Комплексы путей и их гомологии

Александр Григорьян[*] Йонг Лин[†] Юрий Муранов[‡] Шинтан Яу[§]

Январь 2015

Аннотация

В работе обсуждаются понятия комплекса путей и его гомологий, а также гомологии путей орграфов. Мы приводим некоторые результаты о свойствах гомологий путей для различных компексов путей и для орграфов.

1 Введение

В данной работе дается обзор понятия *комплекса путей*, которое может рассматриваться как обобщение понятия симплициального комплекса. Вкраце, комплекс путей P на конечном множестве V — это набор путей (=последовательностей точек) на V, таких что, если путь v лежит в P, то и усеченный путь, полученный из v удалением первой либо последней точки, снова лежит в P. Для данного комплекса P все пути из P называются *допустимыми*, тогда как пути вне P называются *недопустимыми*.

Любой симплициальный комплекс S естественно определяет комплекс путей, сопоставляя любому симплексу из S последовательность его вершин (см. детали в параграфе 3).

Однако, основной мотивацией для рассмотрения комплексов путей является теория ориентированных графов (орграфов). Орграф G — это пара (V, E), где V — это, как и выше, множество, а E является бинарным отношением на V, то есть E — это подмножество в $V \times V$. Если $(a, b) \in E$, то пара (a, b) называется ориентированным ребром; этот факт обозначается также $a \to b$. Любой орграф естественно задает комплекс путей, в котором допустимые пути идут вдоль ориентированных ребер.

Одно из наших ключевых наблюдений состоит в том, что любой комплекс путей P позволяет определить некоторый цепной комплекс с соответствующим граничным оператором, что приводит к понятию групп гомологий комплекса путей P. Мы будем называть эти гомологии *гомологиями путей*.

В случае, когда P возникает из симплициального комплекса S, гомологии путей комплекса P совпадают с симплициальными гомологиями S. Если P возникает из орграфа G, то мы получаем новое понятие — гомологии путей орграфа. Комплексы путей орграфов являются центральными объектами данной статьи. Хотя большинство результатов приведены для произвольных комплексов путей, мы всегда имеем в виду их применения

[*]Частично поддержан SFB 701 Исследовательского Совета Германии и грантами для визитов Гарвардского университета и Математического научного центра Университета Цинхуа

[†]Поддержан Фондом фундаментальных исследований для центральных университетов и Исследовательским фондом Китайского народного университета (11XNI004)

[‡]Частично поддержан грантом CONACyT 151338 и SFB 701 Исследовательского Совета Германии

[§]Частично поддержан грантом "Геометрия и топология сложных сетей", FA-9550-13-1-0097

для орграфов. С другой стороны, понятие комплекса путей представляет альтернативный подход к классическим результатам о симплициальных комплексах.

Было много попыток определить понятие (ко)гомологий для графов. На тривиальном уровне любой граф может рассматриваться как одномерный симплициальный комплекс, так что симплициальные группы гомологий определены. Однако, все группы гомологий в размерности 2 и выше будут тривиальны, что делает этот подход неинтересным.

Другой путь, чтобы превратить граф в симплициальный комплекс, состоит в рассмотрении всех его клик (=полных подграфов) в качестве симплексов соответствующих размерностей (см. [4], [14]). Тогда группы гомологий в высоких размерностях могут быть нетривиальны, но при этом подходе понятие графа теряет значение и становится частным случаем понятия симплициального комплекса. Кроме того, некоторые желательные функториальные свойства такиих гомологий не выполняюится, например формула Кюннета не выполняется для декартова произведения графов (например, декартово произведение двух 4-циклов имеет тривиальную группу H_2, в то время как группа H_1 нетривиальна для каждого 4-цикла).

Еще один подход к гомологиям орграфов может быть реализован с помощью гомологий Хохшильда. Действительно, допустимые пути в орграфе имеют естественную операцию умножения, которая позволяет определить понятие *алгебры путей* орграфа. Гомологии Хохшильда алгебры пути являются естественным объектом для рассмотрения. Однако, это было доказано в [13], гомологии Хохшильда порядка ≥ 2 тривиальны, что делает это подход не таким привлекательным.

В теориях сингулярных гомологий для графов используются заранее заданные малые графы в качестве базисных клеток, и определяются сингулярные цепи, как формальные суммы отображений базисных клеток в граф (см., например, [14], [16]). Однако, простые примеры показывают, что группы гомологий, полученные таким путем, существенно зависят от выбора базисных клеток. Кроме того, такие группы гомологий чрезвычайно сложно вычислять даже для небольших графов, а функториальные свойства не известны.

Гомологии путей орграфов, которые мы представляем в данной работе, имеют следующие преимущества по сравнению с ранее изучавшимися понятиями гомологий графов.

1. Гомологии путей могут быть нетривиальны во всех размерностях, даже для планарных графов гомологии путей могут быть нетривиальны в размерности 2. Кроме того, цепной комплекс, ассоциированный с комплексом путей, имеет более богатую структуру, чем симплициальный цепной комплекс. Он содержит не только клики, но и бинарные гиперкубы и другие интересные подграфы, которые напоминают полиэдры.

2. Гомологии путей легко вычислять. Для небольших орграфов гомологи путей могут быть вычислены вручную: либо по определению, либо с помощью простых свойств. Для более сложных орграфов это может быть сделано с помощью любого программного пакета, содержащего операции с матрицами, в частности, содержащего вычисление ранга матрицы.

3. Гомологии путей совместимы с гомотопичечкой теорией орграфов. Последняя была введена авторами в [9] (гомотопическая теория для неориентированных графов была разработана раньше в [1], [2]), где было доказано, что гомологии путей являются гомотопически инвариантными, и абелизация фундаментальной группы изоморфна одномерной группе гомологий.

4. Гомологии путей имеют хорошие функториальные свойства по отношению к графотеоретическим операциям, например, морфизмы диграфов индуцируют гоморфизмы гомологий путей. К тому же, гомологии прямого произведения диграфов (так же, как и джойна) удовлетворяют формуле Кюннета.

5. Теория гомологий путей является двойственной к теории когомологий диграфов, которая была введена Димакисом и Мюллер-Хоиссеном (см. [5] и [6]), а затем развита в [12]. Эта теория основывается на классификации из [3] внешних дифференцирований алгебры функций, заданных на множестве вершин орграфа.

В данной заметке мы не обсуждаем кограничный оператор и когомологии орграфов, а отсылаем читателя к работе [8], в которой дается детальный отчет обо всех этих понятиях. Кроме того, работа [8] содержит доказательства некоторых результатов, которые приведены здесь.

Мы считаем, что понятие гомологий путей орграфов (и двойственное понятие когомологий) имеет богатое математическое содержание и надеемся, что оно станет полезным инструментом в различных областях теоретической и прикладной математики. Например, это понятие используется в работе [11], чтобы дать новое элементарное доказательство теоремы Герстенхабера и Шака [7], которое дает представление симплициальных гомологий как гомологий Хохшильда. В работе [10] показана связь между гомологиями путей орграфов и кубическими гомологиями. Гомологии и гомотопии орграфов могут быть использованы в некоторых проблемах раскраски графов — первый пример такого типа появился в работе [9]. С другой стороны, вполне возможно, что понятие гомологий путей может быть использовано в практических применениях, таких как проверка покрытий в сенсорных сетях (см. [15]), и многих других.

Опишем кратко структуру работы и основные результаты. В параграфе 2 мы вводим понятие граничного оператора на путях, заданных на конечном множестве V. В параграфе 3 мы определяем понятия комплекса путей, ∂-инвариантного пути (элемента цепного комплекса), и гомологии путей. В параграфе 4 мы приводимм несколько примеров орграфов и ∂-инвариантных путей в них. Мы приводим несколько основных результатов о гомологиях путей, например, лемму Пуанкаре для звездных орграфов (предложение 4.5). В параграфе 5 мы приводим результаты о сохранениии гомологий путей при некоторых простых преобразованиях орграфов (предложения 5.1 и 5.4).

В параграфе 6 мы вводим операции *джойна* двух комплексов путей и для него приводим формулу Кюннета (теорема 6.4). Частными случаями джойна являются операции построения конуса и надстройки орграфа, которые ведут себя гомологически таким же образом, как и в классической алгебраической топологии. В параграфе 7 мы вводим понятие скрещенного произведения путей и прямого произведения комплексов путей. Последнее соответствует понятию прямого произведения орграфов. Мы приводим формулу Кюннета для прямого произведения (теорема 7.4) и даем несколько примеров.

Технически наиболее сложные и интересные результаты этого исследования даются теоремами 6.4 и 7.4 (см. детали в [8]).

2 Пути на конечном множестве

Пусть V — произвольное непустое конечное множество, элементы которого мы будем называть вершинами. Для любого неотрицательного целого числа p *элементарный p-путь* на множестве V — это произвольная последовательность $\{i_k\}_{k=0}^{p}$, состоящая из $p+1$ вершины из V (априори вершины пути не должны быть различны). Для $p=-1$

элементарный p-путь является пустым множеством $\emptyset$. Обозначим также через $i_0...i_p$, не делая пробелов между вершинами, произвольный p-путь $\{i_k\}_{k=0}^p$.

Зафиксируем поле $\mathbb{K}$ и рассмотрим $\mathbb{K}$-линейное пространство $\Lambda_p = \Lambda_p(V)$, которое состоит из всех формальных линейных комбинаций всевозможных элементарных p-путей с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Элементы из Λ_p называются *p-путями* на V. Элементарный p-путь $i_0...i_p$, как элемент из Λ_p, будем обозначать $e_{i_0...i_p}$. Пустое множество, как элемент Λ_{-1}, будем обозначать e.

По определению, семейство $\left\{e_{i_0...i_p} : i_0, ..., i_p \in V\right\}$ является базисом Λ_p. Каждый p-путь v имеет единственное представление в форме

$$v = \sum_{i_0,...,i_p \in V} v^{i_0 \cdots i_p} e_{i_0...i_p}, \tag{2.1}$$

где $v^{i_0 \cdots i_p} \in \mathbb{K}$. Например, Λ_0 состоит из всех линейных комбинаций элементов e_i, где i — вершина из V, Λ_1 состоит из всех линейных комбинаций элементов e_{ij}, где ij — пара вершин из V, и т. д. Заметим, что Λ_{-1} состоит из всех кратных элемента e, так что $\Lambda_{-1} \cong \mathbb{K}$.

Для любого $p \geq 0$ определим *граничный оператор* $\partial : \Lambda_p \to \Lambda_{p-1}$, как линейный оператор, который действует на элементарные пути по правилу

$$\partial e_{i_0...i_p} = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q e_{i_0...\widehat{i_q}...i_p}, \tag{2.2}$$

где символ $\widehat{i_q}$ обозначает пропуск индекса i_q. Например, мы имеем

$$\partial e_i = e, \quad \partial e_{ij} = e_j - e_i, \quad \partial e_{ijk} = e_{jk} - e_{ik} + e_{ij}. \tag{2.3}$$

Следовательно, для любого $v \in \Lambda_p$,

$$(\partial v)^{j_0 \cdots j_{p-1}} = \sum_{k \in V} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q v^{j_0 \cdots j_{q-1} k j_q \cdots j_{p-1}}. \tag{2.4}$$

Например, для любого $u \in \Lambda_0$ и $v \in \Lambda_1$ мы получаем

$$\partial u = \sum_{k \in V} u^k \quad \text{and} \quad (\partial v)^i = \sum_{k \in V} \left(v^{ki} - v^{ik}\right).$$

Положим также $\Lambda_{-2} = \{0\}$, и определеим $\partial : \Lambda_{-1} \to \Lambda_{-2}$, как нулевое отображение.

Лемма 2.1 *Выполняется условие $\partial^2 = 0$. Следовательно, $\Lambda_* = \{\Lambda_p\}$ является цепным комплексом.*

Для всех $p, q \geq -1$ и для любых двух путей $u \in \Lambda_p$ и $v \in \Lambda_q$ определим их *джойн* $uv \in \Lambda_{p+q+1}$ следующим образом:

$$(uv)^{i_0 \cdots i_p j_0 \cdots j_q} = u^{i_0 \cdots i_p} v^{j_0 \cdots j_q}. \tag{2.5}$$

Очевидно, что взятие джойна путей является билинейной операцией, которая удовлетворяет закону асоциативности (но она не коммутативна). Из (2.5) следует, что

$$e_{i_0...i_p} e_{j_0...j_q} = e_{i_0...i_p j_0...j_q}. \tag{2.6}$$

Если $p = -2$ и $q \geq -1$, то положим $uv = 0 \in \Lambda_{q-1}$. Аналогичное правило применяется, если $q = -2$ и $p \geq -1$.

Лемма 2.2 (Правило произведения) *Для всех $p, q \geq -1$ и $u \in \Lambda_p$, $v \in \Lambda_q$ мы имеем*

$$\partial\,(uv) = (\partial u)v + (-1)^{p+1}\, u\partial v. \tag{2.7}$$

Мы говорим, что элементарный путь $i_0...i_p$ является *нерегулярным*, если $i_{k-1} = i_k$ для некоторого $k = 1, ..., p$, и он является *регулярным* в противном случае. Например, 1-путь ii является нерегулярным, однако 2-путь iji является регулярным, при условии $i \neq j$. Для любого $p \geq -1$ рассмотрим подпространство

$$\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p\,(V) := \operatorname{span}\left\{e_{i_0...i_p} : i_0...i_p \text{ is regular}\right\}$$

пространства Λ_p, порожденное регулярными элементарными путями. Заметим, что $\mathcal{R}_p = \Lambda_p$ для $p \leq 0$, но $\mathcal{R}_p$ будет строго меньше Λ_p для $p \geq 1$. Элементы $\mathcal{R}_p$ называются *регулярными* p-путями.

Мы хотели бы рассматривать оператор ∂ на пространстве $\mathcal{R}_p$. Однако, оператор ∂ не является инвариантным на пространстве регулярных путей. Например, $e_{iji} \in \mathcal{R}_2$ для $i \neq j$, тогда как его граница $\partial e_{iji} = e_{ji} - e_{ii} + e_{ij}$ не лежит в $\mathcal{R}_1$, так как она имеет нерегулярную компоненту e_{ii}. То же самое относится к понятию джойна путей: джойн двух регулярных путей не обязательно будет регулярным, например, $e_i e_i = e_{ii}$.

Тем не менее, легко определить *регулярный* граничный оператор ∂ и *регулярный* джойн, которые будут инвариантны на пространствах $\mathcal{R}_p$: если после применения оператора ∂ или операции джойна или присоединиться, результат содержит нерегулярные члены, то все эти члены должны быть отброшены. Строгое определение требует рассмотрения факторпространства по всем нерегулярным путям, но мы опускаем очевидные детали. Например, мы получаем для нерегулярного опрератора ∂:

$$\partial e_{iji} = e_{ji} - e_{ii} + e_{ij},$$

в то время как для регулярного оператора ∂:

$$\partial e_{iji} = e_{ji} + e_{ij},$$

так как e_{ii} не является регулярным и, следовательно, заменен на 0. Для нерегулярного джойна мы имеем $e_{ij}e_{ji} = e_{ijji}$, в то время как для регулярного джойна $e_{ij}e_{ji} = 0$, так как e_{ijji} не является регулярным.

Можно показать, что регулярные версии оператора ∂ и джойна удовлетворяют условиям $\partial^2 = 0$ и правилу произведения (2.7), для всех $u \in \mathcal{R}_p$ и $v \in \mathcal{R}_q$. В частности, $\mathcal{R}_* = \{\mathcal{R}_p\}$ является цепным комплексом.

Пусть V, V' — два конечных множества. Любое отображение $f : V \to V'$ индуцирует отображение

$$f_* : \Lambda_p(V) \to \Lambda_p(V')$$

по правилу

$$f_*\left(e_{i_0...i_p}\right) = e_{f(i_0)...f(i_p)}.$$

Отображение f_* очевидно коммутирует с ∂ и, следовательно, является морфизмом $\Lambda_*(V) \to \Lambda_*(V')$ цепных комплексов. Так как f_* отображает нерегулярные пути в нерегулярные, то оно индуцирует морфизм $\mathcal{R}_*(V) \to \mathcal{R}_*(V')$ цепных комплексов.

3 Комплексы путей

Определение 3.1 *Комплекс путей* на множестве V — это непустой набор P элементарных путей на V, для которых выполняется следующее свойство: для любого $n \geq 0$,

$$\text{если } i_0...i_n \in P, \text{ то и усеченные пути } i_0...i_{n-1} \text{ и } i_1...i_n \text{ лежат в } P. \tag{3.1}$$

Множество всех n-путей из P обозначается P_n. Когда комплекс путей P фиксирван, все пути из P называются *допустимыми*, в то время как все элементарные пути, которые не находятся в P, называются *недопустимыми*.

Множество P_{-1} состоит из одного пустого пути e. Элементы из P_0 (то есть, допустимые 0-пути) называются *вершинами* P. Ясно, что P_0 является подмножеством V. По свойству (3.1), если $i_0...i_n \in P$, то все i_k являются вершинами P. Следовательно, мы можем (и будем) удалять из множества V все элементы, не являющиеся вершинами, так что $V = P_0$. Элементы из P_1, которые являются допустимыми 1-путями, называются *ребрами* P. Согласно (3.1), если $i_0...i_n \in P$, то все 1-пути $i_{k-1}i_k$ являются ребрами.

Пример 3.2 По определению, абстрактный конечный симплициальный комплекс S состоит из набора подмножеств конечного множества вершин V, удовлетворяющего следующему свойству:

$$\text{если } \sigma \in S, \text{ то любое подмножество } \sigma \text{ также лежит в } S.$$

Пронумеруем элементы из V различными числами и отождествим любое подмножество s множества V с элементарным путем, который состоит из элементов s, расположенных в (строго) возрастающем порядке. Следовательно, мы можем рассматривать S как набор элементарных путей на V. Тогда определяющее свойство симплекса можно переформулировать следующим образом:

$$\begin{gathered}\text{если элементарный путь лежит в } S,\\ \text{то любая его подпоследовательность также лежит в } S.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Следовательно, семейство S удовлетворяет свойству (3.1), так что S является комплексом путей. Допустиимые n-пути в S — это в точности n-симплексы.

Например, симплициальный комплекс на рис. 1(слева) имеет следующий комплекс путей:

0-пути: $0, 1, ..., 8$

1-пути: $01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 12, 34, 35, 45, 67, 68, 78$

2-пути: $012, 678, 034, 035, 045, 678$

3-пути: 0345.

Пример 3.3 Пусть $G = (V, E)$ — конечный орграф, где V — конечное множество вершин, а E — конечное множество ориентированных ребер, то есть $E \subset V \times V$. Тот факт, что $(i, j) \in E$, будет также обозначаться через $i \to j$.

Элементарный n-путь $i_0...i_n$ на V называется допустимым, если $i_{k-1} \to i_k$ для любого $k = 1, ..., n$. Обозначим через $P_n = P_n(G)$ множество всех допустимых n-путей. В частности, мы получаем $P_0 = V$ и $P_1 = E$. Ясно, что набор $\{P_n\}$ всех допустимых путей удовлетворяет условию (3.1), так что $\{P_n\}$ является комплексом путей. Этот комплекс путей естественно определяется орграфом G, и мы будем его обозначать $P(G)$.

Например, ограф на рис. 1(справа) имеет следующий комплекс путей:

0-пути: $0, 1, ..., 8$

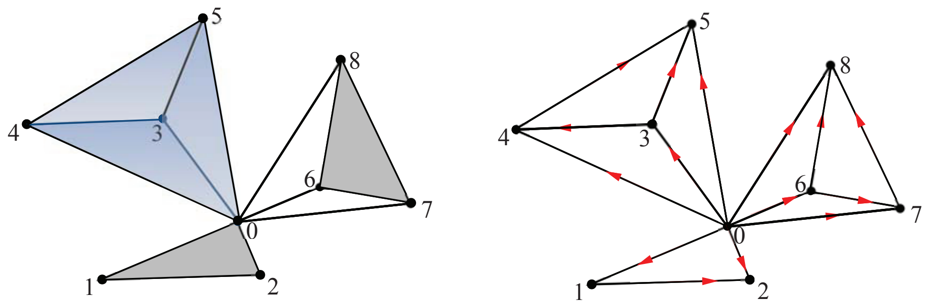


Рис. 1: Симплициальный комплекс (слева) и орграф (справа).

1-пути: $01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 12, 34, 35, 45, 67, 68, 78$
2-пути: $012, 678, 034, 035, 045, 067, 068, 678$
3-пути: $0345, 0678$.

Легко увидеть, что комплекс путей возникает из орграфа тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему дополнительному условию: если в пути $i_0 ... i_n$ все пары $i_{k-1} i_k$ являются допустимыми, то и весь путь $i_0 ... i_n$ будет допустимым.

Будем говорить, что комплекс путей P является *совершенным*, если любая подпоследовательность допустимого элементарного пути из P также является допустимым путем. Будем говорить, что комплекс путей P является *монотонным*, если существует вещественно-значная функция на множестве вершин из P, которая строго монотонно возрастает вдоль любого пути из P. Достаточно легко показать, что комплекс P возникает из симплициального комплекса тогда и только тогда, когда P является совершенным и монотонным.

Для произвольного комплекса путей $P = \{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ на конечном множестве V и для любого целого $n \geq -1$ рассмотрим $\mathbb{K}$-линейное пространство $\mathcal{A}_n$, которое порождено элементарными n-путями из P, то есть

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(P) = \left\{ \sum_{i_0, \dots, i_n \in V} v^{i_0 \dots i_n} e_{i_0 \dots i_n} : i_0 ... i_n \in P_n, \ v^{i_0 \dots i_n} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Элементы из $\mathcal{A}_n$ называются *допустимыми* n-путями. По построению, $\mathcal{A}_n$ является подпространством Λ_n. Например, $\mathcal{A}_p = \Lambda_p$ для $p \leq 0$, в то время как $\mathcal{A}_1$ порождено всеми ребрами из P, и может быть меньше чем Λ_1.

Мы хотели бы ограничить оператор ∂, определенный на пространствах Λ_n, на подпространства $\mathcal{A}_n$. Может случиться так, что для некоторых комплексов $\partial \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1}$, так что ограничение получается непосредственно. Если это не так, то необходима дополнительная конструкция, как будет объяснено ниже. Вложение $\partial \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1}$ имеет место, в частности, для совершенных комплексов путей. В этом случае мы получаем цепной комплекс

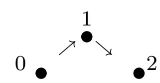
$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \mathcal{A}_0 \leftarrow ... \leftarrow \mathcal{A}_{n-1} \leftarrow \mathcal{A}_n \leftarrow ..., \tag{3.3}$$

группы гомологий которого обозначаются $\widetilde{H}_n(P), n \geq -1$, и называются *приведенными гомологиями комплекса путей* P. Рассмотрим также усеченный комплекс

$$0 \leftarrow \mathcal{A}_0 \leftarrow ... \leftarrow \mathcal{A}_{n-1} \leftarrow \mathcal{A}_n \leftarrow ..., \tag{3.4}$$

группы гомологий которого обозначаются $H_n(P), n \geq 0$, и называются *гомологиями комплекса путей* P. Например, эта конструкция работает, если комплекс путей P созникает из симплициального комплекса S. Тогда группы гомологии комплекса путей P совпадают с соответствующими симплициальными группами гомолоий симплициального комплекса S.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $\partial \mathcal{A}_n$ не обязательно будет подпространством $\mathcal{A}_{n-1}$. Например, так будет для орграфа



в котором 2-путь e_{012} является допустимым, в то время как $\partial e_{012} = e_{12} - e_{02} + e_{01}$ не является допустимым, так как e_{02} — недопустим.

Для общего комплекса путей P и для любого $n \geq -1$ рассмотрим следующее подпространство пространства $\mathcal{A}_n$:

$$\Omega_n = \Omega_n(P) = \{v \in \mathcal{A}_n : \partial v \in \mathcal{A}_{n-1}\}. \tag{3.5}$$

Отметим, что $\Omega_n = \mathcal{A}_n$ для $n \leq 1$, в то время как для $n \geq 2$ пространство Ω_n может быть на самом деле меньше, чем $\mathcal{A}_n$. Мы утверждаем, что всегда $\partial \Omega_n \subset \Omega_{n-1}$. Действительно, если $v \in \Omega_n$, то $\partial v \in \mathcal{A}_{n-1}$ и $\partial(\partial v) = 0 \in \mathcal{A}_{n-2}$, откуда следует $\partial v \in \Omega_{n-1}$, что и требовалось доказать.

Элементы из Ω_n называются *∂-инвариантными* n-путями. Таким образом, мы получили *приведенный* цепной комплекс ∂-инвариантных путей:

$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \Omega_0 \leftarrow ... \leftarrow \Omega_{n-1} \leftarrow \Omega_n \leftarrow \Omega_{n+1} \leftarrow ... \tag{3.6}$$

в котором все отображения задаются ∂. Рассмотри также его *неприведенную* версию

$$0 \leftarrow \Omega_0 \leftarrow ... \leftarrow \Omega_{n-1} \leftarrow \Omega_n \leftarrow \Omega_{n+1} \leftarrow ... \tag{3.7}$$

Группы гомологий комплекса (3.7) называются *группами гомологий комплекса путей* P и обозначаются $H_n(P), n \geq 0$. Группы гомологий комплекса (3.6) называются *приведенными группами гомологий комплекса путей* P и обозначаются $\widetilde{H}_n(P), n \geq -1$.

Определение 3.4 Комплекс путей P называется *регулярным*, если он не содержит 1-путей, имеющих форму ii. Эквивалентно, P является регулярным, если все пути $i_0...i_n \in P$ являются регулярными.

Например, комплекс путей симплициального комплекса всегда будет регулярным. Комплекс путей орграфа будет регулярным тогда и только тогда, когда орграф не имеет петель, то есть, когда 1-пути ii не являются ребрами.

Для регулярного комплекса путей вышеприведенная конструкция пространства Ω_n допускает следующую версию. В этом случае пространство допустимых n-путей $\mathcal{A}_n$ является подпрострнством пространства $\mathcal{R}_n$ регулярных n-путей, и мы можем заменить в (3.5) нерегулярный граничный оператор ∂ она Λ_n на регулярный граничный оператор на $\mathcal{R}_n$, как описано в параграфе 2. Полученное в результате пространство Ω_n называется *регулярным* пространством ∂-инвариантных путей. Следовательно, если комплекс путей P является регулярным, то мы можем также рассмотреть регулярные версии цепных комплексов (3.6) и (3.7) и регулярные версии групп гомологий.

Если комплекс путей P является совершенным, мы получаем $\Omega_n(P) = \mathcal{A}_n(P)$ для всех n (в этом случае нет разницы между регулярной и нерегулярной версиями). Следовательно, в этом случае цепной комплекс (3.6) идентичен с (3.3), и (3.7) идентичен с (3.4).

Если $P(G)$ является комплексом путей орграфа G, то мы будем использовать обозначение $\Omega_n(G) := \Omega_n(P(G))$. Соответствующие группы гомологий обозначаются $H_n(G)$, $\widetilde{H}_n(G)$ и называются *гомологиями путей орграфа* G.

Эйлерова характеристика комплекса путей определяется равенством

$$\chi(P) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H_p(P), \tag{3.8}$$

при условии, что n — достаточно большое, чтобы $\dim H_p(P) = 0$ для всех $p > n$. Для регулярного комплекса путей P существуют регулярная и нерегулярная версии $\chi(P)$, которые могут не совпадать.

Опишем некоторые простые свойства пространства $\Omega_n(P)$ и $H_n(P)$.

Предложение 3.5 (a) *Если* $\dim \Omega_n = 0$, *то* $\dim \Omega_p = 0$ *для всех* $p > n$.

(b) *Для регулярного цепного комплекса* $\{\Omega_*\}$ *условие* $\dim \Omega_n \leq 1$ *для некоторого* n *влечет, что* $\dim \Omega_p = 0$ *для всех* $p > n$.

Предложение 3.6 *Для любого комплекса путей* P *выполняется* $\dim H_0(P) = C$, *где* C *— число компонент связности*[1] P. *В частности, если* P *связно, то* $\dim H_0(P) = 1$ *и, следовательно,* $\dim \widetilde{H}_0(P) = 0$.

Пусть P — регулярный комплекс путей на множестве V, и P' — регулярный комплекс путей на множестве V'.

Определение 3.7 Мы будем говорить, что отображение $f : V \to V'$ является морфизмом комплекса путей P в P', если, для любого пути $v \in P$, путь $f_*(v)$ либо лежит в P', либо не является регулярным.

Предложение 3.8 *Любой морфизм* $f : V \to V'$ *комплекса путей* P *в* P' *индуцирует морфизм регулярных цепных комплексов*

$$f_* : \Omega_*(P) \to \Omega_*(P')$$

и, следовательно, гомоморфизм регулярных групп гомологий

$$f_* : H_*(P) \to H_*(P').$$

Proof. Любой допустимый путь $v \in \mathcal{A}_n(P)$ является линейной комбиацией путей $e_{i_0 \ldots i_n} \in P$ и, следовательно, $f_*(v)$ будет линейной комбинацией путей $f_*(e_{i_0 \ldots i_n})$, которые либо лежат в P', либо не являются регулярными. Поскольку нерегулярные пути рассматриваются как нули, мы получаем, что $f_*(v) \in \mathcal{A}_n(P')$. Если $v \in \Omega_n(P)$, то $\partial v \in \mathcal{A}_{n-1}(P)$ и, следовательно,

$$\partial(f_*(v)) = f_*(\partial v) \in \mathcal{A}_{n-1}\left(P'\right),$$

что влечет $f_*(v) \in \Omega_n(P')$. Следовательно, f_* — морфизм регулярных цепных комплексов. Второе утверждение стандартно. ■

[1] *Компонента связности* P задается таким минимальным подмножеством U в V, что, если $i \in U$, то U содержит любую вершину $j \in V$, для которой ij или ji является допустимым 1-путем.

4 ∂-инвариантные пути на орграфах

В этом параграфе мы рассматриваем орграфы без петель. Если $G = (V, E)$ — орграф без петель, то его комплекс путей $P(G)$ будет регулярным. Мы имеем здесь дело с регулярными пространствами $\Omega_n(G) = \Omega_n(P(G))$ и регулярными группами гомологий $H_n(G) = H_n(P(G))$ и $\widetilde{H}_n(G) = \widetilde{H}_n(P(G))$.

Определение 4.1 *Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — два орграфаs. Отображение $f : V \to V'$ называется морфизмом орграфа G в G', если для любого ребра $a \to b$ в G либо $f(a) \to f(b)$ будет ребром в G', либо $f(a) = f(b)$.*

Другими словами, морфизм f орграфов переводит любое ребро в ребро или в вершину. Отсюда следует, что образ любого допустимого пути в G будет либо допустимым путем в G', либо нерегулярным путем в G'. Таким образом, отображение $f : V \to V'$фактически является морфизмом комплекса путей $P(G)$ в $P(G')$. По предложению 3.8 мы получаем, что морфизм орграфов индуцирует морфизм регулярных цепных комплексов $\Omega_*(G) \to \Omega_*(G')$ и групп гомологий $H_*(G) \to H_*(G')$.

Будем называть *треугольником* последовательность из трех различных вершин $a, b, c \in V$, для которых заданы ориентированные ребра $a \to b, b \to c, a \to c$:

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr] & \\ a \arrow[ur] \arrow[rr] & & c \end{tikzcd}$$

Заметим, что треугольник определяет 2-путь $e_{abc} \in \Omega_2$, как $e_{abc} \in \mathcal{A}_2$, и $\partial e_{abc} = e_{bc} - e_{ac} + e_{ab} \in \mathcal{A}_1$.

Будем называть *квадратом* последовательность из четырех различных вершин$a, b, b', c \in V$, для которых заданы ориентированные ребра $a \to b, b \to c, a \to b', b' \to c$:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] & c \\ a \arrow[u] \arrow[r] & b' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Заметим, что квадратопределяет 2-путь $v := e_{abc} - e_{ab'c} \in \Omega_2$, как $v \in \mathcal{A}_2$, и

$$\partial v = (e_{bc} - e_{ac} + e_{ab}) - (e_{b'c} - e_{ac} + e_{ab'}) = e_{ab} + e_{bc} - e_{ab'} - e_{b'c} \in \mathcal{A}_1.$$

Предложение 4.2 *Предположим, что орграф $G = (V, E)$ не содержит квадратов (в качестве подграфов). Тогда $\dim \Omega_2(G)$ равна числу различных треугольников в G, и $\dim \Omega_p(G) = 0$ для всех $p > 2$. В частности, если G не содержит ни квадрата ни треугольника, то $\dim \Omega_p(G) = \dim H_p(G) = 0$ for all $p \geq 2$.*

При наличии квадратов невозможно связать прямо $\dim \Omega_2$ с числом квадратов и треугольников, поскольку между ними может быть линейная зависимость, , как в следующем примере.

Пример 4.3 В следующем орграфе

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] & 4 \\ & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

есть три квадрата $0,1,2,4$, $0,1,3,4$ и $0,2,3,4$, которые определяют три ∂-инвариантных пути

$$e_{014}-e_{024},\quad e_{024}-e_{034},\quad e_{034}-e_{014}.$$

Эти пути линейно зависимы, так как их сумма равна 0. Легко показать, что $\dim\Omega_2=2$. Для этого орграфа все приведенные группы гомологий тривиальны.

Кроме того, в присутствии квадратов могут быть нетривиальные Ω_p для произвольного p, как видно из многочисленных примеров в следующих параграфах.

Змея длины p — это орграф с $p+1$ вершиной, обозначаемыми $0,1,...,p$, и с ребрами $i\to(i+1)$ и $i\to(i+2)$ (см. рис. 2). В частности, любая тройка $i\,(i+1)\,(i+2)$ является треугольником.

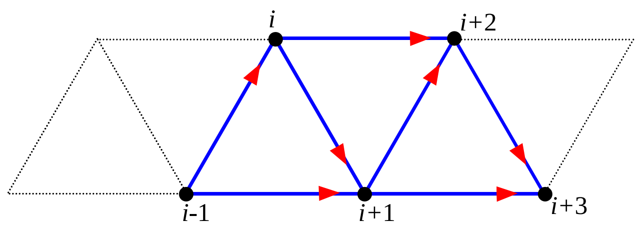


Рис. 2: Змея.

Змея длины p содержит ∂-инвариантный p-путь $v=e_{01\ldots p}$. Действительно, этот путь очевидно являяется допустимым, его граница

$$\partial v=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\,e_{0\ldots\widehat{k}\ldots p}$$

также является допустимой (так как $(k-1)\,(k+1)$ — ребро), следовательно, $v\in\Omega_p$.

Для любого $n\geq 0$ определеим *орграф-симплекс* Sm_n следующим образом: $\{0,1,...,n\}$ — его множеством вершин, а $i\to j$ являются ребрами для всех $i<j$. Например, мы имеем

$$\mathrm{Sm}_1=\ {}^0\bullet\ \to\ \bullet^1,\qquad \mathrm{Sm}_2=\begin{array}{ccc} & \overset{2}{\bullet} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ {}^0\bullet & \to & \bullet^1\end{array},$$

и Sm_3 изображен на рис. 3.

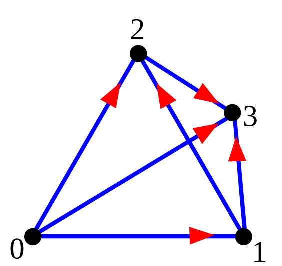


Рис. 3: Орграф-симплекс Sm_3 размерности 3.

Так как симплекс содержит змею в качестве подграфа, n-путь $v=e_{01\ldots n}$ является ∂-инвариантным на Sm_n .

Определение 4.4 Будем говорить, что орграф G является *звездчатым*, если существует такая вершина a (называемая центром звезды), что существует ребро $a \to b$ для всех $b \neq a$. Аналогично, орграф G называется обратно звездчатым, если существует такая вершина a (называемая центром звезды), что существует ребро $b \to a$ для всех $b \neq a$.

Например, любой орграф-симплекс является звездчатым и обратно звездчатым.

Предложение 4.5 (Лемма Пуанкаре) *Если диграф G является (обратно) звездчатым, то приведенные группы гомологий $\widetilde{H}_n(G)$ тривиальны.*

Например, все приведенные группы гомологий орграфа-симплекса of Sm_n тривиальны.

Будем говорить, что орграф $G = (V, E)$ является *циклическим графом*, если он связен (как неориентированный граф), и любая вершина имеет степень 2. Для циклического графа мы имеем $\dim H_0(G) = 1$ и $\dim \Omega_0(G) = |V| = |E| = \dim \Omega_1(G)$.

Предложение 4.6 *Пусть G — циклический граф. Тогда*

$$\dim \Omega_p(G) = 0 \quad \forall p \geq 3 \quad \text{и} \quad \dim H_p(G) = 0 \ \forall p \geq 2.$$

Если G является треугольником или квадратом, то

$$\dim \Omega_2(G) = 1, \ \dim H_1(G) = 0, \quad \chi = 1,$$

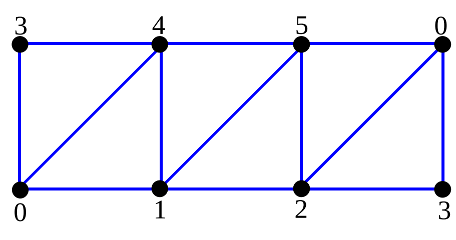
тогда как в противном случае

$$\dim \Omega_2(G) = 0, \quad \dim H_1(G) = 1, \quad \chi = 0.$$

В последнем случае образующим элементом для $H_1(G)$ является 1-путь σ, такой что

$$\sigma^{i(i+1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\,(i+1) \text{ является ребром} \\ -1, & \text{если } (i+1)\,i \text{ является ребром,} \end{cases} \tag{4.1}$$

а другие компоненты σ исчезают.



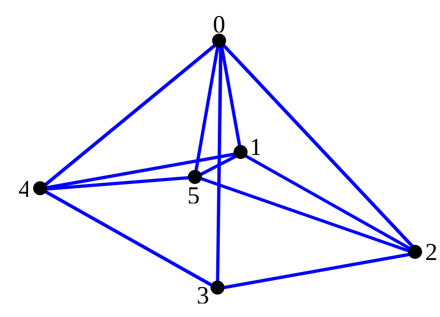


Рис. 4: Два представления графа G: вложен в лист Мёбиуса (слева) и в $\mathbb{R}^3$ (справа).

Пример 4.7 Рассмотрим (неориентированный) граф G на рис. 4 с 6 вершинами и 12 ребрами. Как 1-мерный симплициальный комплекс, G имеет симплициальные гомологии $H_*(C_*(G))$. С другой стороны, введем произвольно множество D ориентаций на ребрах

G, так что (G, D) становится орграфом, и, следовательно, имеет когомологии $H_*(G, D)$, определенные для орграфа. Покажем теперь, что при любом выборе D,

$$H_1(C_*(G)) \neq H_1(G, D). \tag{4.2}$$

Пусть Ω_* будет цепным комплексом орграфа (G, D). В частности, $\dim \Omega_0 = 6$, то есть числу вершин, и $\dim \Omega_1 = 12$, то есть числу ребер. Из гомологической алгебры мы получаем следующее универсальное тождество

$$\dim H_1(\Omega) - \dim H_0(\Omega) = \dim \Omega_1 - \dim \Omega_0 - \dim \partial\Omega_2$$

и аналогичное тождество для симплициальных гомологий. Так как граф G связен, мы имеем $\dim H_0(\Omega) = 1$. Следовательно,

$$\dim H_1(\Omega) = 7 - \dim \partial\Omega_2.$$

Аналогичная формула имеет место для симплициальных гомологий

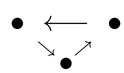
$$\dim H_1(C_*(G)) = 7 - \dim \partial C_2(G) = 7,$$

так как $C_2(G)$ тривиальна.

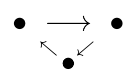
Осталось показать, что пространство се $\partial\Omega_2$ нетривиально для любого выбора D ориентаций ребер, что обеспечит

$$\dim H_1(G, D) \leq 6$$

и, следовательно, (4.2). Для этого достаточно проверить, что существует по крайней мере один треугольник $\{a, b, c\}$ в (G, D), поскольку тогда $e_{abc} \in \Omega_2$ и $\partial e_{abc} \neq 0$. Действительно, попробуем определить множество ориентаций D на ребрах G так, чтобы (G, D) не содержал треугольников. Тогда любой неориентированный треугольник в G должен стать одним из двух циклов



или



Возьмем некоторую ориентацию ребра 03, этот выбор определяет единственным образом ориентации всех других ребер (см. рис. 5) до ребра 23. Однако, при любой ориентации ребра 23 последовательность $\{0, 2, 3\}$ становится треугольником, что завершает доказательство.

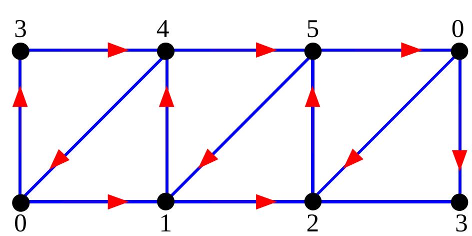


Рис. 5: Любая ориентация ребра 23 будет создавать треугольник.

Определение 4.8 Орграф $G = (V, E)$ называется связной суммой орграфов $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$, если $V = V' \cup V''$, $E = E' \cup E''$ и $V' \cap V''$ состоит из одной вершины.

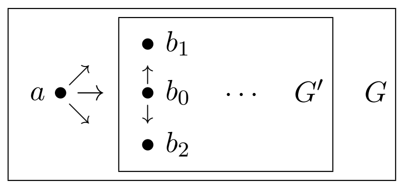
Предложение 4.9 *Если G является связной суммой G' и G'', то*

$$\widetilde{H}_*(G) \cong \widetilde{H}_*(G') \oplus \widetilde{H}_*(G'').$$

Например, орграф G справа на рис. 1 является связной суммой треугольника 012 и двух 3-симплексов 0678, 0345. Так как все приведенные группы гомологий симплексов тривиальны, мы получаем, что приведенные группы гомологий G тривиальны.

5 Гомологии подграфов

Предложение 5.1 *Предположим что орграф G имеет вершину a с n выходящими ребрами $a \to b_0, a \to b_1, ..., a \to b_{n-1}$ и без входящих ребер. Предположим также, что есть ребра $b_0 \to b_i$ для всех $i \geq 1$:*



Обозначим через G' диграф, который получается из G удалением вершины a вместе со всеми смежными ребрами. Тогда $H_*(G) \cong H_*(G')$.

То же самое справедливо, если вершина a имеет n входящих ребер $b_0 \to a, b_1 \to a, ..., b_{n-1} \to a$ и не имеет исходящих ребер, в то время как есть ребра $b_i \to b_0$ для всех $i \geq 1$.

Следствие 5.2 *Пусть орграф G является деревом* (то есть, задающий его неориентированный граф является деревом). *Тогда $H_p(G) = 0$ для $p \geq 1$.*

Пример 5.3 Рассмотрим орграф G, изображенный на рис. 6.

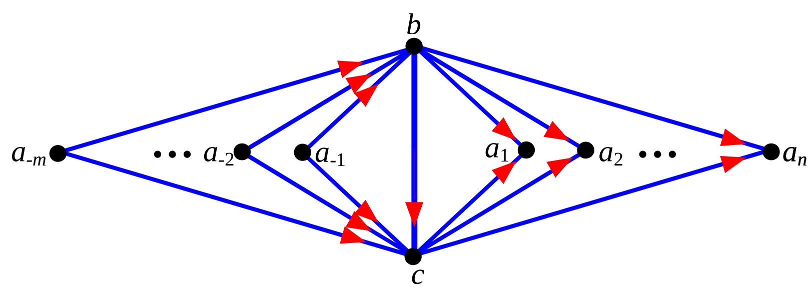


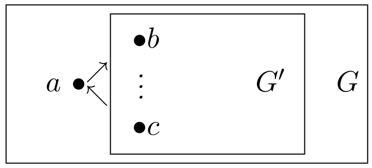
Рис. 6: Орграф с большим числом треугольников и квадратов.

Кажая из вершин a_k удовлетворяет условиям предложения 5.1 при $n = 2$ (либо для входящих или исходящих ребер). Удаляя последовательно вершины a_k, мы видим, что все гомологии орграфа G будут те же самые, как у оставшегося орграфа ${}^b\bullet \to \bullet^c$. Так как это звездчатый орграф, мы получаем $\dim H_0 = 1$ и $\dim H_p = 0$ для $p \geq 1$. В частности, $\chi = 1$.

Пара cb различных вершин орграфа называется *полуребром*, если $c \not\to b$, но существует такая вершина j, что есть ребра $c \to j$ и $j \to b$, как в диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \bullet b & \\ & \bullet j \arrow[ul] \\ \bullet c \arrow[uu, dash] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Предложение 5.4 *Пусть поле $\mathbb{K}$ имеет характеристику 0. Предположим что орграф (V, E) имеет такую вершину a, что существует только одно исходящее из a ребро $a \to b$ и только одно входящее ребро $c \to a$, где $b \neq c$. Обозначим через G' орграф, который получается из G удалением вершины a и смежных ребер $a \to b, c \to a$:*



Тогда верны следующие утверждения.

(a) *Для любого $p \geq 2$,*

$$\dim H_p(G) = \dim H_p(G'). \tag{5.1}$$

(b) *Если cb является ребром или полуребром в G', то* (5.1) *выполняется также для $p = 0, 1$, то есть, для всех $p \geq 0$.*

(c) *Если cb не является ни ребром, ни полуребром в G', но b, c принадлежат одной и той же компоненте связности орграфа G', то*

$$\dim H_1(G) = \dim H_1\left(G'\right) + 1$$

и $\dim H_0(G) = \dim H_0(G')$.

(d) *Если b, c принадлежат различным компонентам связности орграфа G', то*

$$\dim H_1(G) = \dim H_1(G')$$

и $\dim H_0(G) = \dim H_0(G') - 1$.

Следовательно, в случае (b), $\chi(G) = \chi(G')$, а в случаях (c) и (d), $\chi(G) = \chi(G') - 1$.

Пример 5.5 Рассмотрим орграфы

$$G = {}^a\bullet \begin{array}{c}\nearrow\\ \nwarrow\end{array} \begin{array}{c}\overset{b}{\bullet}\\ \downarrow\\ \underset{c}{\bullet}\end{array} \begin{array}{c}\nwarrow\\ \nearrow\end{array} \bullet^d \quad \text{и} \quad G' = \begin{array}{c}\overset{b}{\bullet}\\ \downarrow\\ \underset{c}{\bullet}\end{array} \begin{array}{c}\nwarrow\\ \nearrow\end{array} \bullet^d$$

Так как cb является полуребром в G', мы имеем случай (b), так что все гомологии орграфов G и G' одинаковы. Удаляя далее вершину d, мы получаем орграф ${}^b\bullet \to \bullet^c$, который обозначим через G''. Это звездчатый орграф с $\dim H_p(G'') = 0$ для $p \geq 1$. Так как cb не является ни ребром, ни полуребром в G'', но орграф связен, мы заключаем, согласно случаю (c), что

$$H_p\left(G'\right) = H_p\left(G''\right) \text{ для } p \geq 2,$$

и

$$\dim H_1\left(G'\right) = \dim H_1\left(G''\right) + 1 = 1.$$

Отсюда следует, что $\dim H_p(G) = 0$ для $p \geq 2$ и $\dim H_1(G) = 1$.

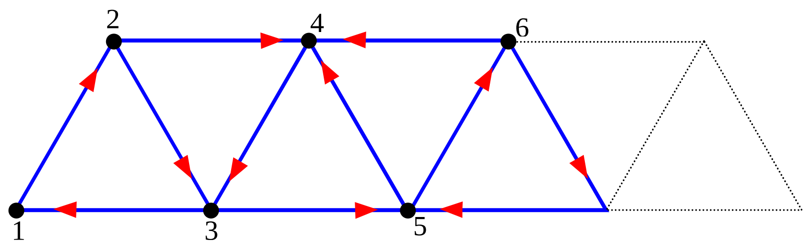


Рис. 7: Антизмея.

Пример 5.6 Рассмотрим орграф, как на рис. 7 (*антизмея*).

Мы начинаем строить этот орграф с $1 \to 2$. Так ка 21 не является ни ребром, ни полуребром, добавление пути $2 \to 3 \to 1$ увеличивает $\dim H_1$ на 1 и сохраняет другие гомологии. Так как 23 является ребром, добавление пути $2 \to 4 \to 3$ сохраняет все гомологии. Так как 34 не является ни ребром, ни полуребром, добавление пути $3 \to 5 \to 4$ увеличивает $\dim H_1$ на 1 и сохраняет другие гомологии. Аналогично, добавление пути $5 \to 6 \to 4$ сохраняет все гомологии.

Можно повторить эту конструкцию сколь угодно много раз. Сделав это, мы построим некоторый орграф с заданным положительным целым значением $\dim H_1$, сохраняя $\dim H_p = 0$ для всех $p \geq 2$. Следовательно, Эйлерова характеристика χ может принимать произвольные отрицательные целые значения.

Пример 5.7 Рассмотрим орграф на рис. 1(справа). По предложению 5.1, мы можем удалить вершины 5 и 8 (и их смежные ребра) без изменения гомологий. Затем, по тому же предложению, мы можем удалить вершины 4 и 7. По предложению 5.4, мы можем удалить вершину 1. Полученный орграф с вершинами $0, 2, 3, 6$ является звездчатым, так что, по предложению 4.5, группы гомологий H_p тривиальны для всех $p \geq 1$, в то время как $\dim H_0 = 1$.

6 Джойн комплексов путей

В этом и следующих параграфах мы будем использовать несколько другой способ обозначения пространств путей, ассоциированных с данным комплексом путей, когда нам придется рассматривать комплексы путей, заданные более чем на одном множестве. Для данного множества X, обозначим через $P(X)$ комплекс путей на X. Пространство $\mathcal{A}_p(P(X))$ всех допустимых p-путей будет обозначаться сокращенно через $\mathcal{A}_p(X)$. Аналогично, пространство $\Omega_p(P(X))$ всех ∂-инвариантных p-путей будет обозначаться через $\Omega_p(X)$. Аналогичные обозначения будут применяться для всех других соответствующих понятий, в том числе, включая гомологии путей $H_p(X)$, и т.д..

Определение 6.1 Для двух дизъюнктных конечных множеств X, Y и их комплексов путей $P(X), P(Y)$ положим $Z = X \sqcup Y$ и определим комплекс путей $P(Z)$ следующим образом: $P(Z)$ состоит из всех путей, имеющих форму uv, где $u \in P(X)$ и $v \in P(Y)$. Комплекс путей $P(Z)$ называется *джойном* комплексов $P(X), P(Y)$ и обозначается $P(Z) = P(X) * P(Z)$.

Операция $*$ на комплексах путей, очевидно, не коммутативна, но ассоциативна. Пример пути $uv \in P(Z)$ показан на рис. 8(слева). Заметим, что каждый из путей u, v может быть пустым, так что все допустимые пути на X и Y будут также допустимы на Z.

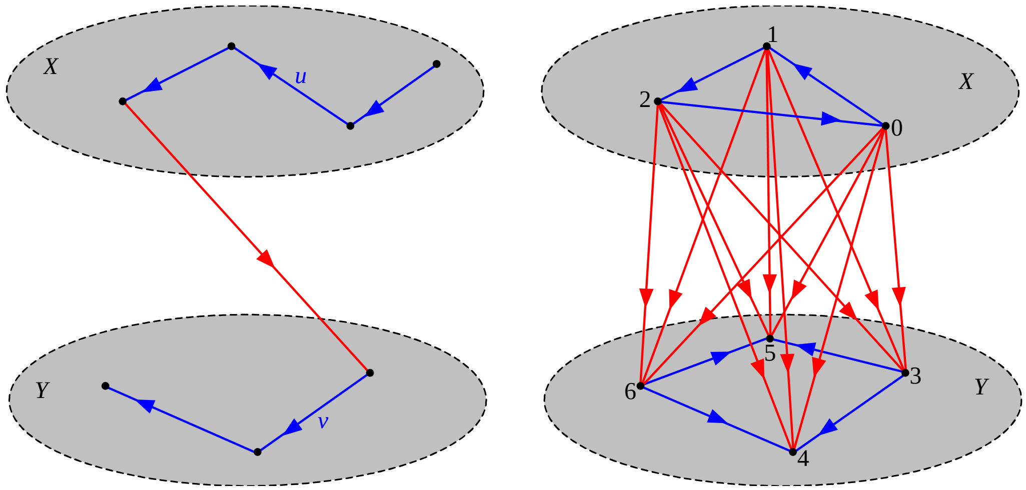


Рис. 8: Джойн двух путей (слева) и джойн двух орграфов (справа).

Пример 6.2 Пусть X, Y — два орграфа с дизъюнктными множествами вершин. Рассмотрим орграф Z с множеством вершин $X \sqcup Y$, в то время как множество ребер Z состоит из всех ребер X и Y, а также всех ребер $x \to y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Орграф Z называется *джойном* орграфов X и Y и обозначается $X * Y$. Пример джойна двух орграфов показан на рис. 8(справа).

Пусть $P(Z)$ — комплекс путей, возникающий из структуры орграфа на Z. Тогда, это очевидно из определения, $P(Z)$ является джойном of $P(X)$ и $P(Y)$ так, что $P(X * Y) = P(X) * P(Y)$. Следовательно, операция джойна для орграфов совместима с операцией джойна для комплексов путей.

Пример 6.3 Пусть X и Y — множества вершин конечных симплициальных комплексов $S(X)$ и $S(Y)$. Построим симплициальный комплекс $S(Z)$ с множеством вершин $Z = X \sqcup Y$ следующим образом. Предполагая что $|X| = n$ и $|Y| = m$, вложим множество X (всесте с симплексами из $S(X)$) в гиперплоскость $h^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+m-1}$ и Y — в гиперплоскость $h^{m-1} \subset R^{n+m-1}$, так что гиперплоскости h^{n-1}, h^{m-1} ортогональны и не пересекаются. Для любых двух симплексов $\sigma_1 \in S(X)$ и $\sigma_2 \in S(Y)$, определим их джойн $\sigma_1 * \sigma_2$ как выпуклую оболочку σ_1 и σ_2, вложенную в $\mathbb{R}^{n+m-1}$ как выше (см. рис. 9).

Используя аргументы общего положения σ_1 и σ_2, джойн $\sigma_1 * \sigma_2$ является симплексomis. Тогда $S(Z)$ является набором симплексов $\sigma_1 * \sigma_2$ с $\sigma_1 \in S(X)$ с $\sigma_2 \in S(Y)$. Мы называем $S(Z)$ джойном симплициальных комплексов $S(X), S(Y)$ и обозначаем его $S(X) * S(Y)$.

Эквивалентно, можно определить $S(Z)$ абстрактно, не используя вложение в Евклидово пространство. Действительно, рассматривая симплексы как последовательности вершинь, мы можем сказать, что $S(Z)$ состоит из всех симплексов, имеющих форму $[x_0, ..., x_p, y_0, ..., y_q]$, где $[x_0, ..., x_p] \in S(X)$ и $[y_0, ..., y_q] \in S(Y)$. Ясно, что $S(Z)$ является симплициальным комплексом, когда он удовлетворяет определяющему свойству (3.2). Также ясно, что комплексы путей $P(X), P(Y), P(Z)$ для симплициальных комплексов $S(X), S(Y), S(Z)$, соответственно, удовлетворяют условию $P(Z) = P(X) * P(Y)$. Следовательно, операция джойна для симплициальных комплексов совместима с операцией джойна комплексов путей.

Для заданного регулярного комплекса путей $P(X)$ на конечном множестве X мы рассмотрим, как раньше, его регулярный цепной комплекс $\{\Omega_n(X)\}_{n \geq -1}$ и его небольшую

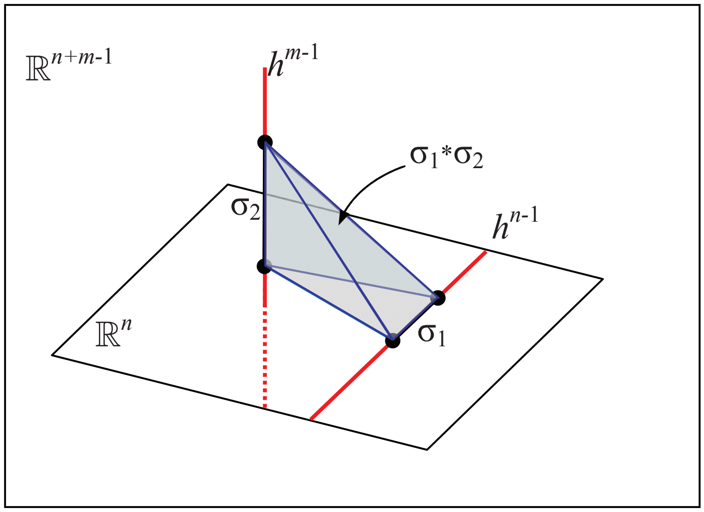


Рис. 9: Джойн $\sigma_1 * \sigma_2$ двух одномерных симплексов σ_1, σ_2 (случай $n = m = 2$).

модификацию $\{\Omega'_n\}_{n\geq 0}$ where $\Omega'_n(X) \equiv \Omega_{n-1}(X)$.

Теорема 6.4 *Пусть X, Y — два конечных непустых множества, и $P(X)$ и $P(Y)$ — регулярные комплексы комплексы путей на X и Y, соответственно. Положим $Z = X \sqcup Y$ и рассмотрим комплекс путей, заданный джойном $P(Z) = P(X) * P(Y)$. Тогда мы имеем следующий изоморфизм цепных комплексов:*

$$\Omega_\bullet(Z) \cong \Omega'_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y), \tag{6.1}$$

где отображение $\Omega'_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y) \to \Omega_\bullet(Z)$ задается как $u \otimes v \mapsto uv$.

Из (6.1) следует, что для любого $r \geq -1$,

$$\Omega_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p,q\geq -1: p+q=r-1\}} (\Omega_p(X) \otimes \Omega_q(Y)) \tag{6.2}$$

и, для любого $r \geq 0$,

$$\widetilde{H}_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p,q\geq 0: p+q=r-1\}} \left(\widetilde{H}_p(X) \otimes \widetilde{H}_q(Y)\right) \tag{6.3}$$

(формула Кюннета для джойна).

Пример 6.5 Рассмотрим орграф $Z = X * Y$, как на рис. 8(справа). В этом, случае по предложению 4.6, мы получаем, что все гомологии $\widetilde{H}_p(X)$ и $\widetilde{H}_q(Y)$ будут тривиальны, кроме

$$\begin{aligned} H_1(X) &= \operatorname{span}\{e_{01} + e_{12} + e_{20}\}, \\ H_1(Y) &= \operatorname{span}\{e_{35} - e_{65} + e_{64} - e_{34}\}. \end{aligned}$$

Поэтому, все группы $\widetilde{H}_r(Z)$ тривиальны, кроме $H_3(Z)$, которая порождена одним элементом

$$e_{0135} - e_{0165} + e_{0164} - e_{0134} + e_{1235} - e_{1265} + e_{1264} - e_{1234} + e_{2035} - e_{2065} + e_{2064} - e_{2034}.$$

Конусом орграфа X является орграф $\mathrm{Cone}\,X$, который получается из X добавлением одной дополнительной вершины a и всех ребер, имеющих вид $b \to a$, для всех $b \in X$. Вершина a называется вершиной конуса. Ясно, что $\mathrm{Cone}\,X = X * Y$, когда Y состоит из одной вершины a.

Предложение 6.6 *Для любого орграфа X и для любого $r \geq 0$ мы имеем:*

$$\Omega_r\left(\mathrm{Cone}\,X\right) \cong \Omega_{r-1}\left(X\right), \tag{6.4}$$

где изоморфизм задается отображением $u \mapsto ue_a$ из $\Omega_{r-1}(X)$ в $\Omega_r(\mathrm{Cone}\,X)$, где a — вершина конуса. Кроме того, приведенные группы гомологий для $\mathrm{Cone}\,X$ будут тривиальны.

Пример 6.7 Ясно, что орграф-симплекс Sm_n может рассматриваться как конус над Sm_{n-1} (см. параграф 4). Так как $\Omega_0\left(\mathrm{Sm}_0\right)$ порождено 0-путем e_0, мы получаем по индукции, используя (6.4), что $\Omega_n\left(\mathrm{Sm}_n\right)$ порождено путем $e_{01\ldots n}$.

Определение 6.8 *Надстройкой* над орграфом X является орграф $\mathrm{Sus}\,X$, который получается из X добавлением двух вершин a, b и всех ребер $c \to a$ и $c \to b$, для всех $c \in X$. Вершины a, b называются вершинами надстройки.

Ясно, что $\mathrm{Sus}\,X = X * Y$, где Y — орграф, который состоит из двух вершин a, b и не имеет ребер.

Предложение 6.9 *Для любого орграфа X и любого $r \geq 0$ мы имеем*

$$\Omega_r\left(\mathrm{Sus}\,X\right) \cong \Omega_{r-1}\left(X\right) \otimes \mathrm{span}\left\{e_a, e_b\right\}, \tag{6.5}$$

где a, b — вершины надстройки, и изоморфизм задается отображениями $u \otimes e_a \mapsto ue_a$ и $u \otimes e_b \mapsto ue_b$. Кроме того,

$$\widetilde{H}_r\left(\mathrm{Sus}\,X\right) \cong \widetilde{H}_{r-1}\left(X\right), \tag{6.6}$$

где изоморфизм задается отображением $u \mapsto u\left(e_a - e_b\right)$. Следовательно, имеем $\chi\left(\mathrm{Sus}\,X\right) = 2 - \chi\left(X\right)$.

В частности, поскольку имеются примеры орграфов X с произвольными отрицательными целыми значениями χ (см. пример 5.6), мы получаем примеры орграфов $\mathrm{Sus}\,X$ с произвольными положительными целыми значениями χ.

Пример 6.10 Пусть S — любой циклический граф, который не является ни треугольником, ни квадратом. Мы рассматриваем S как аналог окружности. Определим S_n индуктивно, полагаая $S_1 = S$ и $S_{n+1} = \mathrm{Sus}\,S_n$. Тогда S_n может рассматриваться как n-мерный сферический граф. Пример S_2 показан на рис. 10.

Так как $\chi\left(S\right) = 0$ по предложению 4.6, мы получаем, что $\chi\left(S_n\right) = 0$, если n нечетно, и $\chi\left(S_n\right) = 2$, если n четно. Из предложения 6.9 также следует, что $\dim H_n\left(S_n\right) = \dim H_1\left(S\right) = 1$, что дает пример нетривиальной группы H_n для произвольного n. В частности, орграф S_2 на рис. 10 имеет нетривиальную группу $H_2\left(S_2\right)$, хотя он является планарным.

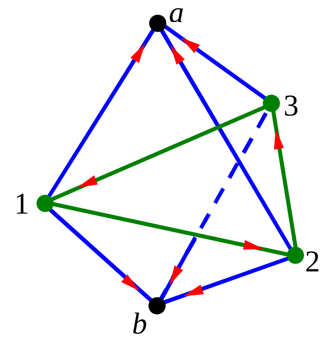


Рис. 10: Орграф S_2 на основе трехвершинного цикла S.

Пусть v является 1-путем на S, который порождает $H_1(S)$ (см. параграф 4). Если S_{n+1} — надстройка над S_n с вершинами a_n, b_n, тогда мы получаем по индукции, что образующим элементом в $H_n(S_n)$ будет

$$v(e_{a_1} - e_{b_1})(e_{a_2} - e_{b_2}) \dots (e_{a_{n-1}} - e_{b_{n-1}}).$$

Например, если S — циклический граф на рис. 10 с $V = \{1, 2, 3\}$ и $E = \{12, 23, 31\}$, тогда $v = e_{12} + e_{23} + e_{31}$, следовательно, образующим элементом в $H_2(S_2)$ будет

$$v(e_a - e_b) = (e_{12a} + e_{23a} + e_{31a}) - (e_{12b} + e_{23b} + e_{31b}).$$

Пример 6.11 Другой пример двумерного сферического графа G показан на рис. 11.

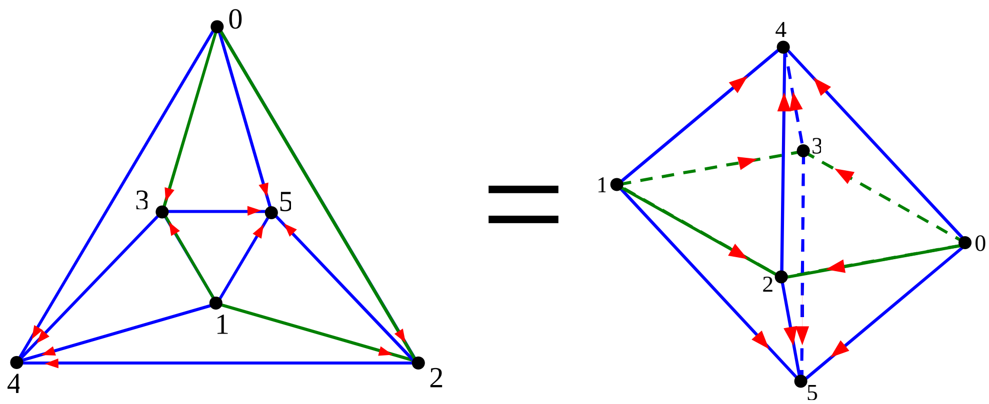


Рис. 11: Орграф-октаэдр.

Действительно, имеем $G = \operatorname{Sus} G'$, где G' — подграф с вершинами $\{0, 1, 2, 3\}$, который является циклическим графом. Применяя предложение 4.6 для вычисления групп гомологий G' и, затем, предложение 6.9, мы получаем

$$\dim H_0(G) = 1,\ \dim H_1(G) = 0,\ \dim H_2(G) = 1,\ \dim H_p(G) = 0 \ \text{ для } p \geq 3. \tag{6.7}$$

Следовательно, $\chi(G) = 2$. Кроме того, образующим элементом группы $H_2(G)$ будет

$$e_{024} - e_{025} - e_{034} + e_{035} - e_{124} + e_{125} + e_{134} - e_{135},$$

которы, в некотором смысле, представляет поверхность октаэдра.

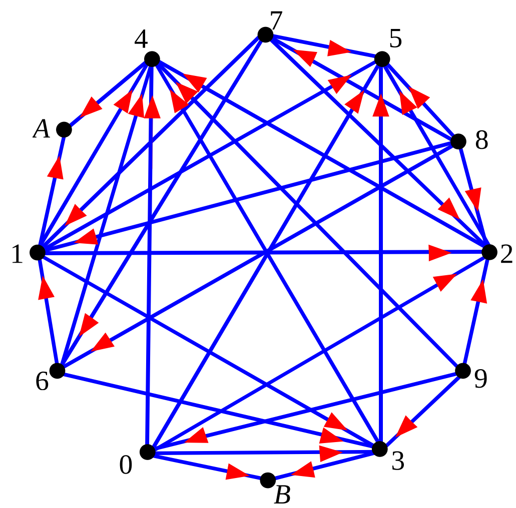


Рис. 12: Орграф с 12 вершинами и 32 ребрами.

Пример 6.12 Рассмотрим орграф на рис. 12.

Удаляя последовательно вершины $A, B, 8, 9, 6, 7$, по предложению 5.1 мы получаем орграф , G' с множеством вершин $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, который имеет такие же гомологии, как и G. Орграф G' — это тот же орграф, как на рис. 11. Следовательно, мы получаем, согласно (6.7), что $\dim H_2(G) = 1$, в то время как $H_p(G) = \{0\}$ для $p = 1$ и $p > 2$. Следующий замкнутый 2-путь задает нетривиальный класс гомологий в $H_2(G)$:

$$e_{024} - e_{025} - e_{034} + e_{035} - e_{124} + e_{125} + e_{134} - e_{135}.$$

Другими словами, этот 2-путь определяет двумерную дыру в G, заданную октаэдром. Заметим, что на рис. 12 этот октаэдр трудно различим, но но он может быть построен чисто алгебраически, используя вышеупомянутые методы.

7 Прямое произведение комплексов путей

В этом параграфе все комплексы путей являются регулярными, и их цепные комплексы всегда являются регулярными и неприведенными.

Для двух данных множеств X, Y рассмотрим их прямое произведение $Z = X \times Y$. Пусть $z = z_0 z_1 ... z_r$ — регулярный элементарный r-путь на Z, где $z_k = (x_k, y_k)$ с $x_k \in X$ и $y_k \in Y$. Мы говорим, что путь z является *ступенчатым*, если для любого $k = 1, ..., r$ выполняется условие $x_{k-1} = x_k$ или $y_{k-1} = y_k$. Фактически, в точности одно их этих выполняется, когда z регулярен.

Любой ступенчатый путь z на Z определяет элементарные пути x на X и ь y на Y посредством проекций. Более точно, x получается из z взятием последовательности всех X-координат вершин z, а затем заменой в нем любой подпоследовательности повторящихся вершин на одну эту вершину. Такое же правило применяется для y. Согласно конструкции, проекции x и y являются *регулярными* элементарными путями на X и Y, соответственно. Если $x = x_0 ... x_p$ и $y = y_0 ... y_q$ являются проекциями z, то $p + q = r$ (см. рис. 13(слева)).

Каждая вершина (x_i, y_j) на ступенчатом пути z может быть представлена как точка (i, j) на $\mathbb{Z}^2$ так, что целый путь z представляется *лестницей* $S(z)$ в $\mathbb{Z}^2$, связывающей

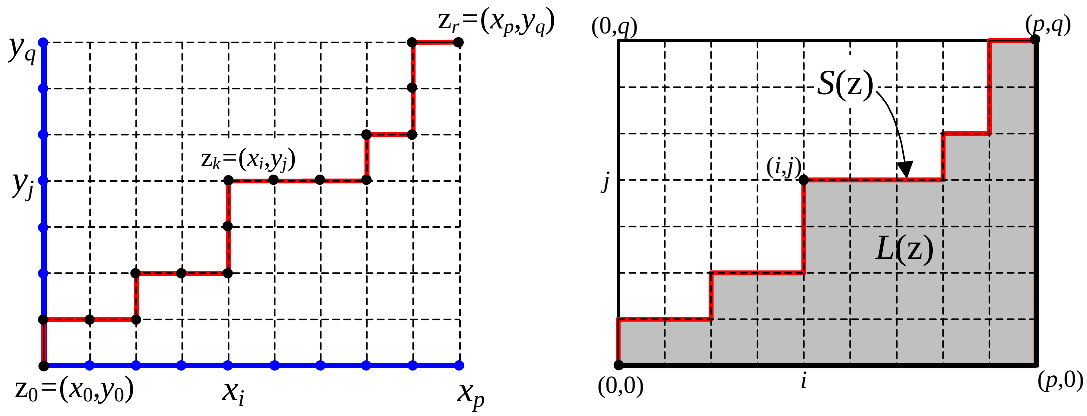


Рис. 13: Слева: ступенчатый путь z и его проекции x и y. Справа: лестница $S(z)$ и ее подъем $L(z)$ (здесь $L(z) = 30$).

точки $(0,0)$ и (p,q). Определим *подъем* $L(z)$ пути z как число клеток в $\mathbb{Z}_+^2$, которые ниже лестницы $S(z)$ (затененная область на рис. 13(справа)).

Для $p,q \geq 0$ рассмотрим пути $u \in \mathcal{R}_p(X)$ и $v \in \mathcal{R}_q(Y)$ и определим $u \times v$ на Z по следующему правилу: для любого ступенчатого элементарного $(p+q)$-пути z on Z определим компоненту $(u \times v)^z$ равенством

$$(u \times v)^z = (-1)^{L(z)} u^x v^y, \tag{7.1}$$

где x and y — проекции z на X и Y, соответственно, а u^x и v^y — соответствующие компоненты для u и v. Для неступенчатых путей z положим $(u \times v)^z = 0$. Путь $u \times v$ называется *скрещенным произведением* путей u и v. Отсюда следует, что $u \times v \in \mathcal{R}_{p+q}(Z)$.

Для данного элементарного регулярного p-пути x на X и аналогичного q-пути y на Y обозначим через $\Pi_{x,y}$ множество всех ступенчатых путей z на Z, чьими проекциями на X и Y являются x и y, соответственно. Из (7.1) следует, что

$$e_x \times e_y = \sum_{z \in \Pi_{x,y}} (-1)^{L(z)} e_z. \tag{7.2}$$

Не трудно увидеть, что скрещенное произведение ассоциативно.

Пример 7.1 Обозначим вершины X буквами $a, b, c, \ldots$ и вершины Y целыми числами $0, 1, 2, \ldots$ так, чтобы вершины Z могли обозначаться как поля на шахматной доске, например, $a0, b1$ и т. д. Тогда мы получаем

$$e_a \times e_{01} = e_{a0a1}, \quad e_{ab} \times e_0 = e_{a0b0}$$

$$e_{ab} \times e_{01} = e_{a0b0b1} - e_{a0a1b1}$$

$$e_{abc} \times e_{01} = e_{a0b0c0c1} - e_{a0b0b1c1} + e_{a0a1b1c1}$$

$$\begin{aligned} e_{abc} \times e_{012} &= e_{a0b0c0c1c2} - e_{a0b0b1c1c2} + e_{a0b0b1b2c2} \\ &\quad + e_{a0a1b1c1c2} - e_{a0a1b1b2c2} + e_{a0a1a2b2c2} \end{aligned}$$

и так далее (см. рис. 14).

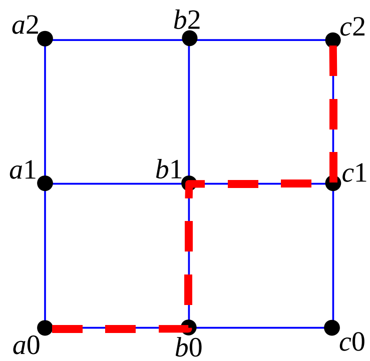


Рис. 14: Лестница $a0b0b1c1c2$ имеет подъем 1. Следовательно, $e_{a0b0b1c1c2}$ входит в произведение $e_{abc} \times e_{012}$ с отрицательным знаком.

Предложение 7.2 (Правило произведения) *Если* $u \in \mathcal{R}_p(X)$ *и* $v \in \mathcal{R}_q(Y)$, *где* $p, q \geq 0$, *то*

$$\partial(u \times v) = (\partial u) \times v + (-1)^p u \times (\partial v). \tag{7.3}$$

Определение 7.3 Для двух данных конечных множеств X и Y с комплексами путей $P(X)$ и $P(Y)$ соответственно, определим на множестве $Z = X \times Y$ комплекс путей $P(Z)$ следующим образом: элементами $P(Z)$ являются ступенчатые пути на Z, проекции которых на X и Y принадлежат $P(X)$ и $P(Y)$ соответственно. Комплекс путей $P(Z)$ называется прямым произведением комплексов путей $P(X)$ и $P(Y)$ и обозначается $P(X) \Box P(Y)$.

Не трудно увидеть, что прямое произведение комплексов путей ассоциативно. Если x и y являются дпустимыми элементарными путями на X и Y соответственно, то все пути $z \in \Pi_{x,y}$ будут допустимыми на Z. Очевидно, из (7.2) следует, что скрещенное произведение допустимых путей является допустимым. Кроме того, правило произведения (7.3) влечет, что скрещенное произведение ∂-инвариантных путей является ∂-инвариантным. Следующая теорема дает полное описание ∂-инвариантных путей на Z.

Теорема 7.4 *Пусть* $P(X)$ *и* $P(Y)$ *— два регулярных комплекса путей. Тогда для их прямого произведения t* $P(Z) = P(X) \Box P(Y)$ *имеет место следующий изоморфизм цепных комплексов:*

$$\Omega_\bullet(Z) \cong \Omega_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y), \tag{7.4}$$

где отображение $\Omega_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y) \to \Omega_\bullet(Z)$ *задается формулой* $u \otimes v \mapsto u \times v$.

Следовательно, мы получаем формулу Кюннета

$$H_\bullet(Z) \cong H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y), \tag{7.5}$$

то есть, для любого $r \geq 0$,

$$H_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p,q \geq 0 : p+q=r\}} (H_p(X) \otimes H_q(Y)). \tag{7.6}$$

Пусть X — орграф. Для упрощения обозначений, мы обозначим множество вершин орграфа X той же буквой X, а множество ребер обозначим E_X. Для двух данных орграфов X и Y их прямое произведение является орграфом $Z = X \Box Y$, где множество вершин орграфа Z является прямым произведением множеств вершин орграфов X и Y, в то время как множество ребер E_Z определяется следующим образом: $(x,y) \to (x',y')$ тогда и только тогда, когда либо $x \to x'$ и $y = y'$, либо $y \to y'$ и $x = x'$:

$$
\begin{array}{cccccc}
y'\bullet & \dots & \overset{(x,y')}{\bullet} & \longrightarrow & \overset{(x',y')}{\bullet} & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
y\bullet & \dots & \overset{(x,y)}{\bullet} & \longrightarrow & \overset{(x',y)}{\bullet} & \dots \\
& & & & & \\
{}^{Y}\diagup_{X} & \dots & \underset{x}{\bullet} & \longrightarrow & \underset{x'}{\bullet} & \dots
\end{array}
$$

Ясно, что любой допустимый путь на Z является ступенчатым, и его проекции на X и Y также являются допустимыми. Следовательно, комплекс путей орграфа Z является прямым произведением комплексов путей орграфов X и Y.

Пример 7.5 Пусть $Z = X \square Y$, где

$$
X = \begin{array}{ccc} & \overset{b}{\bullet} & \\ \nearrow & & \searrow \\ {}^{a}\bullet & \rightarrow & \bullet^{c} \end{array}
\quad \text{и} \quad
Y = \begin{array}{ccc} {}^{2}\bullet & \longrightarrow & \bullet^{3} \\ \uparrow & & \uparrow \\ {}_{0}\bullet & \longrightarrow & \bullet_{1} \end{array}.
$$

(см. рис. 15).

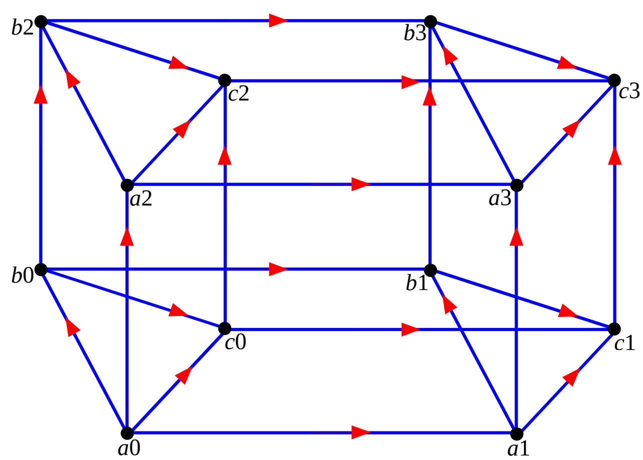


Рис. 15: Прямое произведение треугольника и квадрата.

Беря прямое произведение ∂-инвариантных путей e_{abc} и $e_{013} - e_{023}$, мы получаем следующий ∂-инвариантный путь на Z:

$$
\begin{aligned}
& e_{a0b0c0c1c3} - e_{a0b0b1c1c3} + e_{a0b0b1b3c3} \\
& + e_{a0a1b1c1c3} - e_{a0a1b1b3c3} + e_{a0a1a3b3c3} \\
& - e_{a0b0c0c2c3} + e_{a0b0b2c2c3} - e_{a0b0b2b3c3} \\
& - e_{a0a2b2c2c3} + e_{a0a2b2b3c3} - e_{a0a2a3b3c3}
\end{aligned}
$$

Для любого орграфа X *циллиндром* на X называется орграф

$$
\operatorname{Cyl} X := X \square \, {}^{0}\bullet \to \bullet^{1}.
$$

Предполагая, что вершины X пронумерованы числами $0, 1, ..., n-1$, мы можем пронумеровать вершины $\operatorname{Cyl} X$ by $0, 1, ..., 2n-1$, используя следующее правило: $(x, 0)$ сопоставляем число x, в то время как $(x, 1)$ сопоставляем $x + n$.

Определелим операцию *поднятия* пути с X на $\operatorname{Cyl} X$ следующим образом: для любого регулярного пути v на X поднятый путь обозначается $\widehat{v}$ и определяется равенством $\widehat{v} = v \times e_{01}$. Так как e_{01} ∂-инвариантен на Y, мы получаем, что если $v \in \Omega_p(X)$, то $\widehat{v} \in \Omega_{p+1}(\operatorname{Cyl} X)$. Например, если $v = e_{i_0 \dots i_p}$, то

$$\widehat{v} = e_{i_0 \dots i_p} \times e_{01} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} e_{i_0 \dots i_k (i_k+n) \dots (i_p+n)}. \tag{7.7}$$

Пример 7.6 Циллиндр над графем $X = {}^0\bullet \to \bullet^1$ является квадратом:

$$\begin{array}{ccc} {}^2\bullet & \longrightarrow & \bullet^3 \\ \uparrow & & \uparrow \\ {}^0\bullet & \longrightarrow & \bullet^1 \end{array}$$

Поднимая ∂-инвариантный 1-путь e_{01}, заданный на X, мы получаем следующий ∂-инвариантный 2-путь на квадратее: $e_{013} - e_{023}$. Циллиндр над квадратом является трехмерным кубом, который показан на рис. 16.

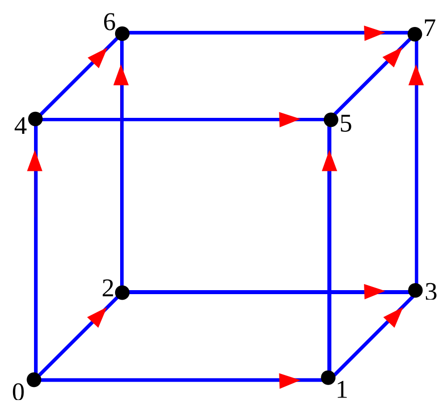


Рис. 16: Трехмерный куб.

Поднимая 2-путь $e_{013} - e_{023}$ согласно (7.7), мы получим следующий ∂-инвариантный 3-путь на трехмерном кубе:

$$e_{0457} - e_{0157} + e_{0137} - e_{0467} + e_{0267} - e_{0237}.$$

Определяя дальше n-куб для любого положительного целого n посредством

$$\mathrm{Cube}_n = \operatorname{Cyl} \mathrm{Cube}_{n-1},$$

мы видим, что Cube_n определяет ∂-инвариантный n-путь, который является подъемом ∂-инвариантного $(n-1)$-пути с Cube_{n-1}, и который является альтернированной суммой, состоящей из $n!$ элементарных членов. Легко показать, что эти члены соответствуют разбиению геометрического n-куба на $n!$ симплексов.

Согласно (7.6), все группы гомологий орграфа Cube_n тривиальны, кроме H_0.

Список литературы

[1] **Babson E., Barcelo H., de Longueville M., Laubenbacher R.**, Homotopy theory of graphs, *J. Algebr. Comb.*, **24** (2006) 31–44.

[2] **Barcelo H., Kramer X., Laubenbacher R., Weaver Ch.**, Foundations of a connectivity theory for simplicial complexes, *Advances in Appl. Mathematics*, **26** (2001) 97-128.

[3] **Bourbaki, N.**, "Elements of mathematics. Algebra I. Chapters 1-3.", 1989.

[4] **Chen, Beifang, Yau, Shing-Tung, and Yeh, Yeong-Nan**, Graph homotopy and Graham homotopy, *Discrete Math.*, **241** (2001) 153-170.

[5] **Dimakis A., Müller-Hoissen F.**, Differential calculus and gauge theory on finite sets, *J. Phys. A, Math. Gen.*, **27** no.9, (1994) 3159-3178.

[6] **Dimakis A., Müller-Hoissen F.**, Discrete differential calculus: Graphs, topologies, and gauge theory, *J. Math. Phys.*, **35** no.12, (1994) 6703-6735.

[7] **Gerstenhaber M., Schack S.D.**, Simplicial cohomology is Hochschild cohomology, *J. Pure Appl. Algebra*, **30** (1983) 143-156.

[8] **Grigor'yan A., Lin Y., Muranov Yu., Yau S.-T.**, Homologies of path complexes and digraphs, preprint arXiv:1207.2834v4

[9] **Grigor'yan A., Lin Y., Muranov Yu., Yau S.-T.**, Homotopy theory for digraphs, to appear in *Pure Appl. Math. Quaterly*

[10] **Grigor'yan A., Muranov Yu., Yau S.-T.**, Graphs associated with simplicial complexes, *Homology, Homotopy and Appl.*, **16** (2014) no.1, 295–311.

[11] **Grigor'yan A., Muranov Yu., Yau S.-T.**, On a cohomology of digraphs and Hochschild cohomology, to appear in *Homotopy and Related Structures*

[12] **Grigor'yan A., Muranov Yu., Yau S.-T.**, Cohomology of digraphs and (undirected) graphs, to appear in *Asian J. Math.*

[13] **Happel D.**, *Hochschild cohomology of finite dimensional algebras*, *in:* "Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1404", 1989. 108–126.

[14] **Ivashchenko A. V.**, Contractible transformations do not change the homology groups of graphs, *Discrete Math.*, **126** (1994) 159-170.

[15] **Tahbaz-Salehi, A., Jadbabaie, A.**, Distributed coverage verification in sensor networks without location information, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55** (2010) 1837-1849.

[16] **Talbi M. E., Benayat D.**, Homology Theory of Graphs, *Mediterranean J. of Math*, **11** (2014) 813-828 .

Математический факультет, Билефельдский университет, 33613 Билефельд, Германия
E-mail: grigor@math.uni-bielefeld.de

Институт информатики, Китайский народный университет, 59 ул. Жонгуанкан, Хайдан, Пекин 100872, Китай
E-mail: linyong01@ruc.edu.cn

Факультет математики и информатики, Варминьско-Мазурский университет, ул. Солнечная 54, 10-710 Ольштын, Польша
email: muranov@matman.uwm.edu.pl

Факультет математики, Гарвардский университет, Кембридж MA 02138, США
E-mail: yau@math.harvard.edu