le N_2(x) \le CN_1(x). \tag{11.9}$$

Satz 11.11 Alle p-Normen in $\mathbb{R}^n$ für $p \in [1, +\infty]$ sind äquivalent.

11.9 Vollständigkeit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Behauptung Jede konvergente Folge $\{x_n\}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beispiel. Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raum (X, d) lässt sich als metrischer Raum (Y, d) betrachten. Dann heißt (Y, d) *Unterraum* von (X, d).

Z.B. Betrachten wir die Menge $Y = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ als ein metrischer Raum. Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist eine Cauchy-Folge in Y, aber diese Folge ist in Y nicht konvergent.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* wenn jede Cauchy-Folge in X konvergent ist.

Definition. Ein normierter Vektorraum (V, N) heißt vollständig wenn der metrische Raum (V, d) mit der induzierten Metrik $d(x, y) = N(x - y)$ vollständig ist. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt *Banachraum*.

Satz 11.12 Sei S beliebige nicht-leere Menge. Der normierte Vektorraum $B(S)$ von allen beschränkten reellwertigen Funktionen auf S mit der sup-Norm ist ein Banachraum.

Korollar 11.13 Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum bezüglich jeder p-Norm, $p \in [1, \infty]$.

11.10 Unterraum

Satz 11.14 Sei (X, d) vollständig. Dann (Y, d) ist vollständig genau dann wenn Y eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

Beispiel. Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist somit ein vollständiger metrischer Raum.

Bezeichnen wir mit $C[a, b]$ die Menge von allen stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Da alle stetigen Funktionen auf $[a, b]$ beschränkt sind, so gilt $C[a, b] \subset B[a, b]$. Es ist klar dass $C[a, b]$ ein linearer Unterraum von $B[a, b]$ ist. Wir betrachten $C[a, b]$ als ein normierter Vektorraum mit der sup-Norm. Bemerken wir, dass $C[a, b]$ *unendlich* dimensional ist.

Satz 11.15 Der Vektorraum $C[a, b]$ ist ein Banachraum bezüglich der sup-Norm.

11.11 Fixpunktsatz von Banach

Definition. Sei X eine Menge und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von f wenn $f(x) = x$.

Beispiel. Zeigen wir, dass jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ einen Fixpunkt hat. In der Tat ist die Funktion $f(x) - x$ nichtnegativ an $x = 0$ und nichtpositiv an $x = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Funktion $f(x) - x$ eine Nullstelle, die ein Fixpunkt von f ist.

Andererseits es gibt viele Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne Fixpunkt, z.B. $f(x) = x + 1$.

Beispiel. Betrachten wir die Gleichung $P(x) = 0$ wobei P eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Jede Nullstelle x von P erfüllt offensichtlich die Gleichung

$$x = x - cP(x)$$

für beliebige Konstante $c \neq 0$. Folglich stimmen die Nullstellen von P mit den Fixpunkten der Funktion $f(x) = x - cP(x)$ überein. Berechnen der Nullstelle einer Funktion ist somit äquivalent zum Berechnen des Fixpunktes einer anderen Funktion.

Definition. Eine Selbstabbildung $f : X \to X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt *Kontraktionsabbildung* wenn es eine Konstante $q \in (0, 1)$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \tag{11.10}$$

Hauptsatz 11.16 *(Fixpunktsatz von Banach)* Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktionsabbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Lemma 11.17 Gilt für eine Folge $\{x_n\}$ in einem metrischen Raum (X, d)

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq Cq^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{11.11}$$

für ein $q \in (0, 1)$ und $C > 0$, so ist $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge.

Der Beweis des Fixpunktsatzes ergibt die folgende Methode um den Fixpunkt zu bestimmen bzw zu approximieren. Man fängt mit einem beliebigen Punkt x_0 an und bildet induktiv die Folge von *Näherungslösungen* wie folgt:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{11.12}$$

die gegen einen Fixpunkt konvergiert. Die Folge $\{x_n\}$ heißt die *Fixpunktiteration.*

Beispiel. Fixieren ein $a > 0$ und betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Man kann zeigen, dass f auf $X = [\sqrt{a}, \infty)$ eine Selbstabbildung ist und sogar eine Kontraktionsabbildung ist, was aus der Ungleichung

$$\sup_X |f'| < 1$$

folgt (siehe Aufgabe 129). Die Menge $X \subset \mathbb{R}$ ist ein vollständiger metrischer Raum da X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Somit konvergiert die Fixpunktiteration $\{x_n\}$ gegen einen Fixpunkt x. Der Gleichung $f(x) = x$ hat eine positive Lösung $x = \sqrt{a}$ woraus folgt dass $x_n \to \sqrt{a}$. Insbesondere lassen sich x_n als Annäherungen von $\sqrt{a}$ betrachten. Nach (11.12) haben wir

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

und x_0 kann beliebig in X gewählt werden. Zum Beispiel, sei $a = 2$. Setzen wir $x_0 = 2$ und

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Dann gilt $x_1 = f(2) = \frac{3}{2}$, $x_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$, $x_3 = f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408}$, $x_4 = f\left(\frac{577}{408}\right) = \frac{665\,857}{470\,832}$ und

$$x_5 = f\left(\frac{665\,857}{470\,832}\right) = \frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048} = 1.41421356237309505...,$$

was schon eine gute Annäherung von $\sqrt{2}$ mit 17 richtigen Nachkommastellen ist.

11.12 Kompakte Mengen und Extremwertsatz

Definition. Eine *Überdeckung* von K ist ein Mengensystem $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ von Teilmengen von X (wobei S eine beliebige Indexmenge ist), die K überdeckt, d.h.

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in S} V_\alpha,$$

Die Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ heißt *offen* wenn alle V_α offene Teilmengen von X sind.

Definition. Sei T eine Teilmenge von S. Die Familie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in T}$ heißt *Teilüberdeckung* von $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ wenn sie auch K überdeckt.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt* wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Eine kompakte Menge K heißt auch ein *Kompaktum*.

Satz 11.18 Seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist $K \subset X$ kompakt so ist auch das Bild $f(K) \subset Y$ kompakt.

Definition. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *beschränkt* wenn sie in einer metrischen Kugel liegt.

Definition. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *totalbeschränkt* wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von K mit Kugeln von Radius ε gibt.

Definition. Sei K eine Teilmenge von X. Eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten von X heißt *ε-Netz* von K wenn die Folge von Kugeln $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ eine Überdeckung von K ist.

Satz 11.19 In $\mathbb{R}^n$ mit beliebiger p-Metrik sind Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent.

Behauptung. Für $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$ betrachten wir das Paar (x, y) als Element von $\mathbb{R}^{k+l}$. Dann gilt

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\left(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty\right). \tag{11.13}$$

Behauptung. Bezeichnen wir mit $U_r^{\mathbb{R}^n}$ die Kugel in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der ∞-norm von radius r mit dem Zentrum 0. Dann gilt für $k + l = n$

$$U_r^{\mathbb{R}^n} = U_r^{\mathbb{R}^k} \times U_r^{\mathbb{R}^l}.$$

Behauptung. Seien $X \subset \mathbb{R}^k$ und $Y \subset \mathbb{R}^l$ totalbeschränkte Mengen. Dann ist das Produkt $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+l}$ auch totalbeschränkt.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *folgenkompakt* wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K enthält.

Hauptsatz 11.20 *(Äquivalente Bedingungen für Kompaktheit)* Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und K eine Teilmenge von X. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent.

(i) K ist kompakt.

(ii) K ist folgenkompakt.

(iii) K ist totalbeschränkt und abgeschlossen.

Behauptung. Ein $x \in X$ ist ein Häufungspunkt einer Folge $\{x_n\}$ aus X genau dann, wenn x ein Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ ist.

Korollar 11.21 Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 11.22 *(Extremwertsatz)* Seien K eine kompakte Teilmenge von einem metrischen Raum (X, d) und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren die beiden Werten $\max_K f$ und $\min_K f$. Insbesondere gilt diese Aussage wenn K eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Korollar 11.23 Alle Normen in $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

11.13 Fundamentalsatz der Algebra

Hauptsatz 11.24 *(Fundamentalsatz der Algebra)* Jedes Polynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

des Grades $n \geq 1$ mit komplexwertigen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$, wobei $a_n \neq 0$, hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Chapter 12

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

12.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Definition. Die Ableitung von f_k bezüglich x_j heißt *partielle Ableitung* 1-er Ordnung von f und wird mit $\partial_{x_j} f_k$ bezeichnet, d.h.

$$\boxed{\partial_{x_j} f_k(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f_k(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f_k(x_1, ..., x_j, ..., x_n)}{t}}.$$

Definition. Existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ für alle k und j, so heißt die Abbildung f *partiell differenzierbar* in x. In diesem Fall lässt sich die Menge von allen partiellen Ableitungen von f in einer $m \times n$ Matrix anordnen wie folgt:

$$J_f := (\partial_j f_k) = (f_{k;j}) = \begin{pmatrix} f_{1;1} & f_{1;2} & \cdots & f_{1;n} \\ f_{2;1} & f_{2;2} & \cdots & f_{2;n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m;1} & f_{m;2} & \cdots & f_{m;n} \end{pmatrix}, \tag{12.1}$$

wobei $k = 1, ..., m$ ein Zeilenindex ist und $j = 1, ..., n$ ein Spaltenindex. Die Matrix $J_f = J_f(x)$ heißt die *Jacobi-Matrix von f* an der Stelle x.

Beispiel. Betrachten wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit x, y. Die Jacobi-Matrix J_f ist eine 1×2 Matrix, d.h. die Zeile

$$J_f = (\partial_1 f_1, \partial_2 f_1) = (\partial_x f, \partial_y f).$$

Zum Beispiel, betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \tag{12.2}$$

Diese Funktion ist in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial_x f = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und analog

$$\partial_y f = \frac{x^3 - xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

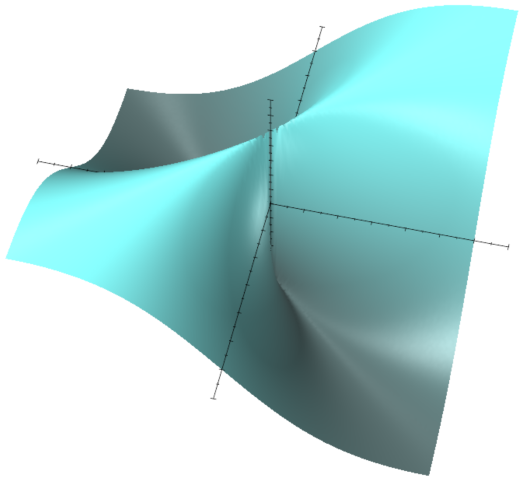
Zeigen wir, dass f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar. In der Tat haben wir nach Definition

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

da $f(t,0) = 0$, und analog $\partial_y f(0,0) = 0$. Somit ist f partiell differenzierbar in allen Punkten von $\mathbb{R}^2$.

Allerdings ist die Funktion f *unstetig* im Punkt $(0,0)$, da für jedes $t \neq 0$ gilt $f(t,t) = \frac{1}{2}$ und somit

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$



Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Beispiel. In $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ betrachten wir die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right),$$

was eine Transformation von Kartesischen Koordinaten nach Polarkoordinaten darstellt. In diesem Fall ist J_f eine 2×2 Matrix:

$$J_f = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\partial_x f_1 = \partial_x\left(\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\partial_y f_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

und

$$\partial_x f_2 = \partial_x \left(\arctan \frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\partial_y f_2 = \partial_y \left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Die Jacobi-Matrix ist somit

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Definition. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *total differenzierbar* in $x \in \Omega$ wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h) \text{ für } h \to 0. \tag{12.3}$$

Die lineare Abbildung A heißt die *totale Ableitung* von f in x und wird mit $f'(x)$ oder $\frac{df}{dx}(x)$ bezeichnet, so dass

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + o(h) \text{ für } h \to 0.} \tag{12.4}$$

Definition. Die Variable h in (12.3) heißt das *Differential* von x und wird auch mit dx bezeichnet. Der Ausdruck

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

heißt das *Differential* der Funktion f in x.

Beispiel. Seien B eine $m \times n$ Matrix und C eine $m \times 1$ Spalte. Betrachten wir eine *affine* Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(x) = Bx + C,$$

wobei x als eine $n \times 1$ Spalte betrachtet wird. Dann gilt

$$f(x+h) - f(x) = (B(x+h) + C) - (Bx + C) = Bh,$$

woraus folgt, dass f in jedem Punkt x differenzierbar ist und $f'(x) = B$.

Satz 12.1 Sei ein Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $x \in \Omega$ total differenzierbar. Dann ist f stetig in x.

Satz 12.2 Sei eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ an einem Punkt $x \in \Omega$ total differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x partiell differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = J_f(x). \tag{12.5}$$

Definition. Eine Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *stetig differenzierbar* wenn f partiell differenzierbar in Ω ist und alle partielle Ableitungen $\partial_j f_k$ stetig in Ω sind.

Satz 12.3 Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar so ist f total differenzierbar in jedem Punkt $x \in \Omega$.

Satz 12.4 *(Linearität der totalen Ableitung)* Seien die Abbildungen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \Omega$.

(a) Die Summe $f + g$ ist total differenzierbar in x und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

(b) Für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist cf total differenzierbar in x und es gilt

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

12.2 Kettenregel für totale Ableitung

Satz 12.5 *(Kettenregel)* Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Betrachten wir zwei Abbildungen $g : U \to \mathbb{R}^m$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$, und nehmen wir an dass die Komposition $f \circ g : U \to \mathbb{R}^l$ wohldefiniert ist (d.h. $g(U) \subset V$). Sei g total differenzierbar in einem Punkt $x \in U$ und f total differenzierbar im Punkt $y = g(x) \in V$. Dann ist die Komposition $f \circ g$ total differenzierbar in x und es gilt

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(y)\, g'(x)} = f'(g(x))\, g'(x). \tag{12.6}$$

Korollar 12.6 Unter den Bedingungen des Satzes *12.5* gilt die Identität

$$\boxed{(f \circ g)_{k;j}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_{k;i}(y)\, g_{i;j}(x)}. \tag{12.7}$$

wobei $y = f(x)$.

Sei $l = 1$, d.h. $f : V \to \mathbb{R}$. Dann gibt es in (12.7) nur eine Komponente $f_k = f_1 = f$, und wir erhalten

$$\boxed{\partial_{x_j} f\,(g_1(x), ..., g_i(x), ..., g_m(x)) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f)(y)\, \partial_{x_j} g_i(x)} \tag{12.8}$$

wobei $y = (g_1(x), ..., g_m(x))$. Die Identität (12.8) bedeutet folgendes: um die partielle Ableitung ∂_{x_i} der Komposition $f(g_1, .., g_m)$ zu bestimmen, man muss für jedes $i = 1, ..., m$ die partielle Ableitung $\partial_i f$ bestimmen, sie mit der Ableitung $\partial_{x_j} g_i$ multiplizieren und alles addieren.

Beispiel. Sei $m = 2$ und $g(x) = (u(x), v(x))$. Dann gilt nach (12.8)

$$\partial_{x_j} f(u(x), v(x)) = \partial_1 f\ \partial_{x_j} u + \partial_2 f\ \partial_{x_j} v.$$

Zum Beispiel, für die Funktion $f(u, v) = uv$ haben wir

$$\partial_1 f = \partial_u f = v, \quad \partial_2 f = \partial_v f = u$$

und somit
$$\partial_{x_j}(uv) = v\partial_{x_j}u + u\partial_{x_j}v$$
d.h. die Produktregel.

Beispiel. Bestimmen wir die partiellen Ableitungen ∂_x und ∂_y der Funktion
$$F(x,y) = \left(x^2+y\right)^{xy^2}$$
im Bereich $x>0$, $y>0$. Bemerken wir dass
$$F(x,y) = u^v =: f(u,v)$$
wobei
$$u = x^2+y \quad \text{und} \quad v = xy^2,$$
Somit gilt
$$\partial_x F = \partial_x f(u,v) = \partial_1 f\,\partial_x u + \partial_2 f\,\partial_x v.$$
Da
$$\partial_1 f = \partial_u f = vu^{v-1} \quad \text{und} \quad \partial_2 f = \partial_v f = u^v \ln u.$$
und
$$\partial_x u = 2x \quad \text{und} \quad \partial_x v = y^2,$$
so erhalten wir
$$\begin{aligned}\partial_x F &= \left(vu^{v-1}\right)\cdot 2x + \left(u^v \ln u\right)\cdot y^2\\ &= 2x^2y^2\left(x^2+y\right)^{xy^2-1} + y^2\left(x^2+y\right)^{xy^2}\ln\left(x^2+y\right).\end{aligned}$$
Analog gilt
$$\begin{aligned}\partial_y F &= \partial_y f(u,v) = \partial_1 f\,\partial_y u + \partial_2 f\,\partial_y v\\ &= vu^{v-1}\cdot 1 + \left(u^v\ln u\right)\cdot 2xy\\ &= xy^2\left(x^2+y\right)^{xy^2-1} + 2xy\left(x^2+y\right)^{xy^2}\ln\left(x^2+y\right).\end{aligned}$$

Korollar 12.7 *(Ableitung der inversen Funktion)* Seien U und V zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sei $g: U \to V$ eine bijektive Abbildung die in einem Punkt $x \in U$ total differenzierbar ist. Sei die inverse Abbildung $f = g^{-1}$ im Punkt $y = g(x)$ total differenzierbar. Dann gilt
$$f'(y) = g'(x)^{-1}. \tag{12.9}$$

Beispiel. Betrachten wir die kartesischen Koordinaten (x,y) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Funktionen von den Polarkoordinaten (r,θ), d.h.
$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) =: g(r,\theta).$$
Die totale Ableitung von $g(r,\theta)$ existiert und stimmt mit der Jacobi-Matrix überein
$$g' = J_g = \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{12.10}$$

da J_g stetig bezüglich (r, θ) ist.

Sei f die inverse Abbildung von g, d.h. f ergibt die Polarkoordinaten durch die kartesischen Koordinaten,

$$f(x, y) = (r, \theta).$$

Wir erhalten nach (12.9)

$$f' = (g')^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix},$$

wobei wir die folgende Formel für inverse Matrix verwendet haben:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

mit $D = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Andererseits gilt

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_x r & \partial_y r \\ \partial_x \theta & \partial_y \theta \end{pmatrix}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \cos\theta = \frac{x}{r}, & \partial_y r &= \sin\theta = \frac{y}{r} \\ \partial_x \theta &= -\tfrac{1}{r}\sin\theta = -\frac{y}{r^2}, & \partial_y \theta &= \tfrac{1}{r}\cos\theta = \frac{x}{r^2} \end{aligned}$$

Natürlich erhält man diese Identitäten auch direct aus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\tan\theta = y/x$.

Beispiel. Sei h eine total differenzierbare Funktion von (x, y) in einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Einsetzen x und y als Funktionen von r, θ ergibt uns h als Funktion von r, θ. Mit Hilfe von (12.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_r h &= \partial_x h \, \partial_r x + \partial_y h \, \partial_r y \\ &= \partial_x h \cos\theta + \partial_y h \sin\theta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_\theta h &= \partial_x h \, \partial_\theta x + \partial_y h \, \partial_\theta y \\ &= r\left(-\partial_x h \sin\theta + \partial_y h \cos\theta\right). \end{aligned}$$

Zum Beispiel, für die Funktion

$$h(x, y) = xe^y$$

erhalten wir

$$\partial_r h = e^y \cos\theta + xe^y \sin\theta = e^{r\sin\theta}\cos\theta + re^{r\sin\theta}\sin\theta\cos\theta$$

und

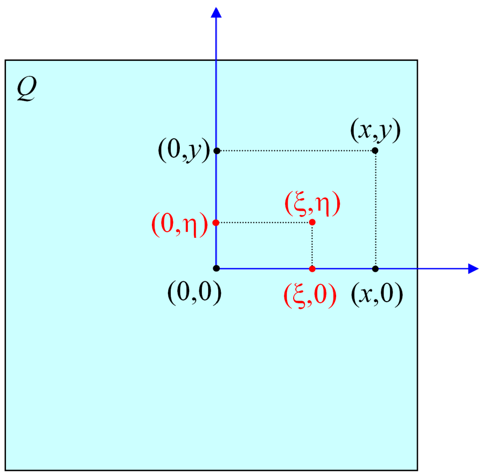
$$\partial_\theta h = r\left(-e^y \sin\theta + xe^y \cos\theta\right) = -re^{r\sin\theta}\sin\theta + r^2 e^{r\sin\theta}\cos^2\theta.$$

12.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung und Satz von Schwarz

Satz 12.8 *(Satz von Hermann Schwarz)* Nehmen wir an, dass die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in Ω die beiden gemischten partiellen Ableitungen $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ hat. Sind $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ in einem Punkt $x \in \Omega$ stetig, so gilt $\partial_{ij} f(x) = \partial_{ji} f(x)$.

Behauptung. Für jedes $(x, y) \in Q$ mit $x > 0$, $y > 0$ existieren $\xi \in [0, x]$ und $\eta \in [0, y]$ mit

$$F(x, y) = (\partial_{yx} f)(\xi, \eta)\, xy. \tag{12.11}$$



Beispiel. Betrachten wir die folgende Funktion in $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

und zeigen, dass $\partial_{12} f(0, 0)$ und $\partial_{21} f(0, 0)$ verschieden sind. Nach Definition gilt

$$\partial_{12} f(0, 0) = \partial_1 (\partial_2 f)(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial_2 f(x, 0) - \partial_2 f(0, 0)}{x}.$$

So, berechnen wir zuerst $\partial_2 f(x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_2 f(x, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x,$$

woraus folgt

$$\partial_{12} f(0, 0) = \partial_1 (\partial_2 f)(0, 0) = 1.$$

Analog haben wir

$$\partial_1 f(0, y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x\to 0} y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$

und
$$\partial_{21} f(0,0) = \partial_2 (\partial_1 f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial_1 f(0,y) - \partial_1 f(0,0)}{y} = -1.$$
Somit gilt $\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0)$.

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *k-fach (partiell) stetig differenzierbar* wenn alle partielle Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig in Ω sind. Die Menge von allen k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω wird mit $C^k(\Omega)$ bezeichnet. Insbesondere wird mit $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ die Menge von allen stetigen Funktionen auf Ω bezeichnet.

Korollar 12.9 Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ ist der Wert von jeder partiellen Ableitung $\partial_{i_1 \dots i_m} f$ der Ordnung $m \leq k$ unabhängig von der Reihenfolge von Ableiten ∂_{i_l}. D.h., für jede Folge $i_1, ..., i_m$ von $m \leq k$ Indizes und für jede Permutation $j_1, ..., j_m$ von $i_1, ..., i_m$ gilt in Ω
$$\partial_{i_1 \dots i_m} f = \partial_{j_1 \dots j_m} f.$$

12.4 Lokale Extrema

Definition. Ein Punkt $a \in \Omega$ heißt *lokale Maximumstelle* von f wenn es eine Kugel $U_\varepsilon(a) \subset \Omega$ mit $\varepsilon > 0$ gibt so dass a eine Maximumstelle von f in $U_\varepsilon(a)$ ist, d.h.
$$f(a) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(a).$$
Analog definiert man *lokale Minimumstelle.* Der Punkt a heißt *lokale Extremumstelle* von f, wenn a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

Satz 12.10 Sei $a \in \Omega$ eine lokale Extremumstelle von f in Ω. Ist f in a total differenzierbar, so gilt $f'(a) = 0$.

Definition. Sei f in Ω total differenzierbar. Die Punkte $x \in \Omega$ mit $f'(x) = 0$ heißen die *kritischen Punkte* von f.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion
$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$
im Bereich $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Es gilt
$$\partial_x f = y - \frac{50}{x^2} \text{ und } \partial_y f = x - \frac{20}{y^2}.$$
Die Gleichungen für die kritischen Punkte sind
$$\partial_x f(x,y) = 0 \text{ und } \partial_y f(x,y) = 0,$$
d.h.
$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 50 \\ xy^2 = 20. \end{cases}$$

Es folgt

$$x^3 = \frac{(x^2y)^2}{xy^2} = \frac{2500}{20} = 125 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

und

$$y^3 = \frac{(xy^2)^2}{x^2y} = \frac{400}{50} = 8 \quad \Rightarrow \; y = 2.$$

Somit gibt es einen einzigen kritischen Punkt $(5, 2)$.

Definition. Für eine Funktion $f \in C^2(\Omega)$ definieren wir die *totale zweite Ableitung* $f''(x)$ als die folgende $n \times n$ Matrix:

$$f''(x) = (\partial_{ij} f(x))_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) & ... & \partial_{1n} f(x) \\ \partial_{21} f(x) & \partial_{22} f(x) & ... & \partial_{2n} f(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial_{n1} f(x) & \partial_{n2} f(x) & ... & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch die *Hesse-Matrix* von f.

Definition. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A (und ihre quadratische Form Q) heißt

- *positive definit* wenn $Q(u) > 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A > 0$);
- *positiv semidefinit* wenn $Q(u) \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \geq 0$);
- *negativ definit* wenn $Q(u) < 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A < 0$);
- *negativ semidefinit* wenn $Q(u) \leq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \leq 0$);
- *indefinit* wenn $Q(u)$ positive und negative Werte annimmt.

Beispiel. Die identische Matrix $A = \mathrm{id}$ erzeugt die quadratische Form $Q(u) = u_1^2 + ... + u_n^2$, die offensichtlich positiv definit ist, so dass $A > 0$.

Im Fall $n = 2$ betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der quadratischen Form

$$Q(u) = 2u_1u_2.$$

Da $Q(u)$ positive und negative Werte annimmt, so ist A in diesem Fall indefinit.

Satz 12.11 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und f eine Funktion von $C^2(\Omega)$. Sei a ein kritischer Punkt von f, d.h. $f'(a) = 0$.

(a) *(Notwendige Bedingung für lokales Extremum)* Ist a eine lokale Maximumstelle von f, so gilt $f''(a) \leq 0$. Ist a eine lokale Minimumstelle von f so gilt $f''(a) \geq 0$.

(b) *(Hinreichende Bedingung für lokales Extremum)* Gilt $f''(a) < 0$ so ist a eine lokale Maximumstelle von f. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f.

Behauptung. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass $f''(x) < 0$ für alle $x \in U_\varepsilon(a)$.

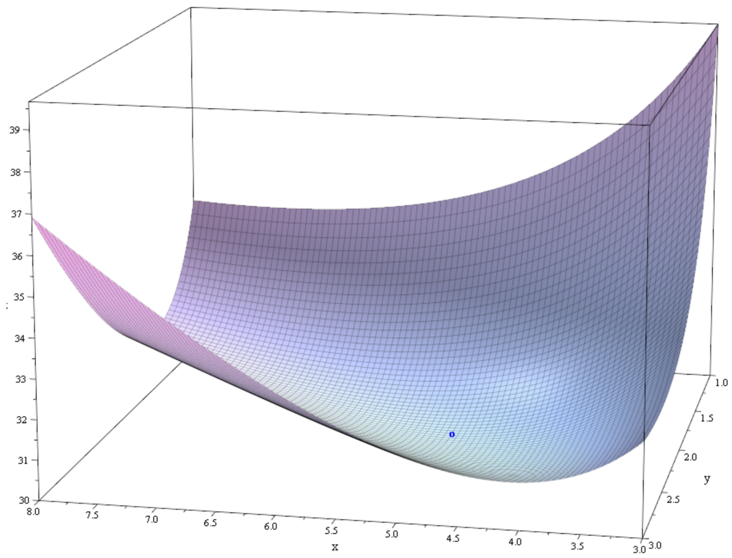
Beispiel. Betrachten wir wieder die Funktion

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

im Bereich $\{x, y > 0\}$. Wir wissen schon, dass diese Funktion den einzigen kritischen Punkt $(5,2)$ hat. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da det und Spur positiv sind, so ist die Hesse-Matrix positiv definit und $(5,2)$ eine lokale Minimumstelle.



Die lokale Minimumstelle von $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

Beispiel. Bestimmen wir die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

in $\mathbb{R}^2$. Wir haben

$$\partial_x f = 8x^3 - 2x \quad \text{und} \quad \partial_y f = 4y^3 - 4y$$

so dass die Gleichungen für die kritischen Punkte sind

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0, \\ 4y^3 - 4y = 0. \end{cases}$$

Es folgt $x = 0, \pm\frac{1}{2}$ und $y = 0, \pm 1$, insgesamt 9 kritische Punkte. Die Hesse-Matrix ist

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(0,0)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

negativ definit, so dass $(0,0)$ eine lokale Maximumstelle. In den Punkten $(0,\pm 1)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

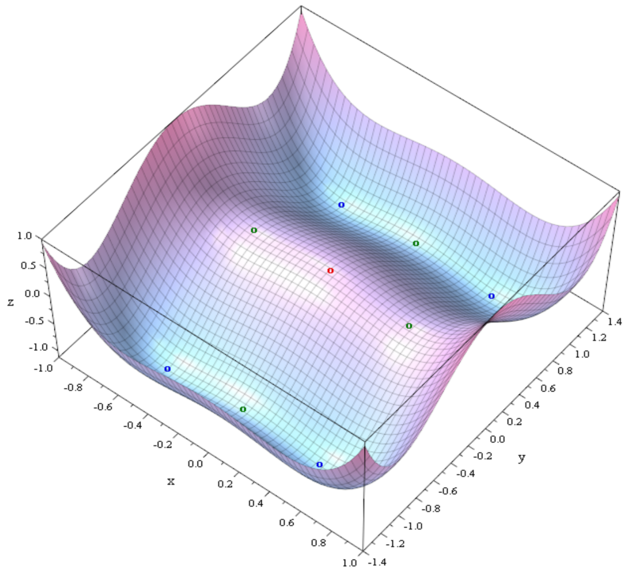
indefinit, so dass $(0,\pm 1)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

indefinit, so dass $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2},\pm 1\right)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit, so dass diese Punkte lokale Minimumstellen sind.



Die kritischen Punkten von $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

Somit hat f es eine lokale Maximumstelle in $(0,0)$ und vier lokale Minimumstellen in den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2},\pm 1\right)$. Die kritischen Punkte $(0,\pm 1)$ und $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ sind keine lokale Extremumstellen. In der Nähe von diesen Punkten sieht der Graph der Funktion f wie ein Sattel aus.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x,y) = \sin x \cos y$ in $\Omega = (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$. Da

$$\partial_x f = \cos x \cos y \quad \text{und} \quad \partial_y f = -\sin x \sin y,$$

so erfüllen die kritischen Punkte das System

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0 \\ \sin x \sin y = 0, \end{cases}$$

d.h. entweder $\cos x = 0$ und $\sin y = 0$ oder $\cos y = 0$ und $\sin x = 0$. Somit erhalten wir die folgenden kritischen Punkte:

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Bereichen wir die Hesse-Matrix von f:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\cos x \sin y & -\sin x \cos y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$f''(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0,$$

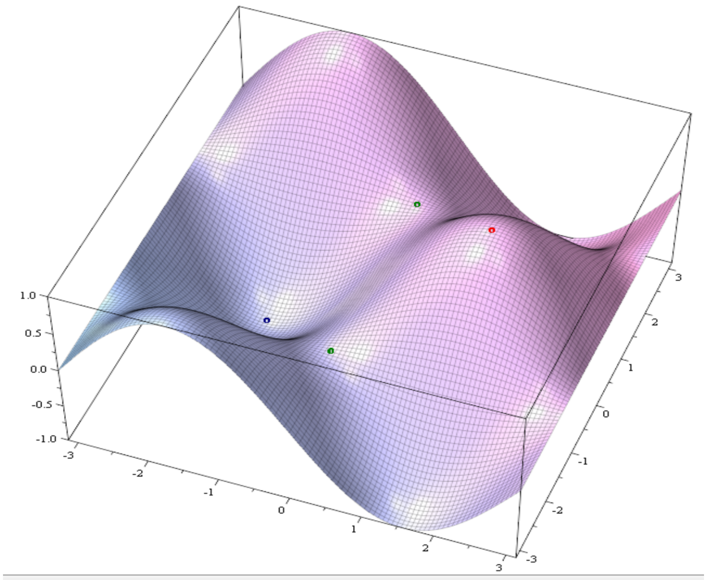
so dass $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ eine lokale Maximumstelle ist;

$$f''(-\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

so dass $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ eine lokale Minimumstelle ist;

$$f''(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f''(0, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind indefinit, so dass weder $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ noch $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ lokale Extremumstelle ist. In der Nähe von diesen Punkten sieht der Graph der Funktion wie ein Sattel aus.



Die Funktion $f(x, y) = \sin x \cos y$