## О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА НА МНОГООБРАЗИИ

А. А. Григорьян

Пусть $M$ — гладкое, связное, некомпактное риманово многообразие (с краем или без) размерности $n \geqslant 2$. Функция $G \in C^2(M \setminus \{0\})$ называется функцией Грина с полюсом в точке $0 \in \overset{\circ}{M}$, если $-\Delta G = \delta(0)$, $\frac{d}{d\nu} G(x)|_{\partial M} = 0$, $\underline{\lim}_{x\to\infty} G(x) = 0$, где $\Delta$ — оператор Лапласа — Бельтрами, $\nu$ — нормаль.

Известно, что существование функции Грина для одного полюса равносильно ее существованию для каждого полюса. Многообразие называется $G$-вырожденным, если оно не обладает функцией Грина. Если многообразие $M$ $G$-невырождено, то среди всех функций Грина с фиксированным полюсом существует минимальная функция Грина (см. [1]).

В настоящей статье формулируется критерий $G$-вырожденности в терминах емкостей (теорема 1), достаточное условие $G$-невырожденности в терминах выполнения некоторого изопериметрического неравенства и некоторые оценки минимальной функции Грина (теорема 2).

Понятие емкости на многообразии введем по аналогии с [2]. Пусть $A$ и $B$ — компактные подмножества $M$, $A \subset B$. Емкостью множества $A$ относительно $B$ называется число

$$\operatorname{cap}(A, B) = \inf_{\varphi} \int_M |\nabla\varphi|^2 \, dV,$$

где нижняя грань берется по всем липшицевым функциям $\varphi$ таким, что $\varphi|_A \geqslant 1$, $\varphi|_{M\setminus B} \leqslant 0$; $dV$ — элемент объема на $M$.

Если $\{B_m\}$ — возрастающая последовательность компактов, исчерпывающих $M$ то последовательность емкостей $\operatorname{cap}(A, B_m)$ убывает и сходится к пределу, который называется емкостью множества $A$ и обозначается $\operatorname{cap} A$.

Теорема 1. *Многообразие $M$ $G$-вырождено тогда и только тогда, когда емкость любого компакта равна нулю.*

Введем еще два понятия. Функцию $\rho(x) \in C^\infty(M)$ назовем радиальной, если $|\nabla\rho| \leqslant 1$ и при любом $t > 0$ множество

$$E_t = \{x \in M \mid \rho(x) \leqslant t\} \tag{1}$$

является непустым компактом. Радиальная функция заменит нам функцию расстояния, которая на произвольном многообразии не является гладкой. Ниже будем предполагать, что многообразие $M$ обладает хотя бы одной радиальной функцией (на полном многообразии радиальную функцию можно получить, аппроксимируя функцию расстояния до некоторой точки). Через $V_t$ будем обозначать $n$-мерный объем множества $E_t$, а через $S_t$ — $(n-1)$-мерный объем границы $\partial E_t = \{x \in M \mid \rho(x) = t\}$.

Скажем, что многообразие $M$ удовлетворяет изопериметрическому неравенству с функцией $f$, если для всякого компакта $K$ с гладкой границей $\partial K = K \cap \overline{(M\setminus K)}$ $(n-1)$-мерный объем границы не меньше, чем $f(v)$, где $v$ — $n$-мерный объем компакта $K$.

Лемма 1. *Справедлива следующая оценка:*

$$\operatorname{cap} E_t \leqslant \left( \int_t^\infty \frac{dr}{S_r} \right)^{-1} \quad (t > 0).$$

Следствие (Ченг — Яу [3]). *Если на полном многообразии $M$ объем геодезического шара радиуса $r$ (с фиксированным центром) растет не быстрее чем $r^2$, то многообразие $M$ $G$-вырождено.*

Действительно, легко доказать, что при таком росте объема

$$\int^\infty \frac{dr}{S_r} = \infty.$$

По лемме 1 получим $\operatorname{cap} E_t = 0$, а далее воспользуемся теоремой 1.

Лемма 2. *Если многообразие $M$ удовлетворяет изопериметрическому неравенству с функцией $f$, то*

$$\operatorname{cap} E_t \geqslant \left( \int_{V_t}^{\infty} \frac{dv}{f(v)^2} \right)^{-1} \quad (t > 0).$$

Из теоремы 1, лемм 1, 2 можно получить следующую теорему.

Теорема 2. а) *Если многообразие $M$ обладает функцией Грина $G(x)$ с полюсом в точке $0 \in E_{t_0}$, то при $t > t_0$*

$$\max_{\partial E_t} G(x) \geqslant \int_t^{\infty} \frac{dr}{S_r}.$$

б) *Если полное многообразие $M$ удовлетворяет изопериметрическому неравенству с функцией $f$ такой, что*

$$\int^{\infty} \frac{dv}{f(v)^2} < \infty, \tag{2}$$

*то многообразие $M$ $G$-вырождено. Если при этом $G(x)$ — минимальная функция Грина с полюсом в точке $0 \in E_{t_0}$, то при $t > t_0$*

$$\min_{\partial E_t} G(x) \leqslant \int_{V_t}^{\infty} \frac{dv}{f(v)^2}.$$

Замечание. Условие (2) является точным. Если оно не выполняется для некоторой функции $f$ (удовлетворяющей дополнительно некоторым необременительным условиям), то можно построить пример $G$-вырожденного многообразия (а именно, поверхность вращения графика некоторой функции), имеющего изопериметрическую функцию, пропорциональную $f(v)$ при больших $v$.

Автор выражает благодарность Е. М. Ландису и А. Ибрагимову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Sario, M. Nakai, C. Wang, L. O. Chung. Classification theory of Riemannian manifolds.— Lect. Notes Math., 1977, 605.

[2] W. Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients.— Univ. of Minnesota, 1962.

[3] S. Y. Cheng, S. T. Yau, Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications.— Comm. Pure Appl. Math., 1975, 28:3, p. 333—354.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 19 мая 1982 г.