

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

Alexander Grigorian  
Universität Bielefeld

SS 2015

## Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Was ist eine DGL . . . . .	1
1.2	DGLen erster Ordnung . . . . .	1
1.3	Trennbare DGLen . . . . .	4
1.4	Lineare DGLen 1er Ordnung . . . . .	10
1.5	Differentialformen . . . . .	13
1.5.1	Exakte und geschlossene Differentialformen . . . . .	13
1.5.2	Lösen von DGLen mit Hilfe von exakten Differentialformen . . . . .	14
1.5.3	Lemma von Poincaré . . . . .	16
1.5.4	Wegintegrale und Exaktheit . . . . .	18
1.5.5	Integrierender Faktor . . . . .	21
1.5.6	Parameter-abhängige Integrale . . . . .	22
1.6	Die DGLen 2er Ordnung . . . . .	24
1.6.1	Zweites Newtonsches Gesetz (das Aktionsprinzip) . . . . .	24
1.6.2	Elektrische Schaltung . . . . .	25
1.7	Normalsystem . . . . .	26
1.8	DGLen höherer Ordnung . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Lineare DGLen und Systeme von DGLen</b>	<b>28</b>
2.1	Lineare Operatoren in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	28
2.2	Existenz von Lösungen linearer Normalsysteme . . . . .	31
2.3	Existenz von Lösung linearer DGLen $n$ -ter Ordnung . . . . .	32
2.4	Der Raum von Lösungen linearer homogenen DGLen . . . . .	33
2.5	Lösungsmethoden für homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	33
2.6	Lösungsmethoden für inhomogene DGLen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	38
2.7	* Die DGLen 2-ter Ordnung mit periodischer Störfunktion . . . . .	44
2.8	Beweise von Sätzen 2.4, 2.5, 2.8 . . . . .	51
2.9	Beweis von dem Satz 2.1 . . . . .	58
2.10	Der Raum von Lösungen linearer Normalsysteme . . . . .	63
2.11	Variation der Konstanten . . . . .	67
2.12	Wronski-Determinante und Liouvillesche Formel . . . . .	74
2.13	Lösungsmethoden für homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	78
2.13.1	Spezieller Fall . . . . .	78

2.13.2	Exponentialfunktion von Operatoren . . . . .	82
2.13.3	Eine Eigenschaft der Exponentialfunktion . . . . .	85
2.13.4	Exponentialfunktion von einem Jordanblock . . . . .	87
2.13.5	Blockdiagonalmatrizen . . . . .	89
2.13.6	Anwendung von Jordan-Normalform von Operatoren . . . . .	91
<b>3</b>	<b>Das Anfangswertproblem für allgemeine DGLen</b>	<b>102</b>
3.1	Lipschitz-stetige Funktionen . . . . .	102
3.2	Existenz und Eindeutigkeit für Normalsysteme . . . . .	106
3.3	Existenz und Eindeutigkeit für skalare DGLen . . . . .	116
3.4	Maximale Lösungen . . . . .	117
3.5	Stetigkeit von Lösungen bezüglich $f(t, x)$ . . . . .	122
3.6	Stetigkeit von Lösungen in Parameter . . . . .	128
3.7	Differenzierbarkeit von Lösungen in Parameter . . . . .	133
3.7.1	Die Variationsgleichung . . . . .	133
3.7.2	Höhere Ableitungen in $s$ . . . . .	136
3.7.3	Konvexität und Hadamard-Lemma . . . . .	139
3.7.4	Beweise von Sätzen 3.12 und 3.13 . . . . .	143
<b>4</b>	<b>Autonome Systeme und Stabilität von Lösungen</b>	<b>148</b>
4.1	Autonome DGLen . . . . .	148
4.2	Stabilität eines linearen Systems . . . . .	150
4.3	Ljapunow-Sätze . . . . .	156
4.4	Beispiele von Ljapunow-Funktionen . . . . .	159
4.5	* Weitere Beispiele . . . . .	161
4.6	Beweise von Sätzen 4.2, 4.4 und 4.3 . . . . .	165
4.7	* Periodische Lösungen . . . . .	172
<b>5</b>	<b>Nullstellen von Lösungen und Sturm-Liouville-Problem</b>	<b>182</b>
5.1	Satz von Sturm . . . . .	182
5.2	Sturm-Liouville-Problem . . . . .	185
5.3	Satz von Sturm-Liouville . . . . .	186
5.4	* Eine Anwendung für Wärmeleitungsgleichung . . . . .	192
5.5	* Weitere Folgerungen von dem Satz von Sturm . . . . .	193
5.6	* Besselsche Gleichung . . . . .	196
5.7	* Orthogonalität . . . . .	198

# 1 Einführung

## 1.1 Was ist eine DGL

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (abgekürzt mit *DGL*) hat die Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

wobei  $x$  eine unabhängige reelle Variable ist,  $y = y(x)$  eine gesuchte Funktion (und  $y^{(k)}$  die  $k$ -te Ableitung von  $y$ ), und  $F$  eine gegebene Funktion von  $n + 2$  Variablen. Die Zahl  $n$ , die die maximale Ordnung der Ableitung  $y^{(k)}$  in (1.1) ist, heißt die *Ordnung* von der DGL. Man sagt auch, dass (1.1) eine DGL  $n$ -ter Ordnung ist.

Die Gleichung (1.1) heißt “*differential*”, weil sie die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält. Eigentlich stellt die Gleichung (1.1) eine Beziehung zwischen verschiedenen Ableitungen von  $y(x)$  dar. Die Differentialgleichung (1.1) heißt “*gewöhnlich*”, weil die Ableitungen  $y^{(k)}$  gewöhnlich sind, im Gegensatz zu partiellen Ableitungen. Es gibt auch die partiellen Differentialgleichungen, wo die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und deshalb die partiellen Ableitungen benutzt werden müssen, aber in diesem Kurs betrachten wir nur gewöhnliche DGLen.

Gewöhnliche DGLen entstehen in verschiedenen Gebieten von Mathematik, als auch in Wissenschaften und Technik, da viele Naturgesetze mittels Differentialgleichungen formuliert werden können. In meisten Anwendungen braucht man eine Lösung  $y(x)$  von (1.1) (mit gegebenen Randbedingungen) analytisch oder numerisch zu ermitteln. Es gibt bestimmte spezielle Typen von DGLen, die sich explizit analytisch lösen lassen. Andererseits, für ziemlich generellen Typen von DGLen kann man verschiedene Eigenschaften von Lösungen beweisen ohne sie explizit zu berechnen, z.B. die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, Differenzierbarkeit, usw. In diesem Kurs werden wir die beiden Richtungen erforschen: explizit Lösungen zu bestimmen und die allgemeinen Eigenschaften der Lösungen zu beweisen.

Am Anfang besprechen wir verschiedene Beispiele von DGLen 1er und 2er Ordnung, die sich explizit lösen lassen.

## 1.2 DGLen erster Ordnung

Eine allgemeine DGL 1er Ordnung hat die Form  $F(x, y, y') = 0$ . Häufig kann diese Gleichung bezüglich  $y'$  gelöst werden, und man erhält die DGL in der *expliziten* Form:

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

wobei  $y = y(x)$  eine gesuchte reelle Funktion einer reellen Variablen  $x$ , und  $f(x, y)$  eine gegebene Funktion von zwei reellen Variablen. Wir betrachten das Paar  $(x, y)$  als ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$ . Der Definitionsbereich von  $f$  ist dann eine Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^2$ . Die Menge  $D$  heißt auch der Definitionsbereich von DGL (1.2).

**Definition.** Sei  $y(x)$  eine reelle Funktion, die auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert ist. Die Funktion  $y(x)$  heißt eine (*spezielle*) Lösung von (1.2) genau dann, wenn

1. für jedes  $x \in I$ , der Punkt  $(x, y(x))$  ein Element von  $D$  ist;

2.  $y(x)$  an jeder Stelle  $x \in I$  differenzierbar ist;
3. für jedes  $x \in I$ , die Gleichung  $y'(x) = f(x, y(x))$  erfüllt ist.

Die Gesamtheit aller speziellen Lösungen von (1.2) heißt die *allgemeine* Lösung.

**Bemerkung.** Hier und im Folgenden ein Intervall bedeutet jede Menge der Form

$$\begin{aligned}
 (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\
 [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{geschlossenes Intervall} \\
 [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall} \\
 (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall}
 \end{aligned}$$

wobei  $a, b$  reelle oder  $\pm\infty$  sind und  $a < b$ .

Die Lösungen von (1.2) lassen sich eine graphische Darstellung wie folgt. Der Graph einer speziellen Lösung heißt eine *Integralkurve* der Gleichung. Offensichtlich ist jede Integral-Kurve im Definitionsbereich enthalten. Dass die Lösung  $y(x)$  die Gleichung  $y' = f(x, y)$  erfüllt bedeutet, dass die Tangente zur Integralkurve an jeder Stelle  $(x, y)$  die Steigung  $f(x, y)$  hat. Offensichtlich, man kann die Steigung an jeder Stelle  $(x, y) \in D$  bestimmen ohne die DGL zu lösen. Jeder Stelle  $(x, y) \in D$  entspricht eine *Richtung*: eine Gerade durch  $(x, y)$  mit der Steigung  $f(x, y)$ . Die Gesamtheit von allen Richtungen heißt das *Richtungsfeld* der DGL. Es ist klar, dass die Tangente zu jeder Integralkurve an jeder Stelle ein Element des Richtungsfeldes ist. Lösen von (1.2) hat die folgende graphische Bedeutung: man verbindet die Elemente des Richtungsfeldes durch eine Integralkurve (Fig. 1).

In der Regel lassen sich die allgemeinen DGLen nicht explizit analytisch lösen. Wir zeigen hier einige Klassen von Funktionen  $f(x, y)$ , bei denen die allgemeine Lösung von (1.2) in Form einer unbestimmten Integration gefunden werden kann.

**Beispiel.** Angenommen, die Funktion  $f$  hängt nicht von  $y$ , so dass (1.2) wird  $y' = f(x)$ . Offensichtlich muss  $y$  eine Stammfunktion von  $f$  sein. Unter der Voraussetzung, dass  $f$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $I$  ist, erhalten wir die allgemeine Lösung auf  $I$  durch die unbestimmte Integration:

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C,$$

wobei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  auf  $I$  ist und  $C$  eine beliebige Konstante ist.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y' = y$$

und ermitteln erst alle positive Lösungen. Angenommen  $y(x) > 0$  auf einem Intervall  $I$ , können wir mit  $y$  dividieren. Da

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)',$$

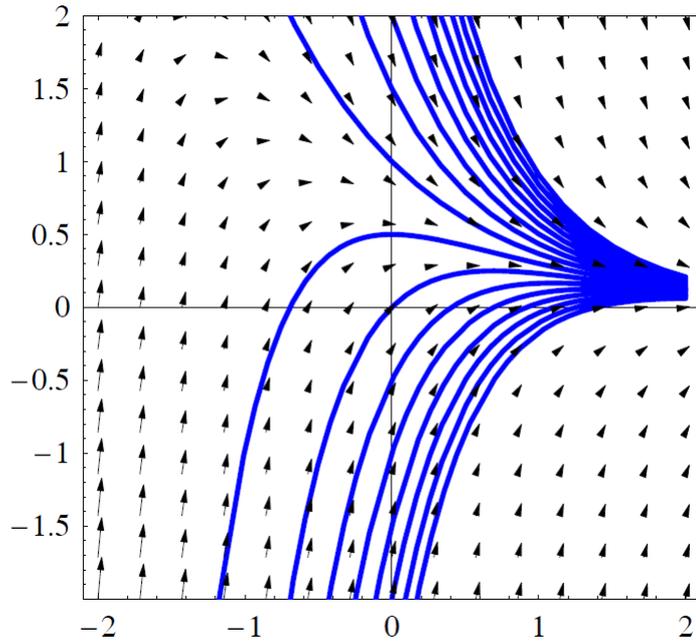


Figure 1: Integralkurven eines Richtungsfeldes

erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$(\ln y)' = 1.$$

Daraus folgt, dass

$$\ln y = \int dx = x + C,$$

also

$$y = e^C e^x = C_1 e^x,$$

wobei  $C_1 = e^C$ . Da  $C \in \mathbb{R}$  beliebig reell ist, ist  $C_1 = e^C$  beliebig positive. Daher sind alle positiven Lösungen  $y(x)$  auf  $I$  wie folgt:

$$y = C_1 e^x, \quad C_1 > 0.$$

Angenommen,  $y(x) < 0$  für alle  $x \in I$ , erhalten wir ebenso

$$\frac{y'}{y} = (\ln(-y))'$$

und

$$y = -C_1 e^x,$$

wobei  $C_1 > 0$ . So, jede Lösung  $y(x)$ , die immer entweder positive oder negative auf  $I$  bleibt, hat die Form

$$y(x) = C e^x,$$

wobei  $C > 0$  oder  $C < 0$ . Es ist klar, dass  $C = 0$  auch eine Lösung  $y \equiv 0$  ergibt. Die Integralkurven der Lösungen  $y = C e^x$  sind auf Fig. 2 gezeichnet worden. Jedoch bleibt die Frage, ob alle Lösungen bestimmt worden sind.

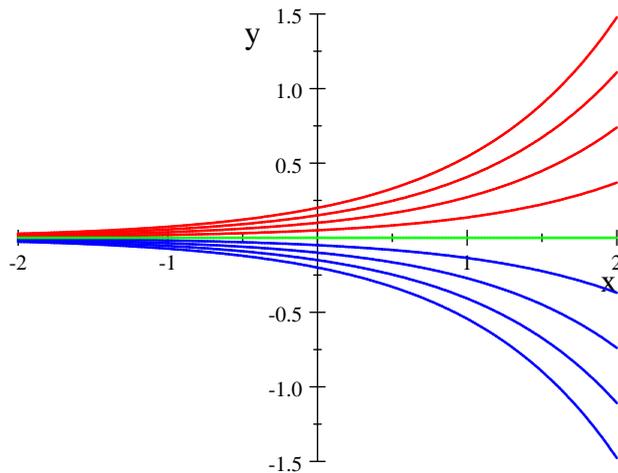


Figure 2: Die Integralkurven von  $y' = y$

**Behauptung.** Die Gesamtheit von Lösungen  $y = Ce^x$ , wobei  $C \in \mathbb{R}$ , ist die allgemeine Lösung von  $y' = y$ .

**Beweis.** Sei  $y(x)$  eine Lösung auf einem offenen Intervall  $I$ . Wir müssen zeigen, dass auf diesem Intervall gilt  $y = Ce^x$  für eine Konstante  $C$ . Ist  $y \equiv 0$  auf  $I$ , so gilt  $y = Ce^x$  mit  $C = 0$ . Angenommen,  $y(x_0) > 0$  an einer Stelle  $x_0 \in I$ , bezeichnen wir mit  $(a, b)$  ein maximales offenes Intervall um  $x_0$  wo  $y(x) > 0$ . Dann entweder einer von den Punkten  $a, b$  gehört zu  $I$  oder  $(a, b) = I$ .

Im ersten Fall, nehmen wir an, dass  $a \in I$  (der Fall  $b \in I$  ist ähnlich), was ergibt  $y(a) = 0$ . Da  $y(x)$  auf dem Intervall  $(a, b)$  positive ist, wir wissen schon, dass auf diesem Intervall  $y(x) = Ce^x$  gilt mit  $C > 0$ . Da  $e^x \neq 0$ , verschwindet die Lösung  $y(x)$  an der Stelle  $x = a$  nicht, was im Widerspruch zu  $y(a) = 0$  steht. Wir beschliessen, dass  $(a, b) = I$ , woraus folgt, dass  $y(x) = Ce^x$  auf  $I$ .

Mit dem gleichen Argument betrachtet man den Fall wenn  $y(x_0) < 0$  an einer Stelle  $x_0 \in I$ . ■

### 1.3 Trennbare DGLen

Eine *trennbare* DGL ist eine DGL in der Form

$$y' = f(x)g(y), \quad (1.3)$$

wobei  $f$  und  $g$  stetige Funktionen sind, auf offenen Intervallen  $I$  and  $J$  jeweils. Damit ist der Definitionsbereich von (1.3)  $I \times J$ .

Jede trennbare DGL kann mit Hilfe von dem folgenden Satz gelöst werden.

**Satz 1.1** (Trennung der Variablen) *Angenommen,  $g(y) \neq 0$  auf  $J$ . Sei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  auf  $I$  und  $G(y)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g(y)}$  auf  $J$ . Eine Funktion  $y : I' \rightarrow J$ , wobei  $I'$  ein nichtleeres offenes Teilintervall von  $I$  ist, löst (1.3) genau dann, wenn*

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad (1.4)$$

für alle  $x \in I'$ , wobei  $C$  eine beliebige Konstante ist.

Z.B., betrachten wir noch mal die DGL  $y' = y$  im Bereich  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ . Dann  $f(x) = 1$  and  $g(y) = y \neq 0$  so dass Satz 1.1 ist anwendbar. Wir haben

$$F(x) = \int f(x) dx = \int dx = x$$

und

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dy}{y} = \ln y$$

(wir schreiben hier keine Integrationskonstante  $C$ , weil wir nur eine Stammfunktion brauchen). Die Identität (1.4) wird

$$\ln y = x + C,$$

woraus  $y = C_1 e^x$  folgt wie zuvor.

**Beweis.** Sei  $y : I' \rightarrow J$  eine Lösung von (1.3). Da  $g(y) \neq 0$ , wir können (1.3) mit  $g(y)$  dividieren und erhalten

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x). \quad (1.5)$$

Da  $f(x) = F'(x)$  und  $\frac{1}{g'(y)} = G'(y)$ , wir erhalten durch die Kettenregel, dass

$$\frac{y'}{g(y)} = G'(y) y' = (G(y(x)))'.$$

Daher ist die DGL (1.3) äquivalent zu

$$G(y(x))' = F'(x), \quad (1.6)$$

woraus (1.4) folgt durch Integration.

Umgekehrt, erfüllt eine Funktion  $y : I' \rightarrow J$  die Gleichung (1.4) und ist außerdem auf  $I'$  differenzierbar, so können wir die Identität (1.4) ableiten und deshalb (1.6) erhalten, woraus (1.3) auch folgt. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $y(x)$  unbedingt differenzierbar ist. Da die Funktion  $g(y)$  verschwindet nicht, ist  $g(y)$  entweder positive oder negative auf ganzem Intervall  $J$ . Dann die Stammfunktion  $G(y)$  von  $\frac{1}{g(y)}$  ist entweder strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend auf  $J$ . In den beiden Fällen, ist die Umkehrfunktion  $G^{-1}$  auf dem offenen Intervall  $G(J)$  definiert und differenzierbar. Insbesondere kann man die Gleichung (1.4) umkehren und damit erhalten, dass

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C). \quad (1.7)$$

Daraus folgt, dass  $y(x)$  differenzierbar ist als Verkettung von zwei differenzierbaren Funktionen. ■

**Korollar 1.2** *Unter den Bedingungen von Satz 1.1, für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$ , existiert eindeutiger Wert von der Konstante  $C$ , derart, dass die Funktion (1.7) eine Lösung von (1.3) mit die Bedingung  $y(x_0) = y_0$  ist.*

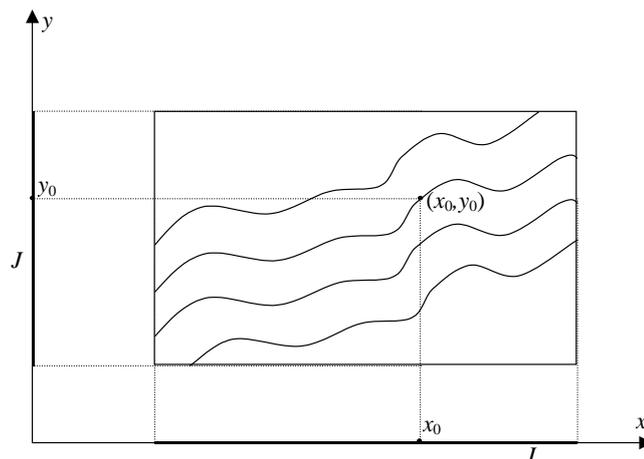


Figure 3: Jeder Punkt  $(x_0, y_0)$  hat genau eine Integralkurve, die durch  $(x_0, y_0)$  geht.

Die Bedingung  $y(x_0) = y_0$  heißt die *Anfangsbedingung*. Dieser Begriff ist mit dem Begriff von *Anfangswertproblem* verbunden. Letzteres ist eine Aufgabe die Funktion  $y(x)$  zu bestimmen, die die folgenden Bedingungen erfüllt

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

wobei  $(x_0, y_0)$  ein gegebener Punkt im Definitionsbereich  $D$  von  $f(x, y)$  ist. Das Korollar 1.2 bedeutet, dass das Anfangswertproblem für die trennbare DGL (1.4) unter der Bedingung  $g \neq 0$  eindeutige Lösung für alle  $(x_0, y_0) \in I \times J$  hat. D.h., für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  existiert genau eine Integralkurve der DGL, die durch diesen Punkt geht (Fig. 3). Wie wir es später sehen, das gilt auch für bestimmte allgemeinere DGLen, aber nicht für alle DGLen.

**Beweis.** An den Stellen  $x = x_0$  and  $y = y_0$ , ergibt (1.4)  $C = G(y_0) - F(x_0)$ , woraus die Eindeutigkeit von  $C$  folgt. Jetzt zeigen wir, dass dieser Wert von  $C$  immer eine Lösung  $y(x)$  liefert. Wir müssen nur noch überprüfen, dass die Funktion  $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$  auf einem offenen Intervall um  $x_0$  definiert ist (a priori es konnte sein, dass der Definitionsbereich der Verkettung von zwei Funktionen leer ist). Für  $x = x_0$  erhalten wir

$$G^{-1}(F(x_0) + C) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0,$$

so dass die Funktion  $y(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  definiert ist. Da die beiden Funktionen  $G^{-1}$  and  $F + C$  stetig sind und auf offenen Intervallen definiert, ist ihre Verkettung auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definiert. Da diese Teilmenge  $x_0$  enthält, muss sie auch ein Intervall um  $x_0$  enthalten, was zu beweisen war. ■

Die Funktion  $g(y)$  in der DGL (1.3) kann generell die Nullstellen haben. Ist  $s$  eine Nullstelle von  $g$ , löst die konstante Funktion  $y(x) \equiv s$  die DGL (1.3). Für allgemeine Funktion  $g$  gilt folgendes.

**Korollar 1.3** Sei  $f$  und  $g$  beliebige stetige Funktionen wie im Satz 1.1, aber ohne die Voraussetzung  $g \neq 0$ . Dann für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  existiert eine Lösung von (1.3), die durch  $(x_0, y_0)$  geht (also, das Anfangswertproblem ist immer lösbar).

**Beweis.** Ist  $y_0$  eine Nullstelle von  $g$ , so ist die gewünschte Lösung  $y(x) \equiv y_0$ . Ist  $y_0$  keine Nullstelle von  $g$ , so betrachten wir ein offenes Intervall  $J_0 \subset J$  um  $y_0$  wo  $g$  nicht verschwindet. Dann lösen wir das Anfangswertproblem im Definitionsbereich  $I \times J_0$  mit Hilfe von Korollar 1.2 und erhalten die gewünschte Lösung. ■

Im Gegenteil, gilt die Eindeutigkeit im Anfangswertproblem nicht immer, wie wir in weiteren Beispielen sehen.

Wie wir es später beweisen, die Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

gilt, vorausgesetzt  $f$  ist stetig und  $g$  ist stetig differenzierbar.

In Anwendungen von dem Satz 1.1 muss man die Funktionen  $F$  und  $G$  bestimmen. Es ist bequem die Auswertung von  $F$  und  $G$  mit anderen Berechnungen zu kombinieren, wie folgt. Der erste Schritt ist immer dividieren (1.3) mit  $g$  um (1.5) zu erhalten. Danach integriert man die beiden Seiten bezüglich  $x$  und erhält

$$\int \frac{y'dx}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (1.8)$$

Der nächste Schritt ist die Integrals auszuwerten. Man findet eine Stammfunktion  $F(x)$  von  $f$  so dass

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.9)$$

Auf der linken Seite von (1.8) macht man die Substitution  $y = y(x)$  (die Funktion  $y(x)$  wird durch eine unabhängige Variable  $y$  ersetzt). Da  $y'dx = dy$ , erhalten wir die Identität

$$\int \frac{y'dx}{g(y)} = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + C,$$

die zusammen mit (1.3) und (1.9) ergibt (1.4).

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$y' - xy^2 = 2xy, \quad (1.10)$$

im Bereich  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Umschreiben sie in der Form

$$y' = x(y^2 + 2y)$$

und bemerken, dass die DGL trennbar ist. Die Funktion  $g(y) = y^2 + 2y$  hat zwei Nullstellen  $y = 0$  and  $y = -2$ . Daher erhalten wir zwei konstanten Lösungen  $y \equiv 0$  and  $y \equiv -2$ . Betrachten jetzt die DGL in den Bereichen wo  $g(y) \neq 0$ :

$$\mathbb{R} \times (-\infty, -2), \quad \mathbb{R} \times (-2, 0), \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty). \quad (1.11)$$

In jedem von diesen Bereichen benutzen wir Trennung der Variablen und erhalten

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y+2} \right| = \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Potenzieren ergibt dann

$$\frac{y}{y+2} = C_1 e^{x^2},$$

wobei  $C_1 = \pm e^{2C}$ . Es ist klar, dass  $C_1$  alle reellen Werte annehmen kann, außer 0. Da  $y \equiv 0$  auch eine Lösung ist, kann  $C_1$  auch 0 sein.. Umbenennen wir  $C_1$  in  $C$  so dass

$$\frac{y}{y+2} = C e^{x^2},$$

wobei  $C$  alle reellen Werte annimmt. Daher erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$y = \frac{2C e^{x^2}}{1 - C e^{x^2}} \quad \text{und} \quad y \equiv -2. \quad (1.12)$$

Die Integralkurven von (1.12) sind auf Fig. 4 gezeichnet worden.

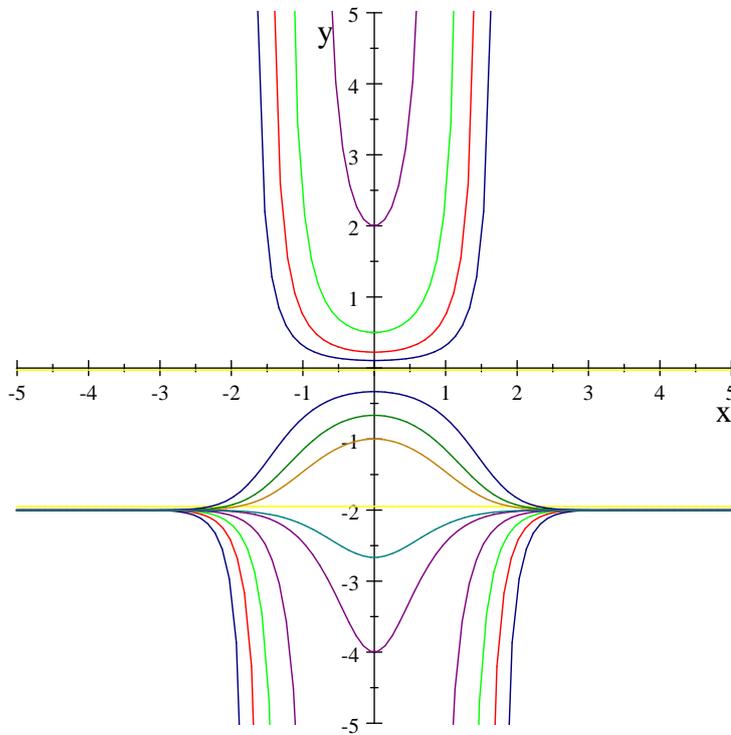


Figure 4: Die Integralkurven von (1.10)

Wir behaupten, dass die Integralkurven von Lösungen (1.12) nie schneiden einander. In der Tat nimmt jede Lösung

$$y = \frac{2C e^{x^2}}{1 - C e^{x^2}}, \quad C \neq 0, \quad (1.13)$$

die Werte 0 und  $-2$  nicht an, so dass diese Lösung und die Lösungen  $y \equiv 0$  und  $y \equiv 2$  nie schneiden einander. Insbesondere bleibt jede Lösung (1.13) immer in einem von Bereichen (1.11). Zwei Lösungen (1.13), die in verschiedenen Bereichen

liegen, schneiden einander offensichtlich nicht. Zwei Lösungen (1.13) mit verschiedenen Werten von  $C$ , die in einem Bereich liegen, schneiden einander auch nicht, nach Korollar 1.2. Mit dem gleichen Argument, wie im obigen Beispiel mit  $y' = y$ , zeigt man, dass (1.12) die allgemeine Lösung ist. Daraus folgt, dass das Anfangswertproblem für (1.10) eindeutig lösbar ist.

Jetzt zeigen wir, wie man ein Anfangswertproblem für (1.10) lösen kann, z.B. mit Anfangsbedingung  $y(0) = -4$ . Einsetzen  $x = 0$  und  $y = -4$  in (1.12) ergibt eine Gleichung für  $C$ :

$$\frac{2C}{1-C} = -4,$$

woraus  $C = 2$  folgt. Daher erhalten wir die folgende Lösung:

$$y = \frac{4e^{x^2}}{1 - 2e^{x^2}}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$y' = \sqrt{|y|},$$

im Bereich  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Diese DGL ist trennbar mit Funktionen  $f(x) = 1$  und  $g(y) = \sqrt{|y|}$ . Die Funktion  $g(y)$  hat eine Nullstelle  $y = 0$ , so dass die konstante Funktion  $y \equiv 0$  eine Lösung ist. In den Bereichen  $y > 0$  und  $y < 0$  lösen wir die DGL mit Hilfe von Trennung der Variablen. Im Bereich  $y > 0$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx,$$

$$2\sqrt{y} = x + C,$$

und

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x > -C, \tag{1.14}$$

wobei die Beschränkung  $x > -C$  aus der vorherigen Gleichung kommt. Ebenso, im Bereich  $y < 0$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-y}} = \int dx,$$

$$-2\sqrt{-y} = x + C,$$

und

$$y = -\frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x < -C. \tag{1.15}$$

Die Integralkurven der Lösungen (1.14) und (1.15) sind auf Fig. 5 gezeigt. Wir sehen, dass die Integralkurven aus den Bereichen  $y > 0$  und  $y < 0$  schneiden die Linie  $y = 0$ , die auch eine Lösung ist. Das ermöglicht Erstellung von mehreren Lösungen wie folgt: für jedes Paar von reellen Zahlen  $a < b$ , betrachten wir die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x - a)^2, & x < a, \\ 0, & a \leq x \leq b, \\ \frac{1}{4}(x - b)^2, & x > b, \end{cases} \tag{1.16}$$

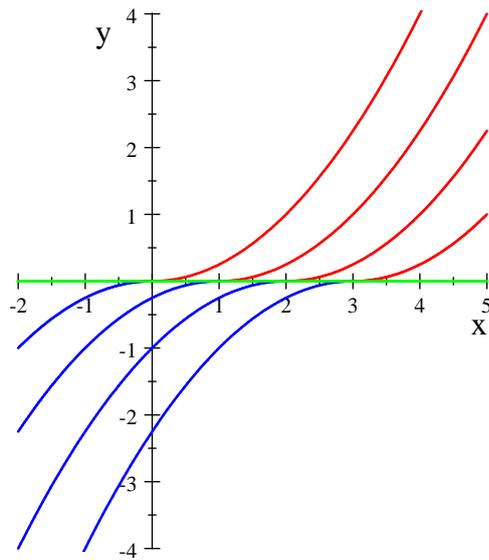


Figure 5: Die Integralkurven von  $y' = \sqrt{|y|}$

die durch Verkleben von drei anderen Lösungen gewonnen wird und offensichtlich eine Lösung für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist. Es ist jetzt klar, dass durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  unendliche viele Integralkurven der DGL gehen, und die Eindeutigkeit im Anfangswertproblem gilt nicht.

## 1.4 Lineare DGLen 1er Ordnung

Eine *lineare* DGL erster Ordnung hat die Form

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (1.17)$$

wobei  $a(x)$  und  $b(x)$  gegebene Funktionen sind, die auf einem Intervall  $I$  definiert sind. Die Gleichung ist “linear” genannt, weil sie von  $y$  und  $y'$  linear abhängt.

Jede lineare DGL kann gelöst werden wie folgt.

**Satz 1.4** (Variation der Konstanten) *Seien  $a(x)$  und  $b(x)$  stetige Funktionen auf dem Intervall  $I$ . Dann hat die allgemeine Lösung von (1.17) die folgende Form:*

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx, \quad (1.18)$$

wobei  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$  auf  $I$  ist.

Wir betonen, dass die Funktion  $y(x)$  auf dem ganzen Intervall  $I$  definiert ist und auch eine Lösung auf  $I$  ist.

**Beweis.** Betrachten wir eine neue unbekannte Funktion  $u(x) = y(x) e^{A(x)}$ , also

$$y(x) = u(x) e^{-A(x)}. \quad (1.19)$$

Einsetzen (1.19) in die Gleichung (1.17) ergibt folgendes:

$$\begin{aligned}(ue^{-A})' + aue^{-A} &= b, \\ u'e^{-A} - ue^{-A}A' + aue^{-A} &= b.\end{aligned}$$

Da  $A' = a$ , fallen die zwei Terme auf der linken Seite weg, und wir erhalten eine sehr einfache Gleichung für  $u(x)$ :

$$u'e^{-A} = b.$$

Daraus folgt, dass  $u' = be^A$  und

$$u = \int be^A dx,$$

das zusammen mit (1.19) ergibt (1.18). ■

**Korollar 1.5** *Unter der Bedingungen von Satz 1.4, für jedes  $x_0 \in I$  and  $y_0 \in \mathbb{R}$ , existiert genau eine Lösung  $y(x)$  von (1.17), die auf dem Intervall  $I$  definiert ist und die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt (also, durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$  geht genau eine Integralkurve der DGL).*

**Beweis.** Sei  $B(x)$  eine Stammfunktion von  $be^A$ . Dann kann die Lösung (1.18) in der folgenden Form umgeschrieben werden:

$$y = e^{-A(x)} (B(x) + C), \tag{1.20}$$

wobei  $C$  eine beliebige reelle Konstante ist. Offensichtlich ist diese Lösung auf  $I$  definiert. Einsetzen der Bedingung  $y(x_0) = y_0$  in (1.20) ergibt eindeutigen Wert der Konstante  $C$  wie folgt:

$$C = y_0 e^{A(x_0)} - B(x_0).$$

Offensichtlich, die Lösung (1.20) mit diesem Wert von  $C$  erfüllt die Anfangsbedingung. ■

Erklären wir jetzt die Motivation für die Substitution (1.19). Sei erst  $b(x) \equiv 0$ . In diesem Fall heißt die DGL (1.17) *homogen*:

$$y' + a(x)y = 0.$$

Bemerken wir, dass die homogene Gleichung trennbar ist. In den Bereichen  $y > 0$  und  $y < 0$  erhalten wir

$$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

und

$$\ln |y| = \int \frac{dy}{y} = - \int a(x) dx = -A(x) + C.$$

Daraus folgt, dass

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \tag{1.21}$$

wobei  $C$  alle reellen Werte annehmen kann (inklusive  $C = 0$  das entspricht der Lösung  $y \equiv 0$ ).

Für die allgemeine lineare DGL (1.17), ersetzt man die Konstante  $C$  in (1.21) durch eine neue unbekannte Funktion  $C(x)$ , die im Beweis  $u(x)$  bezeichnet wurde. Da die Konstante durch eine Variable ersetzt wurde, so wurde dieses Verfahren "Variation der Konstanten" genannt. Ähnliche Methode funktioniert auch für die linearen DGLen höherer Ordnung.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2} \quad (1.22)$$

im Bereich  $x > 0$ . Berechnen von Stammfunktion von  $a(x)$  ergibt

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

(wir schreiben hier keine Konstante  $C$ , da wir nur eine Stammfunktion brauchen). Durch (1.18) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{x} \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2x} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2x} (e^{x^2} + C),$$

wobei  $C$  eine beliebige reelle Konstante ist.

Alternativ kann man zunächst die homogene DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

lösen, z.B. im Bereich  $x > 0, y > 0$ . Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x} \\ (\ln y)' &= -(\ln x)' \\ \ln y &= -\ln x + C_1 \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Dann sucht man die Lösung von (1.22) in der Form  $y = \frac{C(x)}{x}$ . Einsetzen in (1.22) ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x} \frac{C}{x} &= e^{x^2}, \\ \frac{C'x - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} &= e^{x^2}, \\ \frac{C'}{x} &= e^{x^2}, \quad C' = e^{x^2}x, \\ C(x) &= \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} (e^{x^2} + C_0). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{2x} (e^{x^2} + C_0),$$

wobei  $C_0$  ist eine beliebige reelle Konstante. Die Integralkurven werden auf Fig. 6 gezeigt.

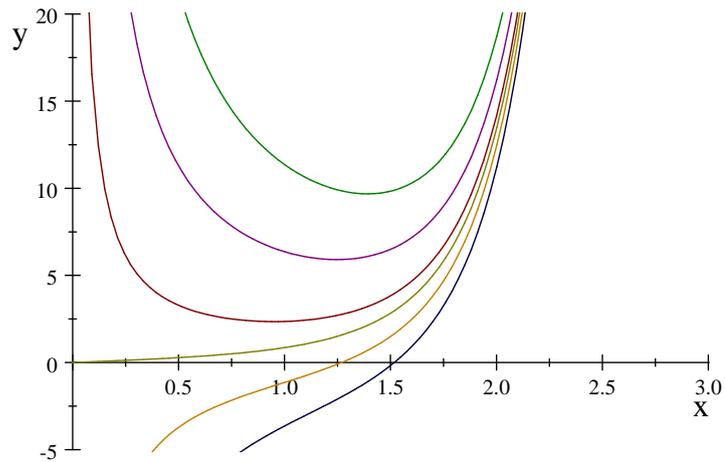


Figure 6: Die Integralkurven von (1.22)

## 1.5 Differentialformen

### 1.5.1 Exakte und geschlossene Differentialformen

Sei  $F(x, y)$  eine reelle Funktion, die auf einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  definiert ist. Erinnern wir die Definition des Differential der Funktion  $F$ . Die Funktion  $F$  ist differenzierbar an einer Stelle  $(x, y) \in \Omega$ , wenn reelle Zahlen  $a, b$  existieren, derart, dass

$$F(x + dx, y + dy) - F(x, y) = adx + bdy + o(|dx| + |dy|),$$

für  $dx, dy \rightarrow 0$ . Die Inkremente  $dx$  und  $dy$  jeweils von  $x$  und  $y$  werden als die neuen unabhängigen Variablen betrachtet und heißen die Differentiale der Variablen  $x$  bzw  $y$ . Die lineare Funktion

$$dx, dy \mapsto adx + bdy$$

heißt totales *Differential* von  $F$  an der Stelle  $(x, y)$  und ist mit  $dF$  oder  $dF(x, y)$  bezeichnet; also

$$dF = adx + bdy. \quad (1.23)$$

Im Allgemeinen sind  $a$  und  $b$  die Funktionen von  $(x, y)$ .

Die folgenden Beziehungen bestehen zwischen die Begriffe von Differential und partielle Ableitungen.

1. Ist  $F$  differenzierbar an einer Stelle  $(x, y)$  und (1.23) gilt, so existieren die partiellen Ableitungen  $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$  und  $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$  an  $(x, y)$ , und es gilt

$$F_x = a, \quad F_y = b. \quad (1.24)$$

2. Ist  $F$  stetig differenzierbar in  $\Omega$  (also die partielle Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  existieren an jeder Stelle in  $\Omega$  und sind stetig in  $\Omega$ ), so ist  $F$  differenzierbar an jeder Stelle  $(x, y) \in \Omega$  und

$$dF = F_x dx + F_y dy. \quad (1.25)$$

**Definition.** Gegeben seien zwei Funktionen  $a(x, y)$  und  $b(x, y)$  auf  $\Omega$ , eine *Differentialform* ist die Funktion

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

von den unabhängigen Variablen  $(x, y) \in \Omega$  und  $dx, dy \in \mathbb{R}$ . Die Differentialform heißt *exakt* in  $\Omega$  falls es eine differenzierbare Funktion  $F$  auf  $\Omega$  gibt, derart, dass

$$dF = adx + bdy. \quad (1.26)$$

Die Funktion  $F$  mit (1.26) heißt ein *Integral* (oder *Potentialfunktion*) der Form.

Die folgende Behauptung enthält die allgemeinen Eigenschaften von Integrals und exakten Formen.

**Lemma 1.6** (a) *Seien  $a, b$  stetige Funktionen auf  $\Omega$ . Eine Funktion  $F$  auf  $\Omega$  ist ein Integral von  $adx + bdy$  genau dann, wenn  $F_x = a$  and  $F_y = b$*

(b) (Notwendige Bedingung für Exaktheit) *Seien  $a, b$  stetig differenzierbare Funktionen auf  $\Omega$ . Ist die Differentialform  $adx + bdy$  exakt, so gilt die folgende Identität in  $\Omega$ :*

$$a_y = b_x. \quad (1.27)$$

**Beweis.** (a) Die Identität  $dF = adx + bdy$  ergibt immer  $F_x = a$  und  $F_y = b$ . Umgekehrt, gelten die Bedingungen  $F_x = a$  und  $F_y = b$ , dann ist  $F$  stetig differenzierbar und deshalb  $dF = F_x dx + F_y dy$ . Daraus folgt dass  $dF = adx + bdy$  so dass  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$  ist.

(b) Ist  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$ , dann gilt  $F_x = a$  und  $F_y = b$ . Insbesondere sind die Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Schwarz, es gilt  $F_{xy} = F_{yx}$  woraus  $a_y = b_x$  folgt. ■

**Definition.** Die Differentialform  $adx + bdy$  mit stetig differenzierbaren Funktion  $a$  und  $b$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  heißt *geschlossen* falls in  $\Omega$  die Identität  $a_y = b_x$  gilt.

Es folgt aus Lemma 1.6(b), dass jede exakte Form geschlossen ist, d.h. die Geschlossenheit eine notwendige Bedingung für die Exaktheit ist.

Im Allgemeinen, die Geschlossenheit ist keine hinreichende Bedingung für Exaktheit, d.h. eine Differentialform kann geschlossen aber nicht exakt sein, wie wir unterhalb sehen. Da die Geschlossenheit ist einfacher zu überprüfen als die Exaktheit, es wäre sehr nützlich zu wissen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen die Geschlossenheit ergibt die Exaktheit. Wir werden eine solche Behauptung unterhalb beweisen, aber zuerst besprechen wir die Motivation und betrachten die Beispiele.

### 1.5.2 Lösen von DGLen mit Hilfe von exakten Differentialformen

Unsere Interesse an die Differentialformen liegt daran, dass die folgende DGL

$$a(x, y) + b(x, y) y' = 0 \quad (1.28)$$

sich mit Hilfe von dem Integral der Differentialform  $adx + bdy$  lösen lässt. Natürlich kann die DGL (1.28) in der allgemeinen Form  $y' = f(x, y)$  umgeschrieben werden,

wobei  $f = -a/b$ , aber das hilft für Lösung nicht. Da  $y' = \frac{dy}{dx}$ , so schreiben wir die DGL (1.28) wie folgt um:

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0. \quad (1.29)$$

Man sieht in der linken Seite die Differentialform  $adx + bdy$ . Die DGL (1.28) (und (1.29)) heißt exakt (bzw geschlossen) genau dann, wenn die Differentialform  $adx + bdy$  exakt ist (bzw geschlossen).

**Satz 1.7** *Seien  $a, b$  stetige Funktionen auf  $\Omega$ , derart, dass die Differentialform  $adx + bdy$  exakt ist, und sei  $F$  ein Integral dieser Form. Sei  $y(x)$  eine differenzierbare Funktion, die auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert, derart, dass der Graph von  $y$  in  $\Omega$  enthalten ist. Dann löst die Funktion  $y$  die DGL (1.28) genau dann, wenn*

$$F(x, y(x)) = \text{const auf } I \quad (1.30)$$

(d.h. wenn Funktion  $F$  eine Konstante auf dem Graph von  $y$  ist).

Die Identität (1.30) kann als eine allgemeine Lösung von (1.28) betrachtet werden. Die Funktion  $F$  heißt auch *erstes Integral* der DGL (1.28).

**Beweis.** Da der Graph von  $y(x)$  in  $\Omega$  enthalten wird, ist die Verkettung  $F(x, y(x))$  auf  $I$  definiert. Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x + F_y y' = a + by'.$$

Daher ist die Gleichung  $a + by' = 0$  äquivalent zu  $\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0$  auf  $I$ , und letzteres äquivalent zu  $F(x, y(x)) = \text{const auf } I$ . ■

**Beispiel.** 1. Die Form  $ydx - xdy$  ist nicht geschlossen weil  $a_y = 1$  und  $b_x = -1$ . Dann ist sie auch nicht exakt.

2. Die Form

$$ydx + xdy$$

ist geschlossen da  $a_y = 1 = b_x$ . Sie ist auch exakt weil sie in  $\mathbb{R}^2$  ein Integral  $F(x, y) = xy$  hat, da  $F_x = y = a$  und  $F_y = x = b$ . Die entsprechende DGL

$$y + xy' = 0$$

hat nach Satz 1.7 die allgemeine Lösung  $xy = C$ , d.h.  $y = \frac{C}{x}$ . In diesem Fall erhält man das gleiche Ergebnis auch mit Hilfe von Trennung der Variablen.

3. Die Form

$$2xydx + (x^2 + y^2) dy$$

ist geschlossen weil

$$a_y = (2xy)_y = 2x = (x^2 + y^2)_x = b_x.$$

Sie ist auch exakt, weil sie in  $\mathbb{R}^2$  ein Integral

$$F(x, y) = x^2 y + \frac{y^3}{3}$$

besitzt. Wir erklären es später, wie man dieses Integral ermitteln kann. Aber wenn man  $F(x, y)$  schon weiß, kann man Lemma 1.6(a) benutzen, um zu überprüfen, dass  $F$  wirklich ein Integral ist. In diesem Beispiel haben wir

$$F_x = 2xy = a \quad \text{und} \quad F_y = x^2 + y^2 = b$$

so dass  $F$  ein Integral ist. Die entsprechende DGL

$$2xy + (x^2 + y^2) y' = 0 \tag{1.31}$$

hat die allgemeine Lösung  $x^2y + \frac{y^3}{3} = C$  (siehe Fig. 7).

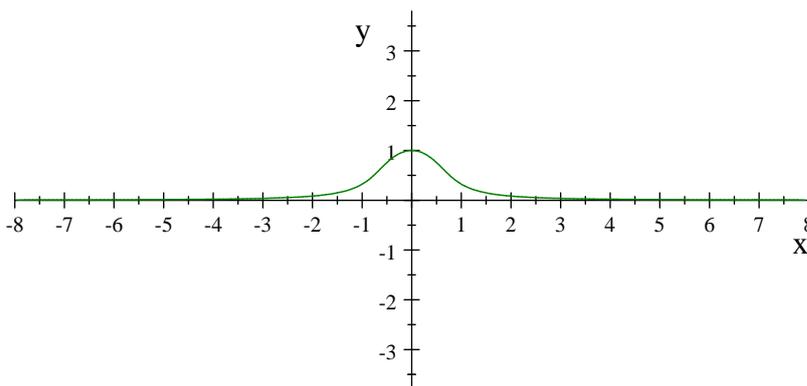


Figure 7: Die Integralkurven von (1.31)

### 1.5.3 Lemma von Poincaré

Eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  heißt *Rechteck* wenn sie die Form  $I \times J$  hat, wobei  $I$  und  $J$  zwei Intervalle sind. Das Rechteck ist offen, wenn die beiden Intervalle  $I$  und  $J$  offen sind. Der folgende Satz antwortet auf die Frage, wie die Exaktheit der Differentialform in einem Rechteck bestimmt werden kann.

**Satz 1.8** (Lemma von Poincaré – hinreichende Bedingung für Exaktheit) *Seien  $\Omega$  ein offenes Rechteck und  $a, b$  stetig differenzierbare Funktionen auf  $\Omega$ . Ist die Differentialform  $adx + bdy$  geschlossen in  $\Omega$  (also  $a_y \equiv b_x$  gilt in  $\Omega$ ), so ist sie auch exakt in  $\Omega$ . Darüber hinaus kann ein Integral  $F$  von  $adx + bdy$  durch die folgende Identität bestimmt werden:*

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y b(x, t) dt, \tag{1.32}$$

wobei  $(x_0, y_0) \in \Omega$  ein beliebiger Punkt ist (Fig. 8).

Nach Lemma 1.6, eine exakte Form ist immer geschlossen. Deshalb bedeutet Satz 1.8, dass die Form  $adx + bdy$  in einem Rechteck exakt genau dann ist, wenn sie geschlossen ist. In allgemeinen Teilmengen  $\Omega$  gilt diese Äquivalenz nicht, wie wir es später sehen werden.

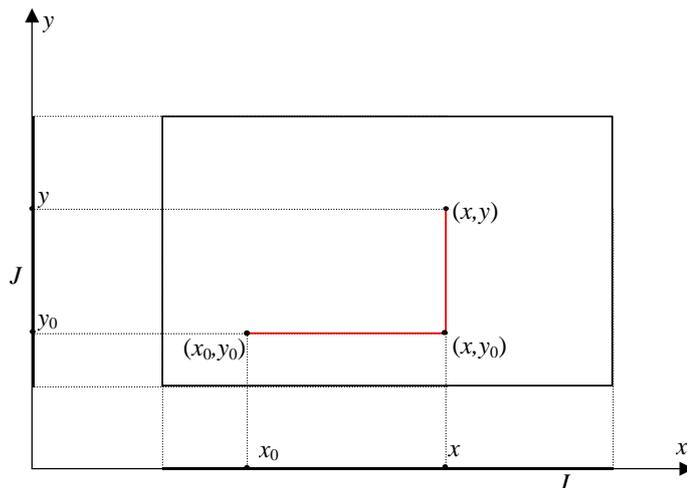


Figure 8: Die Stellen  $(x_0, y_0)$  und  $(x, y)$  im Rechteck  $\Omega$

**Beweis.** Da  $\Omega$  ein Rechteck ist, so für jeden Punkt  $(x, y) \in \Omega$  liegt auch der Punkt  $(x, y_0)$  in  $\Omega$ . Darüber hinaus liegen die beiden Intervalle  $[(x_0, y_0), (x, y_0)]$  und  $[(x, y_0), (x, y)]$  in  $\Omega$ , so dass das Integral in (1.32) wohldefiniert ist.

Angenommen, dass die Differentialform  $adx + bdy$  geschlossen ist, müssen wir zeigen, dass die Funktion  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$  ist. Da  $a$  und  $b$  stetig differenzierbar sind, so reicht es nach Lemma 1.6(b) zu überprüfen, dass

$$F_x = a \quad \text{und} \quad F_y = b.$$

Ableiten der Identität (1.32) in  $y$  ergibt

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y b(x, t) dt = b(x, y).$$

Ableiten (1.32) in  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y b(x, t) dt \\ &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} b(x, t) dt, \end{aligned} \tag{1.33}$$

wobei in (1.33) das Integralzeichen und die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x}$  vertauscht wurden. Dieser Vertausch wird unterhalb in Lemma 1.10 begründet. Einsetzen  $b_x = a_y$  in (1.33) ergibt

$$\begin{aligned} F_x &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y a_y(x, t) dt \\ &= a(x, y_0) + (a(x, y) - a(x, y_0)) \\ &= a(x, y), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Obwohl es logisch nicht notwendig ist, zeigen wir jetzt, wie die Formel (1.32) für  $F$  ermittelt werden kann. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $F(x_0, y_0) = 0$  (In der Tat, ist  $F$  ein Integral, ist auch  $F + C$  ein Integral, für jede Konstante  $C$ ; indem wir eine geeignete Konstante wählen, kann die Gleichung  $F(x_0, y_0) = 0$  erfüllt werden). Da  $F_x = a$  und  $F_y = b$  gelten, erhalten wir nach dem Fundamentalsatz der Analysis, dass

$$F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x F_x(s, y_0) ds = \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds,$$

$$F(x, y) - F(x, y_0) = \int_{y_0}^y F_y(x, t) dt = \int_{y_0}^y b(x, t) dt,$$

woraus (1.32) folgt.

**Beispiel.** Betrachten wir wieder die Differentialform

$$2xydx + (x^2 + y^2) dy$$

in  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Wie wissen schon, dass diese Form geschlossen ist. Da  $\mathbb{R}^2$  ein offenes Rechteck ist, erhalten wir nach Satz 1.8, dass diese Form in  $\mathbb{R}^2$  exakt ist. Das Integral  $F$  der Differentialform kann nach (1.32) berechnet werden wie folgt: mit  $x_0 = y_0 = 0$  erhalten wir

$$F(x, y) = \int_0^x 2s ds + \int_0^y (x^2 + t^2) dt = x^2 y + \frac{y^3}{3},$$

wie wir es oberhalb schon gesehen haben.

#### 1.5.4 Wegintegrale und Exaktheit

Es kann passieren, dass eine Differentialform in einer Menge  $\Omega$  geschlossen aber nicht exact ist.

**Beispiel.** Betrachten die Differentialform

$$adx + bdy = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \tag{1.34}$$

in  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (das ist kein Rechteck). Diese Form ist geschlossen, weil

$$a_y = - \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right)_y = - \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$b_x = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Nach Satz 1.8 ist diese Form exakt in jedem in  $\Omega$  enthaltenen offenen Rechteck ist.

Zum Beispiel, betrachten wir das Rechteck  $\Omega' = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$  (Halbebene) mit  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ . Nach (1.32) erhalten wir in der Halbebene ein Integral der Form (1.34):

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x \frac{-y_0}{s^2 + y_0^2} ds + \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt \\ &= 0 + \int_0^y \frac{d(t/x)}{1 + (t/x)^2} \\ &= \int_0^{y/x} \frac{du}{1 + u^2} = \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Also,  $F(x, y)$  ist nicht anders als der Polarwinkel des Punktes  $(x, y)$ .

Da  $\Omega$  kein Rechteck ist, so können wir nicht behaupten, dass die Differentialform (1.34) in  $\Omega$  exakt ist. Wie wir es unterhalb sehen, (1.34) ist in  $\Omega$  nicht exakt. Aber dafür beweisen wir zunächst noch eine andere notwendige Bedingung für Exaktheit.

Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Menge und  $adx + bdy$  eine Differentialform in  $\Omega$  mit stetigen Funktionen  $a, b$ .

**Definition.** Für jede (stetig differenzierbare) parametrisierte Kurve  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  definieren wir das *Wegintegral* von  $adx + bdy$  entlang  $\gamma$

$$\int_{\gamma} adx + bdy := \int_{\alpha}^{\beta} [a(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + b(\gamma(t)) \gamma_2'(t)] dt, \quad (1.35)$$

wobei  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die Komponenten von  $\gamma$  sind.

Wenn man das Vektorfeld  $(a, b)$  mit  $v$  bezeichnet, so lässt sich (1.35) wie folgt umschreiben:

$$\int_{\gamma} adx + bdy = \int_{\alpha}^{\beta} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

wobei der Punkt  $\cdot$  das Skalarprodukt von Vektoren bezeichnet. Bemerken wir, dass  $\gamma'(t)$  der Tangentialvektor von  $\gamma(t)$  ist.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Ist  $\tilde{\gamma} : [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \rightarrow \Omega$  noch eine Parametrisierung so dass  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t)$  für eine stetig differenzierbare Funktion  $s = s(t)$  mit  $s(\alpha) = \tilde{\alpha}$  und  $s(\beta) = \tilde{\beta}$ , so erhalten wir nach den Substitutionsregel und Kettenregel

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} v(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \tilde{\gamma}'(s) ds &= \int_{\alpha}^{\beta} v(\tilde{\gamma}(s(t))) \cdot \tilde{\gamma}'(s(t)) \frac{ds}{dt} dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} v(\tilde{\gamma}(s(t))) \cdot \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(s(t)) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Wie wir es schon wissen, die Geschlossenheit ist eine notwendige Bedingung für die Exaktheit. Jetzt beweisen wir noch eine notwendige Bedingung für die Exaktheit.

**Satz 1.9** (Notwendige Bedingung für Exaktheit). Sei  $adx + bdy$  eine exakte Differentialform in  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Dann gilt für jede geschlossene parametrisierte Kurve  $\gamma$  in  $\Omega$  die Identität

$$\int_{\gamma} adx + bdy = 0.$$

**Beweis.** Sei  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$ , so dass  $F_x = a$  und  $F_y = b$ . Da die Kurve  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  geschlossen ist, so gilt  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ . Wir erhalten nach der Kettenregel und Fundamentalsatz der Analysis:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} adx + bdy &= \int_{\alpha}^{\beta} [F_x(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + F_y(\gamma(t)) \gamma_2'(t)] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [F(\gamma(t))] dt \\ &= F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

**Beispiel.** Betrachten wir wieder die Differentialform (1.34), d.h.

$$adx + bdy = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

in  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und zeigen, dass diese Form in  $\Omega$  nicht exact ist. Dafür betrachten wir den parametrisierten Kreis

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Es gilt

$$\int_{\gamma} adx + bdy = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t (\cos t)' + \cos t (\sin t)'}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Da das Wegintegral nicht verschwindet, so erhalten wir nach dem Satz 1.9, dass  $adx + bdy$  nicht exact ist.

Bemerken wir, dass das Vektorfeld  $v = (a, b)$  auf dem Einheitskreis wie folgt aussieht:  $v = (-y, x)$ , was in diesem Fall mit dem Tangentialvektor  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) = (-y, x)$  übereinstimmt.

Man kann beweisen, dass die notwendige Bedingung des Satzes 1.9 auch hinreichend für die Exaktheit ist, d.h. die Differentialform ist in  $\Omega$  exact genau dann, wenn das Wegintegral entlang jeder geschlossenen Kurve verschwindet.

Es ist möglich zu beweisen, dass die Geschlossenheit genau dann die Exaktheit impliziert, wenn die Menge  $\Omega$  *einfach zusammenhängend* ist, d.h. wenn jede geschlossene Kurve in  $\Omega$  sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Offensichtlich ist jedes Rechteck einfach zusammenhängend, während die Menge  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nicht einfach zusammenhängend ist.

### 1.5.5 Integrierender Faktor

Betrachten wir wieder eine DGL

$$a(x, y) + b(x, y) y' = 0 \quad (1.36)$$

in einer offenen Teilmenge  $\Omega$  und nehmen wir an, dass (1.36) nicht exakt ist.

Ist  $M(x, y)$  eine Funktion auf  $\Omega$  die in  $\Omega$  nicht verschwindet, dann ist (1.36) äquivalent zu

$$Ma + Mby' = 0. \quad (1.37)$$

Andererseits die Gleichung (1.36) entspricht die Differentialform

$$adx + bdy$$

während die Gleichung (1.37) entspricht die Differentialform

$$Madx + Mbdy.$$

Diese zwei Formen sind nicht äquivalent im Sinn, dass eine davon exakt sein kann, während die andere – nicht.

**Definition.** Eine Funktion  $M(x, y)$  auf  $\Omega$  heißt *integrierender Faktor* für die DGL (1.36) genau dann, wenn  $M(x, y) \neq 0$  in  $\Omega$  und die Form  $Madx + Mbdy$  exakt in  $\Omega$  ist.

Findet man integrierenden Faktor, so kann man die Differentialgleichung (1.36)/(1.37) mittels Satzes 1.7 lösen.

**Beispiel.** Betrachten wir die Differentialform

$$-ydx + xdy$$

die nicht geschlossen ist. Aber nach Division mit  $x^2 + y^2$  erhalten wir die Differentialform

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

die geschlossen in  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist und exakt in  $\Omega' = (0, \infty) \times \mathbb{R}$  ist, mit dem Integral  $F(x, y) = \theta$ , wobei  $\theta$  der Polarwinkel von  $(x, y)$  ist. Somit ist  $\frac{1}{x^2+y^2}$  integrierender Faktor in  $\Omega'$ .

Die beiden obigen Differentialformen entsprechen die Differentialgleichung

$$-y + xy' = 0,$$

die somit die Lösung  $\theta = \text{const}$  hat, was äquivalent zu  $y = Cx$  ist. Diese Lösung lässt sich auch mit Hilfe von Trennung der Variablen bestimmen.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y - (4x^2y + x) y' = 0 \quad (1.38)$$

und die entsprechende Differentialform

$$ydx - (4x^2y + x) dy,$$

die offensichtlich nicht geschlossen ist. Jedoch ergibt Dividieren durch  $x^2$  die Differentialform

$$\frac{y}{x^2} dx - \left(4y + \frac{1}{x}\right) dy, \quad (1.39)$$

die geschlossen im Bereich  $x \neq 0$  ist, da

$$a_y = \left(\frac{y}{x^2}\right)_y = \frac{1}{x^2} = -\left(4y + \frac{1}{x}\right)_x = b_x.$$

Nach dem Satz 1.8 ist die Differentialform (1.39) exakt in jedem Rechteck, insbesondere in der Halbebene  $\{x > 0\}$ . Somit ist die Funktion  $\frac{1}{x^2}$  integrierender Faktor von (1.38) in  $\{x > 0\}$ . Nach (1.32) mit  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$  erhalten wir ein Integral von (1.39):

$$F(x, y) = \int_1^x a(s, 0) ds + \int_0^y b(x, t) dt = 0 - \int_1^y \left(4t + \frac{1}{x}\right) dt = -2y^2 - \frac{y}{x}.$$

Nach Satz 1.7 bestimmen wir die allgemeine Lösung von (1.38) im Bereich  $\{x > 0\}$  wie folgt:

$$2y^2 + \frac{y}{x} = C.$$

Es gibt keine allgemeine Methode um einen integrierenden Faktor zu finden.

### 1.5.6 Parameter-abhängige Integrale

Jetzt beweisen wir eine Behauptung, die (1.33) begründet.

**Lemma 1.10** *Sei  $g(x, t)$  eine stetige Funktion auf einem Rechteck  $I \times J$  wobei  $I$  und  $J$  zwei beschränkten geschlossenen Intervalle sind. Dann ist die Funktion*

$$G(x) := \int_J g(x, t) dt$$

*stetig auf  $I$ . Ist  $g$  zusätzlich stetig differenzierbar in  $x$  (d.h. die partielle Ableitung  $\frac{\partial g}{\partial x}$  existiert und ist stetig auf  $I \times J$ ), dann ist die Funktion  $G(x)$  stetig differenzierbar auf  $I$ , und es gilt für alle  $x \in I$*

$$\frac{d}{dx} G(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt. \quad (1.40)$$

Da (1.40) äquivalent zu

$$\frac{d}{dx} \int_J g(x, t) dt = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$$

ist, so sind die Integration bezüglich  $t$  und das Ableiten in  $x$  vertauschbar.

**Beweis.** Wir benutzen den folgenden Satz aus Analysis: jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge ist gleichmäßig stetig.

Die Funktion  $g(x, t)$  ist deshalb auf  $I \times J$  gleichmäßig stetig, woraus folgt, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I \text{ mit } |x - y| < \delta \quad \forall t \in J \text{ gilt } |g(y, t) - g(x, t)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} |G(y) - G(x)| &= \left| \int_J (g(y, t) - g(x, t)) dt \right| \\ &\leq \int_J |g(y, t) - g(x, t)| dt \\ &\leq \varepsilon L, \end{aligned}$$

wobei  $L$  die Länge von  $J$  ist, woraus die Stetigkeit von  $G$  folgt.

Für die Ableitung von  $G$  erhalten wir

$$\frac{d}{dx} G(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{G(y) - G(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \int_J \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} dt. \quad (1.41)$$

Wir beweisen unterhalb, dass

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_J \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} dt = \int_J g_x(x, t) dt, \quad (1.42)$$

woraus (1.40) folgen wird. Nach dem Mittelwertsatz, für alle  $x, y \in I$  und  $t \in J$  existiert ein  $\xi \in [x, y]$ , derart, dass

$$\frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} = g_x(\xi, t). \quad (1.43)$$

Da die Funktion  $g_x(x, t)$  gleichmäßig stetig auf dem Rechteck  $I \times J$  ist, so haben wir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in I \text{ mit } |x - x'| < \delta \quad \forall t \in J \text{ gilt } |g_x(x', t) - g_x(x, t)| < \varepsilon. \quad (1.44)$$

Gilt  $|x - y| < \delta$ , so gilt auch  $|x - \xi| < \delta$ , da  $\xi \in [x, y]$ . Somit erhalten wir aus (1.44) mit  $\xi = x'$  dass

$$|g_x(\xi, t) - g_x(x, t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in J. \quad (1.45)$$

Nach (1.43) und (1.45) erhalten wir, dass unter der Bedingung

$$|x - y| < \delta$$

gilt

$$\left| \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} - g_x(x, t) \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } t \in J,$$

woraus folgt

$$\left| \int_J \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} dt - \int_J g_x(x, t) dt \right| \leq \varepsilon L$$

und somit (1.42). ■

## 1.6 Die DGLen 2er Ordnung

Für DGLen höherer Ordnung benutzen wir die anderen Bezeichnungen: ein unabhängige Variable wird mit  $t$  bezeichnet und die gesuchte Funktion mit  $x(t)$ . Dann sieht eine explizite DGL 2er Ordnung wie folgt aus:

$$x'' = f(t, x, x'),$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von drei Variablen ist. Wir besprechen hier einige Probleme, die sich auf DGLen 2er Ordnung zurückführen lassen.

### 1.6.1 Zweites Newtonsches Gesetz (das Aktionsprinzip)

Wir betrachten eine 1-dimensionale Bewegung eines Teilchens entlang die  $x$ -Achse. Sei  $x(t)$  die Koordinate des Teilchens um Zeit  $t$ . Die Geschwindigkeit des Teilchens ist  $v(t) = x'(t)$  und die Beschleunigung ist  $a(t) = x''(t)$ . Das Aktionsprinzip besagt, dass

$$mx'' = F, \tag{1.46}$$

wobei  $m$  die Masse von Teilchen ist und  $F$  die bewegende Kraft. Im Allgemeinen ist  $F$  ein Funktion von  $t, x, x'$ , also  $F = F(t, x, x')$  so dass (1.46) eine DGL 2er Ordnung bezüglich  $x(t)$  ist. Ist die Kraft  $F$  als eine Funktion von  $t, x, x'$  bekannt, so kann man versuchen die DGL (1.46) bezüglich  $x(t)$  zu lösen.

Die Kraft  $F$  heißt *konservativ* wenn  $F$  nur von der Koordinate  $x$  abhängt. Z.B., sind die folgenden Kräfte konservativ: Gravitationskraft, elastische Kräfte, elektrostatische Kraft, u.a. Im Gegensatz sind die Reibung, Strömungswiderstand, und ähnliche Kräfte nicht konservativ, da sie von Geschwindigkeit  $x'$  abhängen.

Ist  $F$  eine konservative Kraft, so lässt sich die DGL (1.46) zu einer DGL 1er Ordnung reduzieren, wie folgt. Angenommen  $F = F(x)$ , bezeichnen wir mit  $U(x)$  eine Stammfunktion von  $-F(x)$ . Die Funktion  $U$  heißt eine *Potentialfunktion* der Kraft  $F$ . Multiplizieren die DGL (1.46) mit  $x'$  und integrieren bezüglich  $t$  ergibt

$$\begin{aligned} m \int x'' x' dt &= \int F(x) x' dt, \\ \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} (x')^2 dt &= \int F(x) dx, \\ \frac{m(x')^2}{2} &= -U(x) + C \end{aligned} \tag{1.47}$$

und somit

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = C.$$

Die Summe  $\frac{mv^2}{2} + U(x)$  heißt die gesamte mechanische Energie des Teilchens, wobei  $\frac{mv^2}{2}$  die *kinetische* Energie ist und  $U(x)$  *potentielle* Energie. Deshalb haben wir den Energieerhaltungssatz bewiesen: unter konservativer Kraft bleibt die Gesamtenergie konstant.

Die Identität (1.47) ist eine DGL 1er Ordnung. Ist  $x(t)$  eine Lösung von (1.47) und verschwindet  $x'(t)$  nicht, so erfüllt  $x(t)$  auch (1.46), da das Ableiten von (1.47) ergibt

$$mx''x' = F(x)x',$$

was äquivalent zu (1.46) ist. Wir sehen, dass unter der Bedingung  $x' \neq 0$  die beiden DGLen (1.46) und (1.47) äquivalent sind. Die DGL (1.47) lässt sich mit Hilfe von Trennung der Variablen lösen.

### 1.6.2 Elektrische Schaltung

Betrachten wir einen so genannten *RLC*-Stromkreis, d.h. eine Reihenschaltung mit folgenden Bauelementen: ein Widerstand mit dem Widerstandswert  $R$ , eine Spule mit der Induktivität  $L$ , ein Kondensator mit der Kapazität  $C$ , und eine Stromquelle mit der Spannung  $V(t)$ , die von Zeit  $t$  abhängt (Fig. 9).

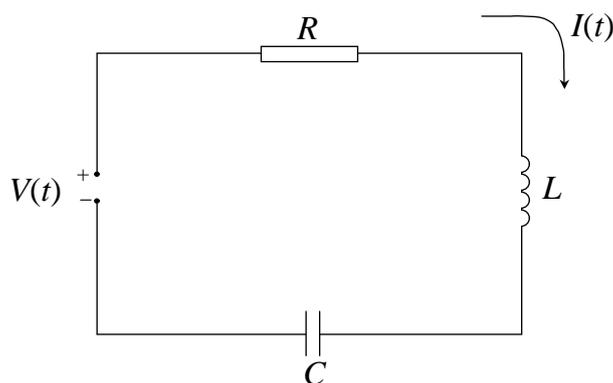


Figure 9: RLC-Stromkreis

Sei  $I(t)$  die Stromstärke im Stromkreis um Zeit  $t$ . Wir betrachten  $I(t)$  als eine gesuchte Funktion und möchten eine DGL für  $I(t)$  gewinnen. Nach dem Ohmschen Gesetz ist der Spannungsabfall  $v_R$  auf dem Widerstand gleich

$$v_R = RI.$$

Nach dem Induktionsgesetz von Faraday ist der Spannungsabfall  $v_L$  auf der Spule gleich

$$v_L = LI',$$

wobei  $I' = \frac{dI}{dt}$ . Letztlich ist der Spannungsabfall  $v_C$  auf dem Kondensator gleich

$$v_C = \frac{Q}{C},$$

wobei  $Q = Q(t)$  die Ladung des Kondensators ist; es gilt auch  $Q' = I$ . Zweites Kirchhoffsches Gesetz ergibt

$$v_R + v_L + v_C = V(t)$$

und somit

$$RI + LI' + \frac{Q}{C} = V(t).$$

Ableiten nach  $t$  ergibt

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = V', \tag{1.48}$$

die eine DGL 2er Ordnung bezüglich unbekannte Funktion  $I(t)$  ist. Wir betonen, dass die DGL (1.48) linear ist, weil die linke Seite von der Funktion  $I$  und ihren Ableitungen linear abhängt. Wir kehren zur diesen Gleichung zurück, nachdem wir eine Theorie von linearen DGLen entwickelt haben.

## 1.7 Normalsystem

Betrachten wir eine Vektorfunktion  $x(t)$  einer reellen Variablen  $t$ , also  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $I$  ein Intervall ist. Sei  $x_k$  die Komponenten von  $x$ , so dass

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Ableitung  $x'(t)$  definiert man durch

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Die folgende Gleichung heißt *Vektor-DGL* 1er Ordnung:

$$x' = f(t, x), \tag{1.49}$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von  $n+1$  Variablen mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  ist. Nämlich,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $\Omega$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, und das Paar  $(t, x)$  wird mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wie folgt:

$$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n).$$

**Definition.** Eine Lösung von (1.49) ist eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (wobei  $I$  ein Intervall ist) mit folgenden Eigenschaften:

1.  $x(t)$  ist differenzierbar an allen Stellen  $t \in I$ ;
2.  $(t, x(t)) \in \Omega$  für alle  $t \in I$ ;
3.  $x'(t) = f(t, x(t))$  für alle  $t \in I$ .

Die Vektor-DGL (1.49) ist offensichtlich äquivalent zum folgenden System von  $n$  skalaren Gleichungen:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_k = f_k(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{1.50}$$

wobei  $f_k$  die Komponenten von  $f$  sind.

**Definition.** Die Vektor-DGL (1.49) sowie das System (1.50) heißen *Normalsystem*.

Wie im Fall von DGLen 1er Ordnung, betrachten wir das Anfangswertproblem (AWP) für das Normalsystem (1.49):

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.51}$$

wobei  $(t_0, x_0) \in \Omega$  ein gegebener Punkt ist. Der Vektor  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt *Anfangswert* von  $x(t)$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$  heißt *Anfangszeit*. Wie wir später sehen, unter bestimmten Bedingungen hat das Anfangswertproblem (1.51) eine eindeutige Lösung für jedes  $(t_0, x_0)$ .

## 1.8 DGLen höherer Ordnung

Betrachten wir jetzt eine allgemeine explizite DGL  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} = F(t, x, \dots, x^{(n-1)}), \quad (1.52)$$

wobei  $t$  eine unabhängige Variable ist und  $x(t)$  eine gesuchte Funktion. Die gegebene Funktion  $F$  ist in einer Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definiert. Die DGL (1.52) lässt sich immer auf ein Normalsystem zurückführen. Jede skalare Funktion  $x(t)$  bestimmt eine Vektor-Funktion  $\mathbf{x}(t)$  wie folgt:

$$\mathbf{x} = (x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (1.53)$$

Die Funktion  $\mathbf{x}(t)$  nimmt die Werte in  $\mathbb{R}^n$  an. Man nennt die Werte von  $\mathbf{x}(t)$  *Phasen* (=Zustände) von (1.52) und den Raum  $\mathbb{R}^n$  – *Phasenraum* der Differentialgleichung (1.52).

Da  $\mathbf{x}' = (x', x'', \dots, x^{(n)})$ , so ergibt (1.52) ein System von Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_3 \\ \dots \\ \mathbf{x}'_{n-1} = \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}'_n = F(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \end{cases} \quad (1.54)$$

Das System (1.54) lässt sich als eine Vektor-DGL umschreiben:

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \quad (1.55)$$

wobei

$$f(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n, F(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)). \quad (1.56)$$

Umgekehrt, gilt (1.54) (oder (1.55)-(1.56)), so erhalten wir

$$\mathbf{x}_1^{(n)} = \mathbf{x}'_n = F(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = F(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}_1^{(n-1)})$$

so dass die Funktion  $x = \mathbf{x}_1$  eine Lösung von (1.52) ist. Somit erhalten wir die Äquivalenz:

$$\text{die skalare DGL (1.52)} \Leftrightarrow \text{Normalsystem (1.55)}$$

unter (1.53) und (1.56).

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL 2er Ordnung

$$x'' = F(t, x, x'). \quad (1.57)$$

Mit Hilfe von Substitution  $\mathbf{x} = (x, x')$  erhalten wir  $\mathbf{x}' = (x', x'')$  und

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}'_2 = F(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{cases}$$

Deshalb ist (1.57) äquivalent zum Normalsystem (1.49) mit Funktion

$$f(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_2, F(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)).$$

Offensichtlich bedeutet die Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  für die DGL (1.52), dass

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

wobei  $x_0, \dots, x_{n-1}$  die Komponenten von  $\mathbf{x}_0$  sind, also die gegebenen Werte. Deshalb formuliert man das AWP für (1.52) wie folgt:

$$\begin{cases} x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

**Beispiel.** Für die DGL (1.57) 2er Ordnung ist das AWP wie folgt:

$$\begin{cases} x'' = F(t, x, x') \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1. \end{cases}$$

Ist (1.57) aus dem Aktionsprinzip gewonnen worden, so bedeuten die Anfangsbedingungen, dass die Position und die Geschwindigkeit um die Anfangszeit gegeben sind.

## 2 Lineare DGLen und Systeme von DGLen

### 2.1 Lineare Operatoren in $\mathbb{R}^n$

Eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt (*linearer*) *Operator* wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $A(x + y) = Ax + Ay$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  (wir schreiben  $Ax = A(x)$ ).
2.  $A(\lambda x) = \lambda Ax$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Die Menge von allen Operatoren von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  wird mit  $\mathbb{R}^{m \times n}$  oder  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  bezeichnet. Jeder Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kann mit Hilfe von einer  $m \times n$  Matrix  $(a_{ij})$  dargestellt werden, wobei  $i = 1, \dots, m$  der Index von Zeilen ist und  $j = 1, \dots, n$  der Index von Spalten. Nämlich, für jeden Spaltenvektor  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$Ax = (a_{ij})x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Man kann auch schreiben, dass für jedes  $i = 1, \dots, m$  gilt

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Man definiert die Addition von Operatoren aus  $\mathbb{R}^{m \times n}$  und die Multiplikation mit einer Konstante  $c \in \mathbb{R}$  wie folgt

1.  $(A + B)(x) = Ax + Bx$ ,
2.  $(cA)(x) = c(Ax)$ .

Offensichtlich ist  $\mathbb{R}^{m \times n}$  mit diesen Operationen ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Da jede  $m \times n$  Matrix genau  $mn$  Komponenten hat, gilt es  $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$ . Insbesondere sind  $\mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbb{R}^{mn}$  linear isomorph, also  $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$ .

Seien  $V$  ein Vektorraum und  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $V$ . Mit Hilfe von Norm definiert man den Begriff von Konvergenz in  $V$ : eine Folge  $\{v_k\}$  von Vektoren (Elementen von  $V$ ) konvergiert gegen  $v$  falls  $\|v_k - v\| \rightarrow 0$ . Ist  $V$  endlichdimensional, so ist die Konvergenz  $v_k \rightarrow v$  unabhängig von der Wahl der Norm, da alle Normen in endlichdimensionalen Vektorräumen äquivalent sind.

Fixieren wir die Normen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ .

**Definition.** Für jeden Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definieren wir die *Operatornorm* von  $A$  wie folgt:

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad (2.1)$$

wobei  $\|x\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^n$  ist und  $\|Ax\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^m$ .

**Behauptung.** *Es gilt immer  $\|A\| < \infty$ .*

**Beweis.** Sei  $\{e_i\}_{i=1}^n$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\| A \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A e_i\| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|A e_i\| \|x\|_1 \\ &\leq C \max_{1 \leq i \leq n} \|A e_i\| \|x\|, \end{aligned}$$

wobei wir die Vergleichbarkeit von den Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|$  benutzt haben. Daraus folgt

$$\|A\| \leq C \max_{1 \leq i \leq n} \|A e_i\| < \infty, \quad (2.2)$$

was zu beweisen war. ■

Man sieht von (2.2), dass die Endlichkeit von  $\|A\|$  daran liegt, dass die Räume  $\mathbb{R}^n$  endlich-dimensional sind<sup>1</sup>. Es folgt aus Definition (2.1), dass

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Darüber hinaus ist  $\|A\|$  die minimale reelle Zahl die (2.3) erfüllt.

**Behauptung.** *Die Operatornorm ist eine Norm im Vektorraum  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .*

---

<sup>1</sup>In der Theorie von unendlich dimensionalen Vektorräumen existieren Operatoren mit unendlichen Normen.

**Beweis.** Nach (2.1) haben wir  $\|A\| \geq 0$ ; außerdem, wenn  $A \neq 0$  dann existiert  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax \neq 0$ , und wir erhalten  $\|Ax\| > 0$  und

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} > 0.$$

Die Dreiecksungleichung und die Homogenität folgen aus (2.1) wie folgt:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_x \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_x \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_x \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

und

$$\|\lambda A\| = \sup_x \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} = \sup_x \frac{|\lambda| \|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\|.$$

■

Da  $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{nm}$ , die Konvergenz von Operatoren  $A_k \rightarrow A$  wohldefiniert ist und äquivalent zu  $\|A_k - A\| \rightarrow 0$ , wobei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ist, insbesondere die Operatornorm.

**Behauptung.** Die Konvergenz  $A_k \rightarrow A$  ist äquivalent zu  $A_k x \rightarrow Ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $A_k, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Beweis.** Betrachten wir noch eine Norm von Operatoren bezüglich der Standardbasis  $\{e_i\}_{i=1}^n$ :

$$\|A\|_e = \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|.$$

Die Konvergenz  $A_k x \rightarrow Ax$  für alle  $x$  ist äquivalent zu  $A_k e_i \rightarrow Ae_i$  für alle Basisvektoren  $e_i$ , und somit äquivalent zu  $\|A_k - A\|_e \rightarrow 0$ . Da alle Normen in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  äquivalent sind, erhalten wir die Äquivalenz der zwei obigen Konvergenzen. ■

Gilt  $A_k \rightarrow A$ , dann sagt man, dass  $A_k$  gegen  $A$  in der *Normtopologie* konvergiert. Gilt  $A_k x \rightarrow Ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , dann sagt man, dass  $A_k$  gegen  $A$  *punktweis* oder in der *starken Operortopologie* konvergiert. Die obige Behauptung bedeutet, dass diese zwei Topologien in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  äquivalent sind<sup>2</sup>.

**Behauptung.** Jeder lineare Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist eine (gleichmäßig) stetige Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ .

**Beweis.** In der Tat haben wir nach (2.3)

$$\|Ay - Ax\| = \|A(y - x)\| \leq \|A\| \|y - x\| \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x.$$

■

In der Fall  $n = m$  kann man zusätzlich auch die Multiplikation von Operatoren definieren. Für jede zwei Operatoren  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , definieren wir das Produkt  $AB$  als die Verkettung von  $A$  und  $B$ , also

$$(AB)x := A(Bx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

<sup>2</sup>In unendlich dimensionalen Räumen ist das nicht der Fall.

Offensichtlich  $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Behauptung.** Die Operatornorm in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist submultiplikativ, also

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (2.4)$$

**Beweis.** In der Tat ergibt Anwendung von (2.3)

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|,$$

woraus (2.4) folgt. ■

So ist  $\mathbb{R}^{n \times n}$  nicht nur ein normierter Vektorraum, aber auch eine normierte Algebra.

Analog definiert man den Vektorraum  $\mathbb{C}^{m \times n}$  von linearen Operatoren  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  und die Operatornorm in  $\mathbb{C}^{m \times n}$ . Alle Eigenschaften von Normen im Fall von komplexen Räumen können mit gleichen Argument bewiesen werden, wie im Fall von reellen Räumen, oder direkt aus dem reellen Fall gewonnen werden mit Hilfe von Isomorphismus  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ .

## 2.2 Existenz von Lösungen linearer Normalsysteme

In diesem Kapitel betrachten wir ein lineares Normalsystem von DGLen, das die folgende Form hat:

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.5)$$

wobei  $x = x(t)$  eine unbekannte Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  und  $A(t)$  und  $B(t)$  gegebene Funktionen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit Werten jeweils in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbb{R}^n$  sind.

Insbesondere ist  $A(t)x$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ , wie die anderen Terme in (2.5). Koordinatenweise lautet (2.5) wie folgt:

$$x'_i = \sum_{l=1}^n A_{il}(t)x_l + B_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $A_{ij}$  und  $B_i$  die Komponenten jeweils von  $A$  und  $B$  sind. Wir nehmen immer an, dass die Abbildungen  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig auf  $I$  sind, also alle Komponenten  $A_{ij}(t)$  und  $B_i(t)$  stetige Funktionen von  $t \in I$  sind. Wir betonen, dass der Definitionsbereich von (2.5) ist  $I \times \mathbb{R}^n$ , so dass jede Lösung von (2.5) muss auf einem Teilintervall von  $I$  definiert sein.

Der folgende Satz ist einer von den Hauptsätzen dieser Vorlesung.

**Satz 2.1 (Hauptsatz)** (Satz von Picard-Lindelöf für lineare Normalsystemen) *Seien  $A(t)$  und  $B(t)$  stetig auf einem Intervall  $I$ .*

(a) (Existenz) *Für alle  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existiert eine Lösung  $x(t)$  des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

*die auf dem ganzen Intervall  $I$  definiert ist.*

(b) (Eindeutigkeit) *Ist  $y(t)$  eine andere Lösung von (2.6) auf einem Teilintervall  $I' \subset I$ , so gilt  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .*

Beweis im Abschnitt 2.9.

### 2.3 Existenz von Lösung linearer DGLen $n$ -ter Ordnung

Wir betrachten jetzt eine *skalare lineare* DGL  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t), \quad (2.7)$$

wobei  $a_k(t), b(t)$  stetige Funktionen auf einem nicht-trivialen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind. Das entsprechende Anfangsbedingung ist wie folgt:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (2.8)$$

wobei  $t_0 \in I$  und  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  gegeben sind.

**Satz 2.2 (Hauptsatz)** Seien alle Funktionen  $a_k(t), b(t)$  in (2.7) stetig auf  $I$ .

(a) (Existenz) Für jedes  $t_0 \in I$  und für jeden Vektor  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  existiert eine Lösung  $x(t)$  des AWP's (2.7)-(2.8), die auf  $I$  definiert ist.

(b) (Eindeutigkeit) Ist  $y(t)$  eine andere Lösung des AWP's (2.7)-(2.8) auf einem Teilintervall  $I' \subset I$ , so gilt  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .

**Beweis.** Bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}(t)$  (Fettdruck  $\mathbf{x}$ ) die Vektorfunktion

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T, \quad (2.9)$$

deren Werte immer als Spaltenvektoren betrachtet werden. Als wir es schon gesehen haben, ist die DGL (2.7) äquivalent zum Normalsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}'_2 &= \mathbf{x}_3 \\ &\dots \\ \mathbf{x}'_{n-1} &= \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}'_n &= -a_1\mathbf{x}_n - a_2\mathbf{x}_{n-1} - \dots - a_n\mathbf{x}_1 + b, \end{aligned}$$

das auch in der Vektorform dargestellt werden kann:

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + B(t), \quad (2.10)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Das Anfangswertproblem (2.7)-(2.8) ist offensichtlich äquivalent zum

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

wobei  $\mathbf{x}_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Anwendung des Satzes 2.1 zum Normalsystem (2.12) ergibt die Behauptungen (a) und (b). ■

## 2.4 Der Raum von Lösungen linearer homogener DGLen

Wir betrachten jetzt eine *homogene* lineare DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0, \quad (2.13)$$

wobei  $a_j(t)$  sind wie zuvor.

Sei  $L$  die Menge von allen Lösungen von (2.13) auf  $I$ . Offensichtlich, für alle  $x, y \in L$  ist die Summe  $x + y$  ein Element von  $L$ , sowie  $cx \in L$  für jede Konstante  $c$ . Das bedeutet, dass  $L$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist. Das Nullelement von  $L$  ist die konstante Funktion 0.

**Satz 2.3** *Es gilt  $\dim L = n$ . Somit ist die allgemeine Lösung von (2.13) durch die folgende Identität gegeben*

$$x(t) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t), \quad (2.14)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.13) sind und  $C_1, \dots, C_n$  beliebige Konstanten.

**Beweis.** Fixieren wir eine Stelle  $t_0 \in I$  und betrachten eine Abbildung  $L \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$L \ni x \mapsto (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich linear. Nach Satz 2.2(a) ist diese Abbildung surjektiv, und nach (b) – injektiv. Somit ist die Abbildung ein linearer Isomorphismus zwischen  $L$  und  $\mathbb{R}^n$ , woraus folgt  $\dim L = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

Seien  $x_1, \dots, x_n$  unabhängige Lösungen. Da die Anzahl von diesen Lösungen gleich  $\dim L$  ist, so stellt die Folge  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis in  $L$  dar. Daraus folgt, dass alle Elementen von  $L$  die Form (2.14) haben. ■

**Bemerkung.** Bisher haben wir angenommen, dass alle gegebene und gesuchte Funktionen reellwertig sind. Das Gleiche gilt für komplexwertige Funktionen. Nämlich, die Sätze 2.1, 2.2, 2.3 gelten für komplexwertige Koeffizienten und Lösungen, mit gleichen Beweisen (obwohl die Variable  $t$  immer reell bleibt). Sind die Koeffizienten  $a_j(t)$  in (2.13) komplexwertig, so betrachtet man die Menge  $L$  von allen komplexwertigen Lösungen als ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , und  $\dim L = n$  gilt auch in diesem Fall.

## 2.5 Lösungsmethoden für homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

Jetzt betrachten wir die lineare DGL

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_nx = 0 \quad (2.15)$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$ , die reell oder komplex sind. Wir zeigen hier, wie man  $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.15) bestimmen kann, die folglich die allgemeine Lösung liefern.

Wir bestimmen zunächst die komplexwertigen Lösungen von (2.15) und danach extrahieren daraus die reellwertigen Lösungen, falls die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  reell sind. Die Hauptidee ist sehr einfach. Wir benutzen folgenden *Exponentialansatz* zur Lösung:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

wobei  $\lambda$  eine komplexe Konstante ist, die noch bestimmt werden soll. Da

$$(e^{\lambda t})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t},$$

so erhalten wir nach Einsetzen von diesen Ansatz in (2.15) die folgende Gleichung für  $\lambda$ :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.16)$$

wobei alle Terme  $e^{\lambda t}$  wegfallen. Die Gleichung (2.16) hängt nicht mehr von  $t$  ab, und nur der Unbekannte  $\lambda$  bleibt. Die Gleichung (2.16) heißt die *charakteristische Gleichung* von (2.15), und das entsprechende Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

heißt *charakteristisches Polynom* von (2.15). Also, wir haben die folgende Behauptung bewiesen.

**Behauptung.** *Die Funktion  $x(t) = e^{\lambda t}$  ist eine Lösung von (2.15) genau dann, wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.*

Besitzt das charakteristische Polynom genügend Nullstellen, so bestimmt man die allgemeine Lösung von (2.15) wie folgt.

**Satz 2.4** *Seien  $a_1, \dots, a_n$  komplex. Hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  von (2.15)  $n$  verschiedene komplexe Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so stellen die folgenden  $n$  Funktionen*

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \quad (2.17)$$

*linear unabhängige, komplexwertige Lösungen von (2.15) dar. Folglich ist die allgemeine komplexe Lösung von (2.15) durch die Identität*

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (2.18)$$

*gegeben, wobei  $C_j$  beliebige komplexe Konstanten sind.*

*Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Für jede nicht-reelle Nullstelle  $\lambda = \alpha + i\beta$  von  $P$  ist auch die konjugierte Zahl  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  eine Nullstelle von  $P$ , und das Paar von Funktionen*

$$e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$$

*in der Folge (2.17) kann durch das Paar*

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad e^{\alpha t} \sin \beta t$$

*von reellwertigen Funktionen ersetzt werden. Nach Ersetzung von allen Paaren  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$  mit nicht-reellen Nullstellen  $\lambda$  erhält man  $n$  reellwertige, linear unabhängige Lösungen von (2.15). Folglich wird die allgemeine reelle Lösung von (2.15) durch die Linearkombination dieser Lösungen mit reellen Koeffizienten dargestellt.*

Beweis im Abschnitt 2.8.

**Bemerkung.** Die Nullstellen von einem quadratischen Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$  können immer mit Hilfe der Formel

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

bestimmt werden. Polynome höheren Grades versucht man in ein Produkt von Polynomen 1er und 2er Grades zerlegen und somit alle Nullstellen zu bestimmen.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist  $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ , und dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$ . Deshalb sind die unabhängigen Lösungen  $x_1(t) = e^t$  und  $x_2(t) = e^{2t}$ , und die allgemeine Lösung ist  $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ . Nämlich, für reelle Konstanten  $C_1, C_2$  erhalten wir die allgemeine reelle Lösung, und für komplexe  $C_1, C_2$  – die komplexe Lösung.

**Beispiel.** Die DGL  $x'' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$ . Damit erhalten wir zwei komplexwertige unabhängige Lösungen  $e^{it}$  und  $e^{-it}$ . Die allgemeine komplexwertige Lösung ist deshalb  $C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$ . Da  $\lambda = 0 + 1i$ , erhalten wir nach Satz 2.4 zwei unabhängige reellwertige Lösungen  $\cos t$  und  $\sin t$ , und die reellwertige allgemeine Lösung ist  $C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Alternativ kann man diese Lösungen als Linearkombinationen von  $e^{it}$  und  $e^{-it}$  erhalten:

$$\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t \quad \text{und} \quad \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t,$$

und das entspricht einem Basiswechsel im Vektorraum der Lösungen.

**Beispiel.** Die DGL  $x''' - x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1),$$

dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Nach Satz 2.4 erhalten wir drei linear unabhängige reellwertige Lösungen

$$e^t, \quad e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

und damit die allgemeine reellwertige Lösung

$$C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall, wenn das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  weniger als  $n$  verschiedene Nullstellen besitzt. In diesem Fall ist Satz 2.4 nicht verwendbar. Nach Fundamentalsatz der Algebra, hat jedes Polynom  $P(\lambda)$

vom Grad  $n$  mit komplexen Koeffizienten genau  $n$  komplexe Nullstellen, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden. Für jedes  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  definiert man die Vielfachheit  $m$  von  $\lambda_0$  bezüglich  $P(\lambda)$  als der maximale Wert ganzer Zahl  $m$ , derart, dass  $P(\lambda)$  durch  $(\lambda - \lambda_0)^m$  teilbar ist. Letzteres bedeutet, dass es ein Polynom  $Q(\lambda)$  gibt, derart, dass die folgende Identität gilt:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Es ist klar, dass immer  $m \geq 0$  und  $m \geq 1$  genau dann, wenn  $\lambda_0$  eine Nullstelle von  $P$  ist. Dass  $m$  maximal ist bedeutet, dass  $\lambda_0$  keine Nullstelle von  $Q$  ist.

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alle verschiedene komplexwertige Nullstellen von  $P(\lambda)$ ; sei  $m_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$ . Nach Fundamentalsatz der Algebra gilt

$$m_1 + \dots + m_r = n.$$

Daraus folgt, dass sich charakteristisches Polynom  $P(\lambda)$  in ein Product

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

zerlegen lässt.

Um  $n$  unabhängige Lösungen der DGL (2.15) erhalten zu können, muss jede Nullstelle  $\lambda_j$  genau  $m_j$  unabhängige Lösungen ergeben. Der folgende Satz zeigt, wie genau erhält man diese Lösungen.

**Satz 2.5** *Seien  $a_1, \dots, a_n$  komplex. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alle verschiedene komplexwertige Nullstellen von charakteristischem Polynom  $P(\lambda)$ . Sei  $m_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$ . Dann stellen die folgenden  $n$  Funktionen linear unabhängige Lösungen von (2.15) dar:*

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 0, \dots, m_j - 1 \quad (2.19)$$

(also jede Nullstelle  $\lambda_j$  liefert  $m_j$  Lösungen  $e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{m_j-1} e^{\lambda_j t}$ ). Folglich ist die allgemeine Lösung von (2.15) wie folgt

$$x(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{kj} t^k e^{\lambda_j t}, \quad (2.20)$$

wobei  $C_{kj}$  beliebige komplexe Konstanten sind.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Für jede nicht-reelle Nullstelle  $\lambda = \alpha + i\beta$  von  $P(\lambda)$  mit der Vielfachheit  $m$  ist auch  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  eine Nullstelle von  $P$  mit gleicher Vielfachheit  $m$ , und das Paar von Funktionen

$$t^k e^{\lambda t}, \quad t^k e^{\bar{\lambda} t}$$

in der Folge (2.19) kann durch das Paar

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$$

von reellwertigen Funktionen ersetzt werden, für jedes  $k = 0, \dots, m-1$ . Folglich erhält man  $n$  unabhängige reellwertige Lösungen von (2.15) und die allgemeine reellwertige Lösung von (2.15).

Beweis im Abschnitt 2.8.

**Bemerkung.** Bezeichnen wir

$$P_j(t) = \sum_{k=1}^{m_j-1} C_{jk} t^k,$$

und erhalten aus (2.20)

$$x(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t}. \quad (2.21)$$

D.h., die allgemeine Lösung von (2.15) kann durch die Identität (2.21) gegeben werden, wobei  $P_j(t)$  ein beliebiges Polynom vom Grad  $\leq m_j - 1$  ist.

**Beispiel.** Die DGL  $x'' - 2x' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

dass nur eine Nullstelle  $\lambda = 1$  hat, mit der Vielfachheit  $m = 2$ . Nach Satz 2.5 stellen die Funktionen  $e^t$  und  $te^t$  zwei unabhängige Lösungen dar, und die allgemeine Lösung ist durch die Identität

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t$$

gegeben.

**Beispiel.** Die DGL  $x^V + x^{IV} - 2x''' - 2x'' + x' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^3.$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  mit Vielfachheit  $m_1 = 2$  und  $\lambda_2 = -1$  mit  $m_2 = 3$ . Nach Satz 2.5 erhalten wir 5 unabhängige Lösungen

$$e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}, t^2 e^{-t},$$

und die allgemeine Lösung

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t + (C_3 + C_4 t + C_5 t^2) e^{-t}.$$

**Beispiel.** Die DGL  $x^V + 2x''' + x' = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda (\lambda^2 + 1)^2 = \lambda (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2.$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = i$  und  $\lambda_3 = -i$ , und die Vielfachheiten sind  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = m_3 = 2$ . Die unabhängigen Lösungen sind

$$1, e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}, \quad (2.22)$$

und die allgemeine komplexe Lösung ist

$$x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) e^{it} + (C_4 + C_5 t) e^{-it}.$$

Ersetzen in der Folge (2.22) die Funktionen  $e^{it}$ ,  $e^{-it}$  durch  $\cos t$ ,  $\sin t$  und die Funktionen  $te^{it}$ ,  $te^{-it}$  durch  $t \cos t$ ,  $t \sin t$  ergibt die folgenden unabhängigen reellen Lösungen:

$$1, \cos t, t \cos t, \sin t, t \sin t.$$

Dann ist die allgemeine reelle Lösung wie folgt:

$$x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) \cos t + (C_4 + C_5 t) \sin t.$$

## 2.6 Lösungsmethoden für inhomogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

Betrachten wir eine lineare DGL  $n$ -te Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (2.23)$$

wobei  $a_k(t)$  und  $f(t)$  gegebene stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Wir nehmen immer an, dass die Lösungen  $x(t)$  auch auf  $I$  definiert sind. Die Funktion  $f$  auf der rechten Seite heißt *Störfunktion*. Ist die Störfunktion nicht identisch 0, so nennt man die DGL (2.23) *inhomogen*.

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}$  den Differentialoperator auf der linken Seite von (2.23), also

$$\mathcal{A} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_1(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{d}{dt} + a_n(t),$$

wobei die Potenz  $\left(\frac{d}{dt}\right)^k$  die  $k$ -fache Selbstverkettung von der Ableitung bedeutet, d.h. die  $k$ -te Ableitung. Die Differentialgleichung (2.23) lässt sich kurz in der Form

$$\mathcal{A}x = f$$

umschreiben. Wir betonen, dass  $\mathcal{A}$  ein *linear* Operator ist, der auf die  $n$ -fach differenzierbaren Funktionen wirkt.

Im folgenden Lemma versammeln wir die Eigenschaften der Lösungen, die von der Linearität von  $\mathcal{A}$  abhängen.

**Lemma 2.6** (a) Seien  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen von (2.23) mit Störfunktionen  $f_1$  bzw  $f_2$ , d.h.

$$\mathcal{A}x_1 = f_1 \text{ und } \mathcal{A}x_2 = f_2. \quad (2.24)$$

Seien  $c_1, c_2$  zwei Konstanten. Dann ist die Funktion  $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  eine Lösung von (2.23) mit der Störfunktion  $f = c_1f_1 + c_2f_2$ .

(b) Seien  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung der DGL (2.23) und  $x_h(t)$  eine allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0. \quad (2.25)$$

Dann ist die allgemeine Lösung von (2.23) durch

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) \quad (2.26)$$

gegeben.

Bemerken wir, dass  $x_h$  eine beliebige Linearkombination von  $n$  unabhängigen Lösungen der homogenen DGL (2.25) ist.

**Beweis.** (a) Es folgt aus (2.24) und der Linearität von  $\mathcal{A}$ , dass

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1\mathcal{A}x_1 + c_2\mathcal{A}x_2 = c_1f_1 + c_2f_2 = f.$$

(b) Für jede  $n$ -fach differenzierbare Funktion  $x(t)$  betrachten wir auch die Funktion  $y = x - x_0$ . Dann ist die DGL (2.23) äquivalent zu

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y + x_0) &= f \\ \mathcal{A}y + \mathcal{A}x_0 &= f \\ \mathcal{A}y &= 0.\end{aligned}$$

Deshalb ist  $x$  eine Lösung von (2.23) genau dann, wenn  $y = x - x_0$  eine Lösung von (2.25) ist. Somit erhalten wir  $x - x_0 = x_h$  und  $x = x_0 + x_h$ . ■

Teil (b) von Lemma 2.6 bedeutet folgendes:

*die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL (2.23) ist die Summe von der allgemeinen Lösung der homogenen DGL (2.25) und einer speziellen Lösung von (2.23).*

Wir benutzen diese Methode für die linearen inhomogenen DGLen mit *konstanten* Koeffizienten:

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_nx = f(t). \quad (2.27)$$

Wir haben schon gelernt, wie die entsprechende homogene DGL gelöst werden kann. In diesem Abschnitt entwickeln wir eine Methode für Ermittlung einer speziellen Lösung von (2.27) für eine bestimmte Klasse von Störfunktionen  $f$ .

**Definition.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Quasipolynom* falls

$$f(t) = \sum_j R_j(t) e^{\mu_j t},$$

wobei  $R_j(t)$  Polynomen über  $\mathbb{C}$  sind,  $\mu_j$  komplexe Konstanten, und die Summe endlich ist.

Offensichtlich, die Summe und das Produkt von zwei Quasipolynomen ist auch ein Quasipolynom. Insbesondere sind die folgenden Funktionen Quasipolynomen:

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{und} \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad (2.28)$$

wobei  $k$  nicht-negative ganze Zahl ist und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . In der Tat haben wir nach der Euler-Formel

$$e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{(\alpha+i\beta)t}$$

und somit

$$\begin{aligned}e^{\alpha t} \cos \beta t &= \operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)t} = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}}{2} \\ e^{\alpha t} \sin \beta t &= \operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)t} = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i},\end{aligned}$$

woraus folgt, dass die Funktionen (2.28) Quasipolynomen sind.

Unser Ziel ist die DGL (2.27) zu lösen, wenn die Störfunktion ein Quasipolynom ist. Nach Lemma 2.6, es reicht eine spezielle Lösung von (2.27) für die Störfunktion der Form

$$f(t) = R(t) e^{\mu t}$$

ermitteln zu können. Erst erklären wir die Idee der Methode für den Fall  $f(t) = \text{const } e^{\mu t}$ .

Zu jedem Polynom

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

mit komplexwertigen Koeffizienten entspricht ein Differentialoperator

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_0 \left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \dots + a_n,$$

so dass

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x.$$

Insbesondere mit dem charakteristischen Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

von (2.27) lässt sich die DGL (2.27) kurz in der Form

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = f$$

schreiben (in diesem Fall  $a_0 = 1$ ).

Betrachten wir den speziellen Fall  $f(t) = \alpha e^{\mu t}$ , d.h. die DGL

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \alpha e^{\mu t}, \quad (2.29)$$

wobei  $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ . Zunächst betrachten wir den so genannten *nicht-resonanten Fall*, wenn  $\mu$  keine Nullstelle von  $P$  ist.

**Lemma 2.7** *Ist  $\mu$  keine Nullstelle von  $P$ , so hat die DGL (2.29) die spezielle Lösung*

$$x_0(t) = a e^{\mu t}$$

mit

$$a = \frac{\alpha}{P(\mu)}. \quad (2.30)$$

**Beweis.** Beweisen wir zunächst die Identität

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\mu t} = P(\mu)e^{\mu t}. \quad (2.31)$$

Es reicht diese Identität für das einfachste Polynom  $P(\lambda) = \lambda^k$  zu beweisen; dann gilt (2.31) für alle Polynomen nach der Linearität von den beiden Seiten. Für  $P(\lambda) = \lambda^k$  haben wir

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\mu t} = \frac{d^k}{dt^k}e^{\mu t} = \mu^k e^{\mu t} = P(\mu)e^{\mu t},$$

was zu beweisen war.

Es folgt aus (2.31), dass für die Funktion  $x_0(t) = ae^{\mu t}$  mit (2.30) gilt:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x_0 = P\left(\frac{d}{dt}\right)(ae^{\mu t}) = aP(\mu)e^{\mu t} = \alpha e^{\mu t},$$

was zu beweisen war. ■

**Beispiel.** Bestimmen wir eine spezielle Lösung der DGL

$$x'' + 2x' + x = e^t.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Offensichtlich ist  $\mu = 1$  keine Nullstelle von  $P$ . Nach Lemma 2.7 erhalten wir eine spezielle Lösung  $x(t) = ae^t$  mit

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{1 + 2 + 1} = \frac{1}{4},$$

d.h.

$$x(t) = \frac{1}{4}e^t.$$

Alternativ kann man den Wert von  $a$  bestimmen, indem man den Ansatz  $x(t) = ae^t$  in die DGL einsetzt:

$$ae^t + 2ae^t + ae^t = e^t,$$

woraus folgt  $4a = 1$  und somit  $a = \frac{1}{4}$  wie erwartet.

**Beispiel.** Betrachten wir noch eine DGL:

$$x'' + 2x' + x = \sin t. \tag{2.32}$$

Da  $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$ , so bestimmen wir zunächst eine spezielle Lösung der *komplexifizierten* DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{it}, \tag{2.33}$$

und danach nehmen den Imaginärteil davon. Für den Ansatz  $x(t) = ae^{it}$  erhalten wir nach (2.30)

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{i^2 + 2i + 1} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Somit ist eine spezielle Lösung von (2.33)

$$x(t) = -\frac{i}{2}e^{it} = -\frac{i}{2}(\cos t + i \sin t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{i}{2} \cos t,$$

und der Imaginärteil  $x(t) = -\frac{1}{2} \cos t$  ist eine spezielle Lösung von (2.32).

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t} \cos t. \tag{2.34}$$

Da  $e^{-t} \cos t = \operatorname{Re} e^{\mu t}$  mit  $\mu = -1 + i$ , so lösen wir zunächst die komplexifizierte DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{\mu t}. \quad (2.35)$$

Für den Ansatz  $x(t) = ae^{\mu t}$  erhalten wir

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{(\mu + 1)^2} = -1.$$

Deshalb hat (2.35) die spezielle Lösung

$$x(t) = -e^{(-1+i)t} = -e^{-t} \cos t - ie^{-t} \sin t,$$

und (2.34) hat die Lösung  $x(t) = -e^{-t} \cos t$ .

**Beispiel.** Jetzt fügen wir drei obige Beispiele zusammen:

$$x'' + 2x' + x = 4e^t - 2 \sin t + e^{-t} \cos t, \quad (2.36)$$

wobei die Störfunktion eine Linearkombination von den obigen Störfunktionen ist. Nach Lemma 2.6 erhalten wir eine spezielle Lösung von (2.36) als die ähnliche Linearkombination von den obigen speziellen Lösungen:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 4 \left( \frac{1}{4} e^t \right) - 2 \left( -\frac{1}{2} \cos t \right) + (-e^{-t} \cos t) \\ &= e^t + \cos t - e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

Da die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x'' + 2x' + x = 0$  ist

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t},$$

so erhalten wir nach Lemma 2.6 die allgemeine Lösung von (2.36)

$$x(t) = e^t + \cos t - e^{-t} \cos t + (C_1 + C_2 t) e^{-t}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t}.$$

Jetzt ist der Wert  $\mu = -1$  eine Nullstelle von  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  und die Methode von Lemma 2.6 funktioniert nicht. In der Tat löst der Ansatz  $x = ae^{-t}$  in diesem Fall die homogene DGL, und für inhomogene DGL muss man einen anderen Ansatz finden, wie unterhalb.

Der Fall wenn  $\mu$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist, heißt *resonanter Fall*. Der folgende Satz liefert die generelle Lösungsmethode von (2.27) für beliebige Quasipolynomen  $f(t)$ .

**Satz 2.8** Sei  $\mu$  eine Nullstelle von  $P$  mit der Vielfachheit  $m$ .

(a) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{C}$  hat die DGL

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \alpha e^{\mu t}$$

eine spezielle Lösung

$$x_0(t) = at^m e^{\mu t} \quad (2.37)$$

mit

$$a = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)}. \quad (2.38)$$

(b) Für jedes Polynom  $R(t)$  von Grad  $k \geq 0$  hat die DGL

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = R(t)e^{\mu t} \quad (2.39)$$

eine spezielle Lösung der Form

$$x_0(t) = Q(t)t^m e^{\mu t},$$

wobei  $Q(t)$  ein (gesuchtes) Polynom von Grad  $k$  ist.

**Bemerkung.** Wie wir später sehen (vgl. Lemma 2.10),  $P^{(m)}(\mu) \neq 0$  so dass die Konstante  $a$  in (2.38) wohldefiniert ist. Beweis von dem Satz 2.8 wird im Abschnitt 2.8 durchgeführt.

**Beispiel.** Betrachten wir wieder die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t}.$$

Da  $\mu = -1$  eine 2-fache Nullstelle von  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  ist, so benutzen wir den folgenden Ansatz

$$x_0(t) = at^2 e^{-t},$$

wobei die Konstante  $a$  bestimmt werden soll. Aus (2.38) erhalten wir

$$a = \frac{1}{P''(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Die spezielle Lösung ist somit

$$x_0(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-t}.$$

Alternativ ergibt das Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} a \left( (t^2 e^{-t})'' + 2(t^2 e^{-t})' + t^2 e^{-t} \right) &= e^{-t} \\ a 2e^{-t} &= e^{-t} \end{aligned}$$

woraus  $a = \frac{1}{2}$  wieder folgt.

**Beispiel.** Bestimmen wir eine spezielle Lösung der DGL

$$x'' + 2x' + x = te^{-t}. \quad (2.40)$$

Wir haben  $R(t) = t$  und, wie zuvor,  $\mu = -1$  mit Vielfachheit  $m = 2$ . Da  $\deg R = 1$ , so suchen wir die Lösung in der Form

$$x(t) = Q(t)t^2e^{-t}$$

wobei  $Q$  ein Polynom von Grad 1 ist, also  $Q(t) = at + b$ , mit unbekanntem Koeffizienten  $a$  und  $b$ . Einsetzen der Funktion

$$x(t) = (at + b)t^2e^{-t} = (at^3 + bt^2)e^{-t}$$

in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} x'' + 2x' + x &= ((at^3 + bt^2)e^{-t})'' + 2((at^3 + bt^2)e^{-t})' + (at^3 + bt^2)e^{-t} \\ &= (2b + 6at)e^{-t}. \end{aligned}$$

Das Vergleich mit (2.40) ergibt die Gleichung für  $a$  und  $b$

$$2b + 6at = t,$$

woraus folgt  $a = \frac{1}{6}$  und  $b = 0$ . Die spezielle Lösung ist also

$$x_0(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung von (2.40)

$$x(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t} + (C_1 + C_2t)e^{-t}.$$

## 2.7 \* Die DGLen 2-ter Ordnung mit periodischer Störfunktion

Betrachten wir eine DGL 2-ter Ordnung

$$x'' + px' + qx = f(t), \quad (2.41)$$

die in vielen Anwendungen in Physik vorkommt.

Z.B., wie wir es schon gesehen haben, beschreibt (2.41) die 1-dimensionale Bewegung eines Teilchen, sowie die Stromschwingung in einem  $RLC$ -Stromkreis (Fig. 10).

Seien  $R$  der Widerstandswert,  $L$  die Induktivität und  $C$  die Kapazität im Stromkreis. Seien  $V(t)$  die Spannung der Stromquelle und  $I(t)$  der Strom im Stromkreis um Zeit  $t$ . Wir haben schon gesehen (vgl. (1.48)), dass  $I(t)$  die folgende DGL erfüllt:

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = V', \quad (2.42)$$

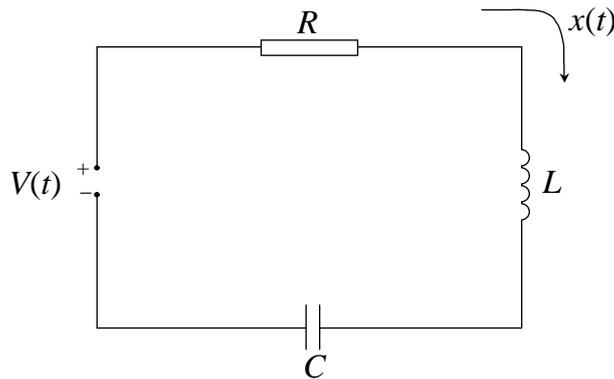


Figure 10: RLC-Stromkreis

was äquivalent zu (2.41) mit  $p = R/L$ ,  $q = 1/(LC)$ , und  $f = V'/L$  ist.

Wir benutzen den Satz 2.8 um die folgende DGL zu untersuchen

$$x'' + px' + qx = A \sin \omega t, \quad (2.43)$$

wobei  $A, \omega$  gegebene positive Konstanten sind. Physikalisch stellt die Störfunktion  $f(t) = A \sin \omega t$  eine externe periodische Kraft dar. Die Zahl  $A$  heißt die *Amplitude* von der Störfunktion und  $\omega$  heißt die *Frequenz* oder die *Aussenfrequenz*. Im Fall von Stromkreis modelliert diese Störfunktion eine periodische Spannung mit der Frequenz  $\omega$ . Z.B., der Wechselstrom in den Steckdosen hat die Frequenz 50 Hz, die den Wert  $\omega = 2\pi \cdot 50$  entspricht.

Wir nehmen an, dass  $p \geq 0$  und  $q > 0$  und betonen, dass diese Voraussetzungen in physikalischen Anwendungen erfüllt sind. Bestimmen wir eine spezielle Lösung von (2.43). Da  $\sin \omega t = \text{Im } e^{i\omega t}$ , betrachten wir zuerst die DGL mit komplexwertiger Störfunktion

$$x'' + px' + qx = Ae^{i\omega t}. \quad (2.44)$$

Sei  $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$  das charakteristische Polynom.

**Nicht-resonanter Fall.** Erst betrachten wir den nicht-resonanten Fall, wenn  $i\omega$  keine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist. Für den Lösungsansatz  $x(t) = ce^{i\omega t}$  erhalten wir nach Lemma 2.7 (oder Satz 2.8):

$$c = \frac{A}{P(i\omega)} = \frac{A}{-\omega^2 + pi\omega + q} =: a + bi. \quad (2.45)$$

Somit ist die spezielle Lösung von (2.44)

$$(a + ib)e^{i\omega t} = (a \cos \omega t - b \sin \omega t) + i(a \sin \omega t + b \cos \omega t).$$

Der Imaginärteil davon liefert die spezielle Lösung von (2.43)

$$x_0(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t. \quad (2.46)$$

Diese Lösung kann auch in der folgenden Form umgeschrieben werden:

$$x_0(t) = B \cos \varphi \sin \omega t + B \sin \varphi \cos \omega t = B \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei die Konstanten  $B$  und  $\varphi$  mit den Konstanten  $a$  und  $b$  gemäß der folgenden Gleichungen verknüpft sind:

$$B \cos \varphi = a, \quad B \sin \varphi = b.$$

Die Konstante  $B$  heißt *Amplitude* und  $\varphi$  die *Phase* oder der *Phasenwinkel* der Lösung. Quadrieren und Addieren der Gleichungen ergibt

$$B = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| = \frac{A}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + \omega^2 p^2}}. \quad (2.47)$$

Dann bestimmt man eindeutig den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  durch  $\cos \varphi = a/B$  und  $\sin \varphi = b/B$ .

Um die allgemeine Lösung von (2.43) zu bestimmen, müssen wir noch zu (2.46) die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x'' + px' + qx = 0 \quad (2.48)$$

zu addieren. Seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Nullstelle von  $P(\lambda)$ , also

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Betrachten wir die verschiedenen Fällen.

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind reell.

Da  $p \geq 0$  und  $q > 0$ , gilt  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Die allgemeine Lösung der homogenen DGL (2.48) ist nach Satz 2.5

$$x_h(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

In den beiden Fällen hat  $x(t)$  eine exponentielle Abnahme für  $t \rightarrow \infty$ . Somit hat die allgemeine Lösung von (2.43) die Form

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + O(e^{-\varepsilon t}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad (2.49)$$

mit einem  $\varepsilon > 0$ . We sehen, dass für  $t \rightarrow \infty$  stellt die Funktion  $B \sin(\omega t + \varphi)$  den Hauptterm der Lösung  $x(t)$  dar (vgl. z.B. Fig. 11). Für den Stromkreis bedeutet es, dass der Strom für  $t \rightarrow \infty$  mit der Aussenfrequenz  $\omega$  oszilliert.

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind nicht-reell. Seien  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  wobei

$$\alpha = -p/2 \leq 0 \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) = C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

wobei  $C$  und  $\psi$  beliebige reelle Konstanten sind. Die Zahl  $\beta$  heißt die *Eigenfrequenz* der DGL bzw des physikalischen Systems. Im Fall des Stromkreises, nennt man  $\beta$

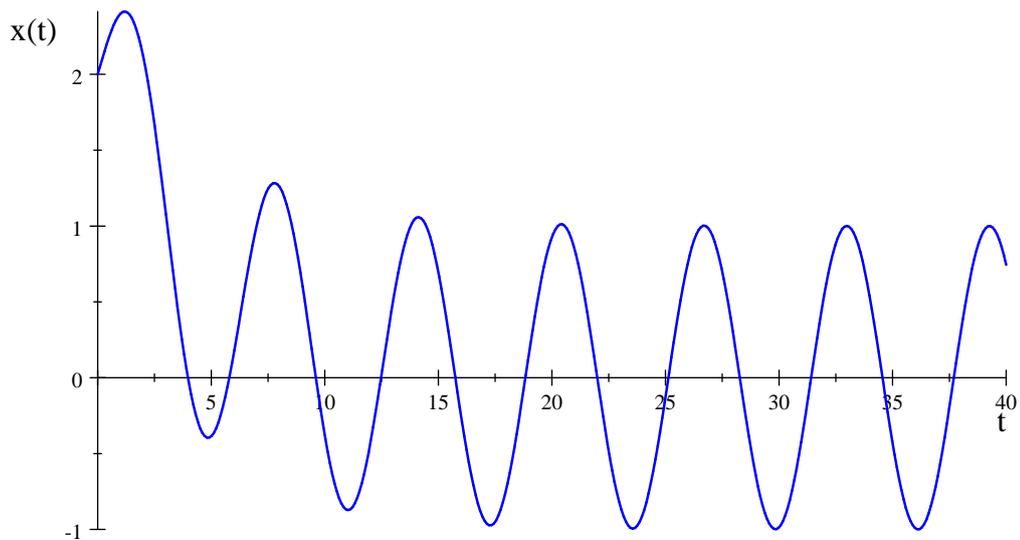


Figure 11: Die Funktion  $\sin t + 2e^{-t/4}$  sieht wie  $\sin t$  aus für  $t \rightarrow \infty$

auch *Kreisfrequenz*, da ohne Störfunktion oszilliert der Strom im Stromkreis mit der Frequenz  $\beta$ .

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.43)

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + Ce^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi).$$

Betrachten zwei weitere Unterfälle.

Ist  $\alpha < 0$ , so ist der Hauptterm  $B \sin(\omega t + \varphi)$  und die allgemeine Lösung erfüllt wieder (2.49) (vgl. Fig. 12).

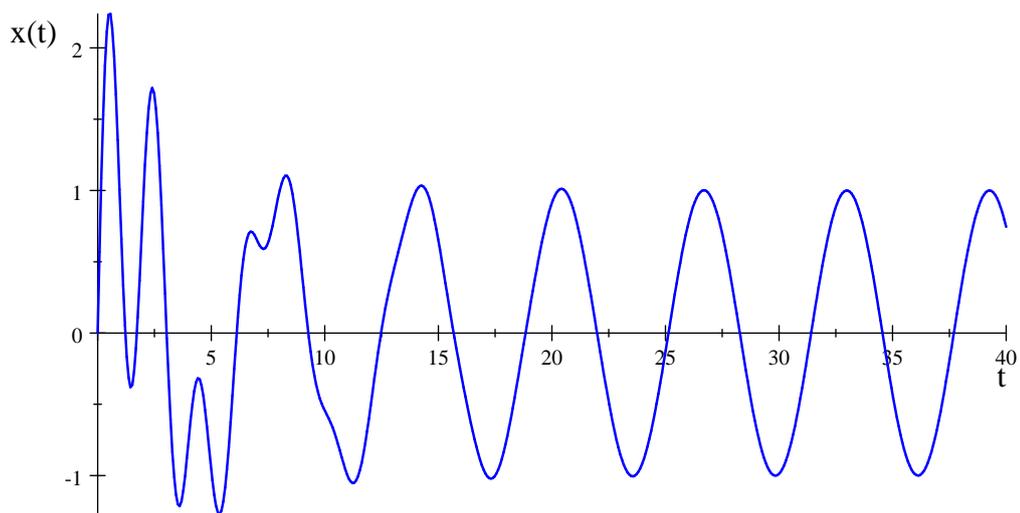


Figure 12: Funktion  $x(t) = \sin t + 2e^{-t/4} \sin \pi t$  sieht wie  $\sin t$  aus für  $t \rightarrow \infty$

Ist  $\alpha = 0$ , so gelten  $p = 0$ ,  $q = \beta^2$ , und die DGL (2.43) wird

$$x'' + \beta^2 x = A \sin \omega t. \quad (2.50)$$

Da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gleich  $\pm i\beta$  sind, bedeutet die Voraussetzung "i $\omega$  keine Nullstelle ist", dass  $\omega \neq \beta$ . Da die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x'' + \beta^2 x = 0$  durch  $x_h(t) = C \sin(\beta t + \psi)$  gegeben ist, erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.50) wie folgt:

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + C \sin(\beta t + \psi).$$

Diese Funktion ist offensichtlich eine Überlagerung von zwei Sinuswellen mit verschiedenen Frequenzen – die Aussenfrequenz und Eigenfrequenz. Sind  $\omega$  und  $\beta$  inkommensurabel, so ist  $x(t)$  nicht periodisch, vorausgesetzt  $C \neq 0$  (vgl. Fig. 13).

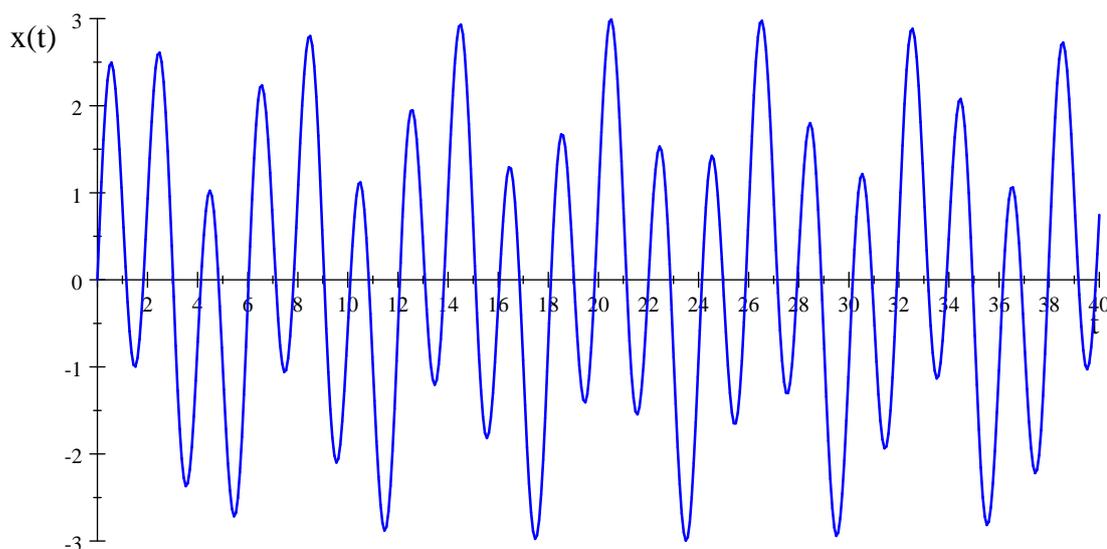


Figure 13: Die Funktion  $\sin t + 2 \sin \pi t$  ist nicht periodisch, aber sieht fast wie periodisch aus.

In einem Stromkreis tritt sich der Vorgang  $\alpha = 0$  nur dann ein, wenn der Widerstandswert  $R$  verschwindet, weil  $p = R/L$  und  $p$  muss 0 sein. Natürlich in den praktischen Stromkreisen hat man immer  $R > 0$  so dass der Vorgang nur ungefähr und nur für beschränkte Werte von  $t$  eintreten kann.

**Beispiel.** Die DGL

$$x'' + 6x' + 34x = \sin \omega t,$$

hat die Eigenfrequenz  $\beta = \sqrt{q - p^2/4} = 5$ . Im Fall  $\omega = 4$  erhalten wir nach (2.45)

$$c = \frac{A}{-\omega^2 + pi\omega + q} = \frac{1}{-4^2 + 24i + 34} = \frac{1}{50} - \frac{2}{75}i,$$

und die spezielle Lösung (2.46) ist

$$x_0(t) = \frac{1}{50} \sin 4t - \frac{2}{75} \cos 4t,$$

mit der Amplitude  $|c| = 1/30 = 0,0333\dots$ . Im Fall  $\omega = 8$  erhalten wir

$$c = \frac{1}{-8^2 + 48i + 34} = -\frac{5}{534} - \frac{4}{267}i,$$

und die spezielle Lösung ist

$$x_0(t) = -\frac{5}{534} \sin 8t - \frac{4}{267} \cos 8t,$$

mit der Amplitude  $|c| \approx 0,0177$ . Man kann die beiden Funktionen auf Fig. 14 vergleichen.

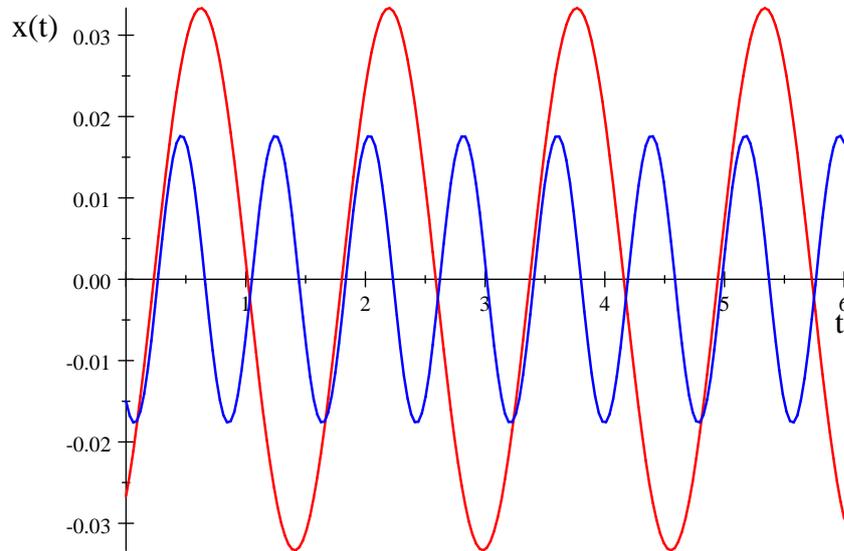


Figure 14: Zwei spezielle Lösungen für den Fälle  $\omega = 4$  bzw  $\omega = 8$

**Resonanter Fall.** Betrachten wir jetzt den resonanten Fall, wenn  $i\omega$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist, also

$$(i\omega)^2 + pi\omega + q = 0.$$

Daraus folgt, dass  $p = 0$  und  $q = \omega^2$ , und die DGL (2.43) wird

$$x'' + \omega^2 x = A \sin \omega t. \quad (2.51)$$

In diesem Fall haben wir  $\alpha = 0$  und  $\omega = \beta = \sqrt{q}$ . Die DGL mit komplexwertiger Störfunktion

$$x'' + \omega^2 x = Ae^{i\omega t} \quad (2.52)$$

hat einen Lösungsansatz

$$x(t) = cte^{i\omega t},$$

wobei die Konstante  $c$  nach Satz 2.8 bestimmt werden kann:

$$c = \frac{A}{P'(i\omega)} = \frac{A}{2i\omega} = -\frac{Ai}{2\omega}$$

Somit ist die spezielle Lösung von (2.52)

$$x(t) = -\frac{Ai}{2\omega} te^{i\omega t} = -i\frac{At}{2\omega} \cos \omega t + \frac{At}{2\omega} \sin \omega t.$$

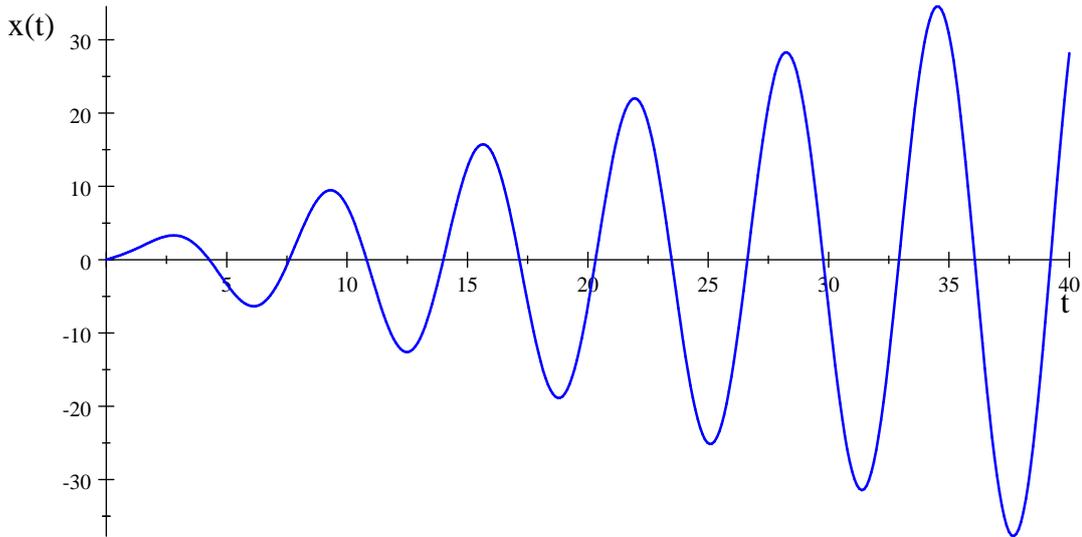


Figure 15: Die Funktion  $x(t) = -t \cos t + 2 \sin t$

Der Imaginärteil liefert die spezielle Lösung von (2.51)

$$x_0(t) = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t,$$

und die allgemeine Lösung von (2.51) ist wie folgt:

$$x(t) = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t + C \sin(\omega t + \psi), \quad (2.53)$$

mit beliebigen Konstanten  $C$  und  $\psi$ . Ein Beispiel von Funktion (2.53) wird auf Fig. 15 gezeichnet.

Wie man aus (2.53) sieht, wächst die Amplitude der Lösung unbeschränkt für  $t \rightarrow \infty$ . Dieses Phänomen heißt der *Resonanzfall*. Da eine unbeschränkte Schwingung physikalisch unmöglich ist, so wird das System durch die großen Schwingungen schließlich zerstört (oder man findet, dass das mathematische Modell für lange Zeit nicht geeignet ist).

Betrachten wir wieder die DGL (2.42) für den Strom  $I(t)$  in der Schaltung unter der externen Spannung  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ . Es ist bequemer die komplexifizierte Spannung  $V = V_0 e^{i\omega t}$  und die entsprechende komplexifizierte Lösung  $I(t)$  zu betrachten, die nach (2.42) die folgende DGL erfüllt:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = i\omega V_0 e^{i\omega t}.$$

Wir haben gesehen, dass im nicht-resonanten Fall die einzige Lösung mit der Aussenfrequenz  $\omega$  ist

$$I(t) = \frac{1}{P(i\omega)} i\omega V_0 e^{i\omega t} = \frac{i\omega}{(i\omega)^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}} V(t)$$

d.h.

$$I(t) = \frac{V(t)}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R}.$$

Somit erfüllen die komplexwertige Spannung und Strom das Ohmsche Gesetz mit dem komplexwertigen Widerstand

$$Z = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R.$$

Der Wert  $Z$  heißt *Impedanz* (oder Wechselstromwiderstand) der Schaltung. Bemerken wir, dass  $Z = 0$  genau dann der Fall ist, wenn  $R = 0$  und  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , was mit dem resonanten Fall übereinstimmt.

## 2.8 Beweise von Sätzen 2.4, 2.5, 2.8

**Beweis von Satz 2.4.** Wir wissen schon, dass jede Funktion  $e^{\lambda_k t}$  eine Lösung von

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (2.54)$$

ist (es folgt auch aus Lemma 2.7). Hier werden wir beweisen, dass die Funktionen  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  linear unabhängig sind. Dann erhalten wir nach dem Satz 2.3 die Darstellung

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

für die allgemeine Lösung von (2.54).

Wir beweisen jetzt per Induktion nach  $n$ , dass die Funktionen  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  linear unabhängig sind, vorausgesetzt, dass  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  verschiedene komplexe Zahlen sind. Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist trivial, da die Exponentialfunktion  $e^{\lambda_1 t}$  nicht identisch 0 ist.

Der Induktionsschritt von  $n - 1$  zu  $n$ . Angenommen, dass die Identität

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = 0 \quad (2.55)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt, beweisen wir dass  $C_1 = \dots = C_n = 0$ . Dafür dividieren wir (2.55) durch  $e^{\lambda_n t}$ , bezeichnen  $\lambda_j - \lambda_n =: \mu_j$  und erhalten

$$C_1 e^{\mu_1 t} + \dots + C_{n-1} e^{\mu_{n-1} t} + C_n = 0.$$

Ableiten von dieser Identität in  $t$  ergibt

$$C_1 \mu_1 e^{\mu_1 t} + \dots + C_{n-1} \mu_{n-1} e^{\mu_{n-1} t} = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung beschließen wir, dass  $C_j \mu_j = 0$  und somit  $C_j = 0$ , da  $\mu_j \neq 0$ . Das gilt für alle  $j = 1, \dots, n - 1$ . Einsetzen in (2.55) ergibt auch  $C_n = 0$ .

Jetzt betrachten wir den Fall wenn  $a_1, \dots, a_n$  reell sind. Da die Komplexkonjugation mit Addition und Multiplikation vertauschbar ist, es gilt die Identität

$$\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda}), \quad (2.56)$$

wobei die Voraussetzung  $\bar{a}_k = a_k$  benutzt wird. Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$ , es folgt aus (2.56), dass auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle von  $P$  ist. Deshalb enthält die Folge (2.17) die beiden Funktionen  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda}t}$ . Nach Eulerformel haben wir

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \quad \text{und} \quad e^{\bar{\lambda}t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \quad (2.57)$$

so dass  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda}t}$  sind Linearkombinationen von  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  und  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ . Umgekehrt, es gilt auch

$$e^{\alpha t} \cos \beta t = \frac{1}{2} (e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t}) \quad \text{und} \quad e^{\alpha t} \sin \beta t = \frac{1}{2i} (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t}), \quad (2.58)$$

so dass  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  und  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  sind Linearkombinationen von  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda}t}$ . Daraus folgt, dass die Funktionen  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  auch zum Vektorraum  $L$  der Lösungen gehören und den gleichen Unterraum erzeugen, wie  $e^{\lambda t}$ ,  $e^{\bar{\lambda}t}$ . Somit sind diese zwei Paaren von Lösungen austauschbar in jeder Basis.

Nachdem alle Paaren  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda}t}$  in (2.17) durch die reellwertigen Funktionen ersetzt worden sind, erhält man eine Basis in  $L$  von reellwertigen Lösungen. ■

Für den Beweis von Satz 2.5 machen wir erst eine Vorbereitung. Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung der Identität (2.31).

**Lemma 2.9** *Seien  $f(t), g(t)$   $n$ -fach differenzierbare Funktionen auf einem Intervall  $I$ . Dann gilt für jedes Polynom  $P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$  von Grad  $\leq n$  die folgende Identität:*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(fg) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right)g. \quad (2.59)$$

In der Tat kann man die Summe auf alle  $j \geq 0$  erweitern, da für  $j > n$  die Ableitung  $P^{(j)}$  identisch 0 ist.

**Beispiel.** Für das Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$  haben wir  $P'(\lambda) = 2\lambda + 1$ ,  $P'' = 2$ , und (2.59) ergibt

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(fg) = fP\left(\frac{d}{dt}\right)g + f'P'\left(\frac{d}{dt}\right)g + \frac{1}{2}f''P''\left(\frac{d}{dt}\right)g$$

d.h.

$$(fg)'' + (fg)' + fg = f(g'' + g' + g) + f'(2g' + g) + f''g.$$

Diese Identität lässt sich auch direkt mit Hilfe von der Produktregel beweisen, da

$$(fg)' = f'g + fg'$$

und

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

**Beispiel.** Im Fall  $f(t) = e^{\lambda t}$  und  $g(t) \equiv 1$  erhalten wir aus (2.59) und Taylor-Formel für Polynome

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (e^{\lambda t})^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) 1 \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \lambda^j e^{\lambda t} P^{(j)}(0) = P(\lambda) e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

woraus (2.31) folgt.

**Beweis von Lemma 2.9.** Da die beiden Seiten von (2.59) linear in  $P$  sind, reicht es die Identität (2.59) für den speziellen Fall  $P(\lambda) = \lambda^k$  zu beweisen. In diesem Fall haben wir

$$P^{(j)} = k(k-1)\dots(k-j+1)\lambda^{k-j}$$

für  $j \leq k$ , und  $P^{(j)} \equiv 0$  für  $j > k$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) &= k(k-1)\dots(k-j+1)\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-j}, \quad j \leq k, \\ P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) &= 0, \quad j > k, \end{aligned}$$

und die Identität (2.59) wird

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} f^{(j)} g^{(k-j)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}, \quad (2.60)$$

wobei  $\binom{k}{j}$  Binomialkoeffizienten sind. Diese Identität ist von Analysis bekannt als *Leibnizformel (Leibnizsche Regel)*<sup>3</sup>. ■

**Lemma 2.10** Eine komplexe Zahl  $\lambda$  ist eine Nullstelle mit Vielfachheit  $m$  eines Polynoms  $P$  genau dann, wenn

$$P^{(k)}(\lambda) = 0 \text{ für alle } k = 0, \dots, m-1 \text{ und } P^{(m)}(\lambda) \neq 0. \quad (2.61)$$

D.h.  $m$  ist die minimale positive ganze Zahl derart, dass  $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$ .

**Beweis.** Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $m$ , so gilt die Identität

$$P(z) = (z - \lambda)^m Q(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

wobei  $Q$  ein Polynom ist, so dass  $Q(\lambda) \neq 0$ . Für jede natürliche Zahl  $k$  haben wir nach Leibnizformel

$$P^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} ((z - \lambda)^m)^{(j)} Q^{(k-j)}(z).$$

<sup>3</sup>Für  $k = 1$  führt (2.60) zurück auf Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Für  $k > 1$  beweist man (2.60) per Induktion nach  $k$ .

Im Fall  $k < m$  gilt immer  $j < m$  und somit

$$((z - \lambda)^m)^{(j)} = \text{const} (z - \lambda)^{m-j},$$

und diese Funktion verschwindet an  $z = \lambda$ . Deshalb für  $k < m$  erhalten wir  $P^{(k)}(\lambda) = 0$ .

Im Fall  $k = m$  sehen wir wieder, dass alle Ableitungen  $((z - \lambda)^m)^{(j)}$  verschwinden an  $z = \lambda$  für  $j < k$ , während für  $j = k$  erhalten wir

$$((z - \lambda)^m)^{(k)} = ((z - \lambda)^m)^{(m)} = m! \neq 0$$

und somit

$$P^{(m)}(\lambda) = m!Q(\lambda) \neq 0.$$

Damit ist (2.61) bewiesen.

Umgekehrt, gilt (2.61), so ergibt die Taylorformel für Polynomen mit  $n = \deg P$

$$\begin{aligned} P(z) &= P(\lambda) + \frac{P'(\lambda)}{1!} (z - \lambda) + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^n \\ &= \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} (z - \lambda)^m + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^n \\ &= (z - \lambda)^m Q(z) \end{aligned}$$

wobei

$$Q(z) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} + \frac{P^{(m+1)}(\lambda)}{(m+1)!} (z - \lambda) + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^{n-m}.$$

Offensichtlich  $Q(\lambda) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} \neq 0$ , woraus folgt, dass  $\lambda$  eine Nullstelle mit der Vielfachheit  $m$  ist. ■

**Lemma 2.11** *Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  verschiedene komplexe Zahlen, wobei  $r \geq 1$ . Gilt für Polynomen  $P_j(t)$  über  $\mathbb{C}$  die Identität*

$$\sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t} = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (2.62)$$

dann sind alle Polynomen  $P_j(t)$  identisch Null.

**Beweis.** Wir benutzen die Induktion nach  $r$ . Der Induktionsanfang  $r = 1$  ist trivial. Den Induktionsschritt von  $r - 1$  zu  $r$  führen wir wie im Beweis von Satz 2.4 durch. In der Identität (2.62) können wir auf alle Nullpolynomen  $P_j$  verzichten und somit voraussetzen, dass  $P_j$  kein Nullpolynom für jedes  $j = 1, \dots, r$  ist. Dividieren (2.62) durch  $e^{\lambda_r t}$  und bezeichnen  $\lambda_j - \lambda_r =: \mu_j$  ergibt

$$\sum_{j=1}^{r-1} P_j(t) e^{\mu_j t} + P_r(t) = 0. \quad (2.63)$$

Wählen wir eine ganze Zahl  $k > \deg P_r$ , wobei  $\deg P$  der Grad von  $P$  ist. Die  $k$ -fache Ableitung von (2.63) ergibt

$$\sum_{j=1}^{r-1} (P_j(t) e^{\mu_j t})^{(k)} = 0. \quad (2.64)$$

**Behauptung.** Seien  $P$  ein Polynom über  $\mathbb{C}$  und  $\mu \neq 0$  eine komplex Zahl. Dann gilt für alle  $k = 0, 1, \dots$

$$(P(t) e^{\mu t})^{(k)} = Q(t) e^{\mu t} \quad (2.65)$$

wobei  $Q$  auch ein Polynom ist mit  $\deg Q = \deg P$ .

Es reicht (2.65) für  $k = 1$  zu beweisen und danach die Induktion nach  $k$  zu benutzen. Ist  $P \equiv 0$  dann gilt auch  $Q \equiv 0$ . Sei  $P$  nicht-Null. Dann reicht es die Identität (2.65) für Monomen  $P(t) = t^m$  beweisen, da für allgemeine Polynomen (2.65) danach nach Linearität folgt. Für  $k = 1$  und  $P(t) = t^m$  haben wir

$$(t^m e^{\mu t})' = \mu t^m e^{\mu t} + m t^{m-1} t^{\mu t} = Q(t) e^{\mu t}$$

wobei  $\deg Q = m = \deg P$ , was zu beweisen war.

Nach der Behauptung haben wir

$$(P_j(t) e^{\mu_j t})^{(k)} = Q_j(t) e^{\mu_j t},$$

wobei  $\deg Q_j = \deg P_j$  und deshalb  $Q_j \not\equiv 0$ . Andererseits haben wir nach (2.64)

$$\sum_{j=1}^{r-1} Q_j(t) e^{\mu_j t} = 0.$$

Die Induktionsvoraussetzung ergibt  $Q_j \equiv 0$ , und dieser Widerspruch beschließt den Beweis. ■

**Beweis von Satz 2.5.** Seien  $P$  das charakteristische Polynom von (2.54) und  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  von Vielfachheit  $m$ . Wir beweisen zunächst, dass die Funktion  $x(t) = t^k e^{\lambda t}$  die DGL (2.54) für jedes  $k = 0, \dots, m-1$  löst, also

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) = 0.$$

Nach Lemma 2.9 und (2.31) haben wir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (t^k)^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (t^k)^{(j)} P^{(j)}(\lambda) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Falls  $j > k$  dann  $(t^k)^{(j)} \equiv 0$ . Falls  $j \leq k$  dann  $j < m$  und somit nach Voraussetzung und Lemma 2.10  $P^{(j)}(\lambda) = 0$ . Deshalb verschwinden alle Terme in der obigen Summe, was ergibt

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) = 0,$$

also die Funktion  $x(t) = t^k e^{\lambda t}$  löst (2.54).

Jetzt zeigen wir, dass die  $n$  Funktionen in der Folge

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 0, \dots, m_j - 1, \quad (2.66)$$

linear unabhängig sind. Betrachten wir eine Linearkombination von diesen Funktionen, die dargestellt werden kann wie folgt:

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{jk} t^k e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t} \quad (2.67)$$

wobei  $P_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{jk} t^k$  Polynomen sind. Nach Lemma 2.11 kann die Linearkombination (2.67) nur dann identisch Null sein, wenn  $P_j \equiv 0$ , woraus folgt dass alle  $C_{jk} = 0$  und somit die Funktionen (2.66) linear unabhängig sind.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Sei  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle der Vielfachheit  $m$ . Nach Lemma 2.10 erfüllt  $\lambda$  die Gleichungen (2.61). Konjugieren diese Gleichungen ergibt die ähnlichen Gleichungen für  $\bar{\lambda}$ , da  $P(\lambda) = P(\bar{\lambda})$  (vgl. (2.56)). Daraus folgt, dass  $\bar{\lambda}$  auch eine Nullstelle der Vielfachheit  $m$  ist.

Die letzte Behauptung, dass jedes Paar

$$t^k e^{\lambda t}, \quad t^k e^{\bar{\lambda} t}$$

in (2.66) durch das Paar

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$$

ersetzt werden kann, folgt aus der Beobachtung, dass diese Paare auseinander durch Lineartransformationen nach Eulerformel entstehen und somit gleichen Unterraum erzeugen, wie im Beweis von Satz 2.4. ■

**Beweis von Satz 2.8.** We müssen beweisen, dass die DGL

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = R(t)e^{\mu t}$$

eine Lösung in der Form

$$x(t) = t^m Q(t) e^{\mu t}$$

hat, wobei  $m$  die Vielfachheit von  $\mu$  bezüglich  $P$  ist und  $Q$  ein Polynom mit  $\deg Q = k := \deg R$  ist. Nach Lemma 2.9 erhalten wir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)x &= P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^m Q(t) e^{\mu t}) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (t^m Q(t))^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\mu t} \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (t^m Q(t))^{(j)} P^{(j)}(\mu) e^{\mu t}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Da nach Lemma 2.10 gilt  $P^{(j)}(\mu) = 0$  für alle  $j < m$ , kann der Laufindex  $j$  durch  $j \geq m$  beschränkt werden. Bezeichnen wir

$$y(t) = (t^m Q(t))^{(m)} \quad (2.69)$$

so dass

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \sum_{j \geq m} \frac{P^{(j)}(\mu)}{j!} y^{(j-m)} e^{\mu t}. \quad (2.70)$$

Ist  $Q$  ein Polynom von Grad  $k$ , so ist  $t^m Q$  ein Polynom von Grad  $m+k$  und somit ist  $y(t) = (t^m Q(t))^{(m)}$  ein Polynom von Grad  $(m+k) - m = k$ . Umgekehrt, ist  $y$  ein Polynom von Grad  $k$ , so ergibt die  $m$ -fache Integration von (2.69) (ohne die Integrationskonstanten zu addieren) und Division durch  $t^m$  ein Polynom von Grad  $k$ , das ist  $Q$ . Deshalb reicht es ein Polynom  $y$  von Grad  $k$  zu bestimmen, derart, dass die rechte Seite von (2.70) gleich  $R(t) e^{\mu t}$  ist. Da  $e^{\mu t}$  sich herauskürzen lässt, erhalten wir die folgende DGL für  $y$

$$\sum_{j \geq m} \frac{P^{(j)}(\mu)}{j!} y^{(j-m)} = R(t).$$

Durch den Wechsel  $l = j - m$  des Laufindex, schreiben wir diese DGL in der folgenden Form um:

$$\sum_{l \geq 0} b_l y^{(l)} = R(t), \quad (2.71)$$

wobei  $b_l = \frac{P^{(l+m)}(\mu)}{(l+m)!}$ , insbesondere

$$b_0 = \frac{P^{(m)}(\mu)}{m!} \neq 0. \quad (2.72)$$

Es bleibt die folgende Behauptung zu beweisen.

**Behauptung.** Sei  $b_0 \neq 0$ . Ist  $R(t)$  ein Polynom von Grad  $k \geq 0$ , so existiert ein Polynom  $y(t)$  von Grad  $k$ , das (2.71) erfüllt.

Beweis per Induktion nach  $k$ . Im Induktionsanfang für  $k = 0$  ist  $R(t)$  konstant, z.B.,  $R(t) = \alpha$ , und  $y(t)$  muss auch konstant sein, also  $y(t) = c$ . Dann führt (2.71) zurück auf die Gleichung  $b_0 c = \alpha$ , woraus folgt  $c = \alpha/b_0$ .

Für den Induktionsschritt von Werten  $< k$  nach  $k$ , stellen wir  $y$  in der Form

$$y = ct^k + z(t) \quad (2.73)$$

dar, wobei  $z$  ein Polynom von Grad  $< k$  ist. Einsetzen (2.73) in (2.71) ergibt die DGL für  $z$

$$\sum_{l \geq 0} b_l z^{(l)} = R(t) - \sum_{l \geq 0} b_l (ct^k)^{(l)} =: \tilde{R}(t).$$

Bemerken wir, dass  $\tilde{R}$  immer ein Polynom von Grad  $\leq k$  ist, als die Differenz von zwei Polynomen von Grad  $k$ . Bezeichnen mit  $\alpha t^k$  den höchsten Term im Polynom  $R(t)$ , also

$$R(t) = \alpha t^k + \text{Terme von Grad } < k.$$

Dann gilt

$$\tilde{R}(t) = (\alpha - b_0 c) t^k + \text{Terme von Grad } < k.$$

Bestimmen  $c$  aus der Gleichung  $b_0 c = \alpha$ , also  $c = \alpha/b_0$ , ergibt  $\deg \tilde{R} < k$ . Nach der Induktionsvoraussetzung hat die DGL

$$\sum_{l \geq 0} b_l z^{(l)} = \tilde{R}(t)$$

eine Lösung  $z(t)$ , die ein Polynom von Grad  $< k$  ist. Somit ist die Funktion  $y = ct^k + z$  ein Polynom von Grad  $k$ , und  $y$  löst die DGL (2.71).

Letztlich betrachten wir den Fall  $R(t) \equiv \alpha$ . Im Induktionsanfang haben wir es schon gesehen, dass in diesem Fall  $y(t)$  eine Konstante ist wie folgt:

$$y(t) = \frac{\alpha}{b_0} = \frac{m! \alpha}{P^{(m)}(\mu)}.$$

Die DGL (2.69) wird

$$(t^m Q(t))^{(m)} = \frac{m! \alpha}{P^{(m)}(\mu)},$$

woraus die  $m$ -fache Integration ergibt

$$t^m Q(t) = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m.$$

Deshalb hat die DGL  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \alpha e^{\mu t}$  eine spezielle Lösung

$$x(t) = t^m Q(t) e^{\mu t} = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m e^{\mu t},$$

was zu beweisen war. ■

## 2.9 Beweis von dem Satz 2.1

Für den Beweis von Satz 2.1 brauchen wir das folgende Lemma.

**Lemma 2.12** (Grönwall-Lemma) *Sei  $z(t)$  eine nicht-negative stetige Funktion auf einem Intervall  $[a, b]$  und  $t_0 \in [a, b]$ . Gilt die folgende Ungleichung für alle  $t \in [a, b]$ :*

$$z(t) \leq C + L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|, \quad (2.74)$$

mit beliebigen Konstanten  $C, L \geq 0$ , dann gilt für alle  $t \in [a, b]$  die Ungleichung

$$z(t) \leq C e^{L|t-t_0|}. \quad (2.75)$$

**Bemerkung.** Normalerweise formuliert man Grönwall-Lemma für den Fall  $t_0 = a$ . In diesem Fall entfallen die Betragzeichen in (2.74) und (2.75), weil  $t \geq t_0$ .

**Beweis.** Es reicht die Behauptung im Fall  $C > 0$  zu beweisen, da der Fall  $C = 0$  daraus folgt indem man  $C \rightarrow 0$  lässt. In der Tat, ist (2.74) mit  $C = 0$  erfüllt, so ist (2.74) auch mit jedem  $C > 0$  erfüllt. Es folgt, dass (2.75) mit jedem  $C > 0$  erfüllt ist, und das ergibt (2.75) mit  $C = 0$ .

Also, nehmen wir an, dass  $C > 0$  und definieren eine Funktion  $F$  auf dem Intervall  $[t_0, b]$  wie folgt

$$F(t) = C + L \int_{t_0}^t z(s) ds.$$

Bemerken wir, dass die Funktion  $F$  echt positive und differenzierbar ist, und  $F' = Lz$  gilt. Die Bedingung (2.74) ergibt für  $t \in [t_0, b]$  dass  $z \leq F$  und somit

$$F' = Lz \leq LF.$$

Diese Differentialungleichung kann gelöst werden genau so, wie trennbare DGLen. Dividieren durch  $F$  ergibt

$$\frac{F'}{F} \leq L,$$

und durch Integration über  $[t_0, t]$  erhalten wir, dass

$$\ln \frac{F(t)}{F(t_0)} = \int_{t_0}^t \frac{F'(s)}{F(s)} ds \leq \int_{t_0}^t L ds = L(t - t_0),$$

für alle  $t \in [t_0, b]$ . Daraus folgt

$$F(t) \leq F(t_0) e^{L(t-t_0)} = C e^{L(t-t_0)}.$$

Da  $z \leq F$ , erhalten wir (2.75) für alle  $t \in [t_0, b]$ .

Auf dem Intervall  $[a, t_0]$  betrachten wir analog die Funktion

$$F(t) = C + L \int_t^{t_0} z(s) ds,$$

die positive und differenzierbar ist. Da  $F' = -Lz$  und nach (2.74)  $z \leq F$ , erhalten wir die Differentialungleichung

$$F' \geq -LF,$$

die ergibt für  $t \in [a, t_0]$

$$\ln \frac{F(t_0)}{F(t)} = \int_t^{t_0} \frac{F'(s)}{F(s)} ds \geq - \int_t^{t_0} L ds = -L(t_0 - t) = -L|t - t_0|$$

und

$$z(t) \leq F(t) \leq F(t_0) e^{L|t-t_0|} = C e^{L|t-t_0|}.$$

■

**Beweis von Satz 2.1.** Wählen wir ein beschränktes geschlossenes Intervall  $[\alpha, \beta] \subset I$ , derart, dass  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . Wir beweisen die folgenden zwei Behauptungen:

1. die Eindeutigkeit der Lösung auf  $[\alpha, \beta]$ , sowie auf jedem Teilintervall  $I' \subset I$ ;
2. die Existenz einer Lösung auf  $[\alpha, \beta]$ , sowie auf dem ganzen Intervall  $I$ .

Bemerken wir, dass für jede Lösung  $x(t)$  von (2.6) auf  $[a, \beta]$  und für alle  $t \in [\alpha, \beta]$  gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t x'(s) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Sei  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (2.6) auf the interval  $[a, \beta]$ , dann die beiden Funktionen erfüllen die Integralgleichung (2.76). Daraus folgt, dass

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t A(s)(x(s) - y(s)) ds,$$

für alle  $t \in [\alpha, \beta]$ . Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Wir benutzen die Ungleichung

$$\left\| \int_{t_0}^t f(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s)\| ds \right|, \quad (2.77)$$

die für jede stetige Funktion  $f(s)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  gilt. Mit Hilfe von (2.77) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(x(s) - y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|(x(s) - y(s))\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|(x(s) - y(s))\| ds \right|, \end{aligned} \quad (2.78)$$

wobei

$$L = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} \|A(s)\|. \quad (2.79)$$

Da die Verkettung  $s \mapsto A(s) \mapsto \|A(s)\|$  stetig ist, ist die Funktion  $\|A(s)\|$  beschränkt auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$ , so dass  $L < \infty$ . Nach (2.78) gilt für die Funktion

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\|$$

die folgende Ungleichung:

$$z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|.$$

Lemma 2.12 mit  $C = 0$  ergibt  $z(t) \leq 0$  und somit  $z(t) = 0$ ,  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $[\alpha, \beta]$ .

Sei  $x(t), y(t)$  zwei Lösungen von (2.6) auf einem Intervall  $I' \subset I$ . Für jedes Intervall  $[\alpha, \beta] \subset I'$  mit  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  haben wir  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $[\alpha, \beta]$ . Da jedes Intervall als eine Vereinigung von beschränkten geschlossenen Intervallen dargestellt werden kann, gewinnen wir die Identität  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .

Jetzt beweisen wir die Existenz einer Lösung von (2.6) auf  $[\alpha, \beta]$  mit Hilfe von Annäherung durch eine Funktionenfolge  $\{x_k(t)\}_{k=0}^\infty$  auf  $[\alpha, \beta]$ . Die Näherungslösungen werden induktiv definiert wie folgt:

$$x_0(t) \equiv x_0$$

und

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-1}(s) + B(s)) ds, \quad k \geq 1. \quad (2.80)$$

Es ist klar, dass alle Funktionen  $x_k(t)$  stetig auf  $[\alpha, \beta]$  sind. Wir beweisen, dass die Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  auf  $[\alpha, \beta]$  gegen eine Lösung von (2.6) konvergiert für  $k \rightarrow \infty$ . Mit Hilfe von (2.80) und

$$x_{k-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-2}(s) + B(s)) ds$$

erhalten wir, für jedes  $k \geq 2$  und  $t \in [\alpha, \beta]$ ,

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)\| ds \right|, \end{aligned} \quad (2.81)$$

wobei  $L$  wie früher nach (2.79) definiert ist. Bezeichnen wir

$$z_k(t) = \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|,$$

und schreiben (2.81) in der folgenden Form um:

$$z_k(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z_{k-1}(s) ds \right|. \quad (2.82)$$

Zunächst schätzen wir die Funktion  $z_1(t) = \|x_1(t) - x_0(t)\|$  für  $t \in [t_0, \beta]$  ab, wie folgt:

$$z_1(t) = \left\| \int_{t_0}^t (A(s)x_0 + B(s)) ds \right\| \leq M(t - t_0),$$

wobei

$$M = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} \|A(s)x_0 + B(s)\| < \infty.$$

Es folgt aus (2.82), dass für  $t \in [t_0, \beta]$

$$\begin{aligned} z_2(t) &\leq LM \int_{t_0}^t (s - t_0) ds = LM \frac{(t - t_0)^2}{2}, \\ z_3(t) &\leq L^2 M \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^2}{2} ds = L^2 M \frac{(t - t_0)^3}{2 \cdot 3}, \\ &\dots \\ z_k(t) &\leq L^{k-1} M \frac{(t - t_0)^k}{k!} \leq \frac{(c(t - t_0))^k}{k!}, \end{aligned}$$

wobei  $c = \max(L, M)$ .

Mit dem gleichen Argument behandeln wir den Fall  $t \in [\alpha, t_0]$  und somit erhalten die folgende Ungleichung für alle  $t \in [\alpha, \beta]$ :

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{(c|t - t_0|)^k}{k!}. \quad (2.83)$$

Die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c|t - t_0|)^k}{k!}$$

konvergiert für alle  $t$ , und zwar gleichmässig auf jedem beschränkten Intervall. Daraus folgt, dass die Folge  $\{x_k\}$  eine Cauchy-Folge in  $C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$  ist, da für alle  $n > m$  nach der Dreiecksungleichung und (2.83) gilt

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x_n(t) - x_m(t)\| &\leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \sum_{k=m+1}^n \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \\ &\leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \sum_{k=m+1}^n \frac{(c|t - t_0|)^k}{k!} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n, m \rightarrow \infty$ . Da  $C([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$  ein vollständiger metrischer Raum ist, so erhalten wir, dass die Funktionenfolge  $\{x_k(t)\}$  gleichmäßig auf  $[\alpha, \beta]$  konvergiert. Setzen wir

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t).$$

Die Funktion  $x(t)$  ist stetig auf  $[\alpha, \beta]$  als der Grenzwert von einer gleichmäßig konvergierten Funktionenfolge von stetigen Funktionen. In der Identität (2.80), also

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-1}(s) + B(s)) ds,$$

lassen wir  $k$  gegen  $\infty$  streben und erhalten, dass der Grenzwert  $x(t)$  die folgende Integralgleichung erfüllt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds \quad (2.84)$$

(das Integralzeichen und der Limes sind vertauschbar auf jedem kompakten Intervall). Wir behaupten, dass  $x(t)$  das Anfangswertproblem (2.6) auf  $[\alpha, \beta]$  löst. Da die rechte Seite von (2.84) eine differenzierbare Funktion von  $t$  ist, so ist  $x(t)$  auch differenzierbar, und

$$x' = \frac{d}{dt} \left( x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds \right) = A(t)x(t) + B(t).$$

Schließlich, es ist klar von (2.84), dass  $x(t_0) = x_0$ . Deshalb löst  $x(t)$  das Anfangswertproblem (2.6) auf  $[\alpha, \beta]$ .

Jetzt definieren wir eine Lösung auf ganzem Intervall  $I$ . Es gibt eine wachsende Folge von beschränkten geschlossenen Intervallen  $\{[\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{\infty}$ , derart, dass ihre Vereinigung gleich  $I$  ist; wir nehmen auch an, dass  $t_0 \in [\alpha_i, \beta_i]$  für alle  $i$ . Bezeichnen mit  $x_i(t)$  eine Lösung von (2.6) auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ . Dann ist  $x_{i+1}(t)$  auch eine Lösung von (2.6) auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ , und nach Eindeutigkeit des 1. Teils gewinnen wir, dass  $x_{i+1}(t) = x_i(t)$  auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ . Also, in der Folge  $\{x_i(t)\}$  ist jede Funktion eine Fortsetzung der vorhergehenden Funktion. Daraus folgt, dass die Funktion

$$x(t) := x_i(t) \text{ für } t \in [\alpha_i, \beta_i]$$

wohldefiniert für alle  $t \in I$  ist, und deshalb  $x(t)$  eine Lösung von Anfangswertproblem (2.6) auf  $I$  ist. ■

Der Beweis von der Existenz der Lösung führt zur folgenden Methode für Bestimmung der Lösung  $x(t)$  des Anfangswertproblems (2.6). Man definiert eine Folge von *Näherungslösungen*  $x_k(t)$  nach den Regeln

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_k(s) + B(s)) ds.$$

Diese Folge  $\{x_k(t)\}$  heißt die *Picarditeration*. Nach dem Beweis von Satz 2.1 konvergiert die Folge  $\{x_k(t)\}$  gegen der Lösung  $x(t)$  für alle  $t \in I$ , und zwar gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall  $[\alpha, \beta] \subset I$ .

**Beispiel.** Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Die Picarditeration ist durch die Identität

$$x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t x_k(s) ds$$

gegeben. Da  $x_0(t) \equiv 1$ , so erhalten wir induktiv

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t x_0(s) ds = 1 + t,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t x_1(s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t x_2(s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

usw., so dass

$$x_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

Da  $x_k(t)$  die partiellen Summen der Exponentialreihe sind, erhalten wir, dass  $x_k(t) \rightarrow e^t$  für  $k \rightarrow \infty$  und somit die Funktion  $x(t) = e^t$  die Lösung ist – siehe Fig. 16.

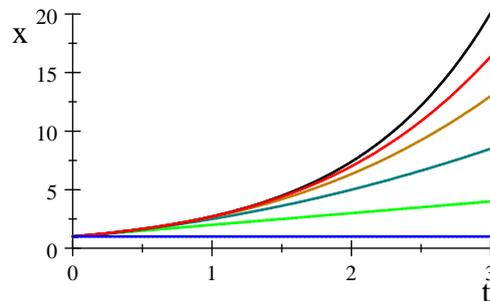


Figure 16: Näherungslösungen  $x_k(t)$  für  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  und die exakte Lösung  $x(t) = e^t$

## 2.10 Der Raum von Lösungen linearer Normalsysteme

Betrachten wir ein lineares Normalsystem

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.85)$$

wobei die Funktionen  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig auf einem nicht-trivialen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind, sowie auch das entsprechende *homogene* Normalsystem:

$$x' = A(t)x. \quad (2.86)$$

Bezeichnen wir mit  $L$  die Menge von allen Lösungen von (2.86) auf  $I$  (also  $L$  ist die allgemeine Lösung von (2.86)).

**Behauptung.**  $L$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

**Beweis.** Betrachten erst die Menge  $\mathcal{F}$  von allen Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es ist klar, dass  $\mathcal{F}$  ein Vektorraum ist, mit Operationen Addition von Funktionen und Multiplikation mit einem Skalar. Das Nullelement von  $\mathcal{F}$  ist die konstante Funktion 0. Offensichtlich ist die allgemeine Lösung  $L$  eine Teilmenge von  $\mathcal{F}$ . Wir müssen beweisen, dass  $L$  ein Unterraum von  $\mathcal{F}$  ist, d.h.

(i)  $0 \in L$

(ii)  $x, y \in L \Rightarrow x + y \in L$  (Abgeschlossenheit unter der Addition)

(iii)  $x \in L, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx \in L$  (Abgeschlossenheit unter der Multiplikation)

Die Bedingung (i) ist offensichtlich, weil die Funktion  $x(t) \equiv 0$  eine Lösung von (2.86) ist.

Die Bedingung (ii) folgt aus der Identität

$$(x + y)' = x' + y' = Ax + Ay = A(x + y),$$

und (iii) folgt von  $(cx)' = cx' = A(cx)$ . Deshalb ist  $L$  ein Unterraum. ■

Der folgende Satz ist analog zum Satz 2.3 und Lemma 2.6.

**Satz 2.13** (a) *Es gilt  $\dim L = n$ . Folglich ist die allgemeine Lösung des homogenen Normalsystems (2.86) durch die folgende Identität gegeben*

$$x_h(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t), \quad (2.87)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.86) sind und  $C_1, \dots, C_n$  beliebige Konstanten.

(b) *Sei  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung des inhomogenen Normalsystems (2.85). Dann ist die allgemeine Lösung von (2.85) durch die folgende Identität gegeben:*

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t), \quad (2.88)$$

wobei  $x_h$  wie im Punkt (a) ist.

**Beweis.** (a) Wählen wir eine beliebige (aber feste) Stelle  $t_0 \in I$  und definieren eine Abbildung  $\Phi : L \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$\Phi(x) = x(t_0), \quad (2.89)$$

d.h.,  $\Phi$  ist die Auswertung der Lösung  $x(t)$  an der Stelle  $t_0$ . Offensichtlich ist  $\Phi$  eine lineare Abbildung. Nach Satz 2.1 ist die Abbildung (2.89) bijektiv, da für jeden Wert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  genau eine Lösung  $x(t)$  existiert mit  $x(t_0) = x_0$ , d.h. mit  $\Phi(x) = x_0$ . Somit ist  $\Phi$  ein linearer Isomorphismus zwischen  $L$  und  $\mathbb{R}^n$ . Daraus folgt, dass  $L$  und  $\mathbb{R}^n$  linear isomorph sind und somit  $\dim L = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängige Lösungen von (2.86), dann stellt die Folge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine Basis in  $L$  dar. Folglich ist jede Funktion von  $L$  eine Linearkombination von  $x_1, \dots, x_n$ , was zu beweisen war.

(b) Wir behaupten folgendes: eine Funktion  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  löst (2.85) genau dann, wenn die Funktion  $y = x - x_0$  die DGL (2.86) löst. In der Tat ist die DGL  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$\begin{aligned}(y + x_0)' &= A(y + x_0) + B, \\ y' + x_0' &= Ay + Ax_0 + B, \\ y' &= Ay,\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $x_0' = Ax_0 + B$ . Nach dem Punkt (a) ist  $y$  die allgemeine Lösung von (2.86), woraus folgt  $x = x_0 + y = x_0 + x_h$ . ■

**Korollar 2.14** Sei  $t_0 \in I$  eine beliebige Stelle. Eine Folge  $x_1, \dots, x_k$  von Lösungen von (2.86) ist genau dann linear unabhängig, wenn die Folge von Vektoren  $x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)$  linear unabhängig ist.

**Beweis.** Das folgt aus der Bemerkung, dass die lineare Unabhängigkeit durch den Isomorphismus  $\Phi$  aus (2.89) bewahrt wird. ■

Wir betonen, dass für allgemeine Funktionen Korollar 2.14 nicht gilt: es kann sein, dass die Funktionen  $x_1, x_2$  unabhängig sind, während die Vektoren  $x_1(t_0), x_2(t_0)$  abhängig sind.

**Beispiel.** Betrachten wir den Fall  $n = 2$  und das Normalsystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x. \quad (2.90)$$

Später lernen wir, wie man solche Systeme lösen kann, aber jetzt führen wir das System auf eine skalare DGL 2-ter Ordnung zurück. Bezeichnen wir mit  $X_1, X_2$  die Komponenten von  $x$  so dass  $x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  und (2.90) wird

$$\begin{cases} X_1' = -X_2 \\ X_2' = X_1. \end{cases}$$

Daraus folgt  $X_1'' = -X_2' = -X_1$  und somit

$$X_1'' + X_1 = 0.$$

Nehmen wir zwei unabhängige Lösungen:

1.  $X_1 = \cos t$  und  $X_2 = -X_1' = \sin t$
2.  $X_1 = -\sin t$  und  $X_2 = \cos t$ .

Daher erhalten wir zwei unabhängige Lösungen von (2.90)

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und } x_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung von (2.90) ist somit gleich

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = \begin{pmatrix} C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 2.14 sind die Vektoren  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  unabhängig für jedes  $t$ . Das folgt auch aus der folgenden Identität:

$$\det(x_1 \mid x_2) = \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

wobei  $(x_1 \mid x_2)$  eine Matrix mit den Spaltenvektoren  $x_1$  und  $x_2$  bezeichnet.

Betrachten wir jetzt zwei andere Vektorfunktionen

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und } y_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

die offensichtlich auch linear unabhängig sind als Funktionen. Jedoch haben wir für  $t = \pi/4$

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = y_2(t)$$

so dass die Vektoren  $y_1(\pi/4)$  und  $y_2(\pi/4)$  abhängig sind. Folglich können die Funktionen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  das gleiche System  $y' = A(t)y$  nicht lösen.

**Bemerkung.** Man kann genauso komplexwertige Normalsysteme betrachten. In diesem Fall werden die Koeffizienten  $A(t)$  und  $B(t)$  definiert als die stetigen Funktionen  $A: I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $B: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ , und  $x(t)$  ist eine gesuchte Funktion mit Werten in  $\mathbb{C}^n$ . Dann gilt die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.1: für alle  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ , hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = Ax + B \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.91)$$

eine Lösung  $x: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ ; darüber hinaus ist die Lösung von (2.91) eindeutig auf jedem Teilintervall  $I' \subset I$ , das  $t_0$  enthält. Man kann diese Behauptung entweder direkt beweisen, genauso wie Satz 2.1, oder aus Satz 2.1 gewinnen durch Identifizierung von  $\mathbb{C}^n$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$  wie folgt. Stellen wir  $x(t)$  dar wie  $x(t) = X(t) + iY(t)$  wobei  $X(t)$  und  $Y(t)$   $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktionen sind, und analog schreiben  $A(t) = A_1(t) + iA_2(t)$ ,  $B(t) = B_1(t) + iB_2(t)$  mit reellwertigen  $A_j, B_j$ . Dann ist die Gleichung  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$(X + iY)' = (A_1 + iA_2)(X + iY) + (B_1 + iB_2)$$

und somit zu

$$\begin{cases} X' = A_1X - A_2Y + B_1 \\ Y' = A_2X + A_1Y + B_2 \end{cases} \quad (2.92)$$

Bezeichnen wir mit  $\tilde{B}$  die  $\mathbb{R}^{2n}$ -wertige Funktion  $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , und mit  $\tilde{A}$  die  $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ -wertige Funktion wie folgt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (2.92) äquivalent zur DGL

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}' = \tilde{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \tilde{B}. \quad (2.93)$$

Da (2.93) ein lineares Normalsystem der Dimension  $2n$  mit reellwertigen Koeffizienten ist, nach Satz 2.1 hat das Anfangswertproblem für (2.93) eine eindeutige Lösung, woraus gleiches für (2.91) folgt.

Somit gelten auch Satz 2.13 und Korollar 2.14 für die komplexwertigen Systeme, vorausgesetzt, dass die Räume von Lösungen über den Körper  $\mathbb{C}$  betrachtet werden und die beliebigen Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  komplexwertig sind.

## 2.11 Variation der Konstanten

Betrachten wir wieder das inhomogene Normalsystem

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.94)$$

mit stetigen Koeffizienten  $A(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir führen hier ein Verfahren zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von (2.94) ein, vorausgesetzt, dass die allgemeine Lösung des homogenen Systems  $x' = A(t)x$  bekannt ist. Den speziellen Fall für  $n = 1$  haben wir schon im Abschnitt 1.4 betrachtet (vgl. Satz 1.4).

Gegeben seien  $n$  linear unabhängige Lösungen  $x_1, \dots, x_n$  von  $x' = A(t)x$ , betrachten wir die *Fundamentalmatrix*

$$X(t) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline & & & & \end{array} \right), \quad (2.95)$$

wobei die  $k$ -te Spalte durch den Spaltenvektor  $x_k(t)$  gegeben ist, für alle  $k = 1, \dots, n$ . Wie schreiben die  $n \times n$  Matrix (2.95) kurz in der Form

$$X(t) = (x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n).$$

Nach Korollar 2.14 sind die Spalten von  $X(t)$  linear unabhängig für jedes  $t \in I$ , woraus folgt, dass  $\det X(t) \neq 0$  und somit die inverse Matrix  $X^{-1}(t)$  für alle  $t \in I$  definiert ist. Man benutzt  $X$  und  $X^{-1}$ , um das inhomogene Normalsystem (2.94) wie folgt zu lösen.

**Satz 2.15** Die allgemeine Lösung des Systems (2.94) ist durch die Identität

$$x(t) = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt \quad (2.96)$$

gegeben.

Zunächst beweisen wir eine Behauptung.

**Behauptung.** Seien  $x_1, \dots, x_m$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  und  $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}$ . Dann gilt die Identität

$$C_1 x_1 + \dots + C_m x_m = XC, \quad (2.97)$$

wobei  $X$  die  $n \times m$  Matrix mit Spalten  $x_1, \dots, x_m$  ist und  $C$  der Spaltenvektor mit Komponenten  $C_1, \dots, C_m$ .

**Beweis.** Sei  $x_{ik}$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $x_k$ . Dann hat die Matrix  $X$  die Elemente  $x_{ik}$  wobei  $i$  der Zeilenindex ist und  $k$  der Spaltenindex. Nach Definition des Produktes von Matrizen erhalten wir

$$(XC)_i = \sum_{k=1}^m x_{ik} C_k = \left( \sum_{k=1}^m C_k x_k \right)_i$$

woraus (2.97) folgt. ■

Man kann die Identität (2.97) etwas ausführlicher darstellen wie folgt:

$$\left( \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline x_2 \\ \hline \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{|c|} \hline x_n \\ \hline \end{array} \right) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} = C_1 x_1 + \dots + C_m x_n$$

**Beweis von Satz 2.15.** Da für jedes  $t \in I$  die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  linear unabhängig sind, kann jeder Vektor aus  $\mathbb{R}^n$  als eine Linearkombination von den Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  dargestellt werden. Insbesondere gilt es für den Vektor  $x(t)$ , wobei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beliebige Funktion ist. Somit existieren die reellwertigen Funktionen  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  auf  $I$ , derart, dass die folgende Identität

$$x(t) = C_1(t) x_1(t) + \dots + C_n(t) x_n(t) \quad (2.98)$$

für alle  $t \in I$  gilt. Bezeichnen wir mit  $C(t)$  den Spaltenvektor mit den Komponenten  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  und umschreiben die Identität (2.98) nach (2.97):

$$x(t) = X(t) C(t).$$

Daraus folgt, dass

$$C(t) = X^{-1}(t) x(t)$$

gilt und die Funktion  $C(t)$  nach  $t$  differenzierbar ist, vorausgesetzt, dass  $x(t)$  differenzierbar ist<sup>4</sup>. Durch Ableitung von (2.98) erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= C_1 x_1' + C_2 x_2' + \dots + C_n x_n' \\ &\quad + C_1' x_1 + C_2' x_2 + \dots + C_n' x_n \\ &= C_1 A x_1 + C_2 A x_2 + \dots + C_n A x_n \quad (\text{benutzt } x_k' = A x_k) \\ &\quad + C_1' x_1 + C_2' x_2 + \dots + C_n' x_n \\ &= A(C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n) \\ &\quad + C_1' x_1 + C_2' x_2 + \dots + C_n' x_n \\ &= Ax + XC'. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Die Funktion  $X^{-1}(t)$  ist immer nach  $t$  differenzierbar, da die Komponenten von  $X^{-1}(t)$  rationale Funktionen der Komponenten von  $X(t)$  sind.

Deshalb ist die DGL  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$XC' = B. \quad (2.99)$$

Durch Lösung dieser Gleichung bezüglich  $C'$  erhalten wir

$$C' = X^{-1}B,$$

und somit

$$C(t) = \int X^{-1}(t) B(t) dt,$$

und

$$x(t) = XC = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt,$$

was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Die Bezeichnung "Variation der Konstanten" kommt aus der Identität (2.98), wo man die Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  aus dem Ausdruck

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$$

für die Lösung der *homogenen* DGL variieren lässt, d.h. durch die Funktionen ersetzt, und somit die Lösung der *inhomogenen* DGL bestimmt.

**Zweiter Beweis von Satz 2.15.** Bemerken zunächst, dass die Fundamentalmatrix  $X$  die folgende DGL

$$X' = AX \quad (2.100)$$

erfüllt, weil jeder Spaltenvektor  $x_k$  von  $X$  die ähnliche Gleichung  $x'_k = Ax_k$  erfüllt. Durch Ableitung von (2.96) nach  $t$  und mit Hilfe von Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= X'(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt + X(t) (X^{-1}(t) B(t)) \\ &= AX \int X^{-1} B(t) dt + B(t) \\ &= Ax + B(t). \end{aligned}$$

Deshalb löst  $x(t)$  das Normalsystem (2.94). Jetzt zeigen wir, dass (2.96) alle Lösungen liefert. Das Integral in (2.96) ist unbestimmt und somit kann in der Form

$$\int X^{-1}(t) B(t) dt = V(t) + C$$

dargestellt werden, wobei  $V(t)$  eine Stammfunktion und  $C = (C_1, \dots, C_n)$  ein konstanter Vektor ist. Es folgt aus (2.96), dass

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) V(t) + X(t) C \\ &= x_0(t) + C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t), \end{aligned}$$

wobei  $x_0(t) = X(t) V(t)$  eine Lösung von (2.94) ist. Nach Satz 2.13 erhalten wir, dass  $x(t)$  die allgemeine Lösung ist. ■

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Dieses System hat zwei unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

wie es schon bemerkt wurde. Somit ist die Fundamentalmatrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und die inverse Matrix

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Betrachten jetzt die inhomogene DGL

$$x' = A(t)x + B(t)$$

wobei  $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$ . Nach (2.96) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Z.B., nehmen wir  $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$  an und berechnen das Integral wie folgt:

$$\int \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ -\sin t - t \cos t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \cos t + C_1 \\ -t \sin t + C_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cos t + C_1 \\ -t \sin t + C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \cos t - C_2 \sin t + t \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Skalare DGLen  $n$ -ter Ordnung.** Jetzt verwenden wir das Verfahren Variation der Konstanten zur Lösung der skalaren linearen ODE  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t), \quad (2.101)$$

wobei  $a_k(t)$  und  $f(t)$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$ . Wir lösen (2.101) indem wir die DGL (2.101) auf ein Normalsystem zurückführen.

Wir wissen schon, dass (2.101) äquivalent zum Normalsystem

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + B(t) \quad (2.102)$$

ist, wobei

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Seien  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0. \quad (2.103)$$

Bezeichnen mit  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  die entsprechenden Vektorfunktionen, die unabhängige Lösungen von  $x' = A(t)x$  sind, und betrachten die Fundamentalmatrix

$$X = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

Diese Matrix  $X$  heißt auch die Fundamentalmatrix von der DGL (2.103). Nach Satz 2.15 ist die allgemeine Lösung von (2.102) durch die Identität

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt \quad (2.105)$$

gegeben. Bezeichnen wir mit  $y_{ik}$  die Elemente von Matrix  $X^{-1}$ , also  $X^{-1} = (y_{ik})$ , wobei  $i$  der Zeilenindex und  $k$  der Spaltenindex sind. Sei  $y_k$  die  $k$ -te Spalte von  $X^{-1}$ . Nach (2.97) erhalten wir

$$X^{-1}B = 0y_1 + 0y_2 + \dots + fy_n = fy_n,$$

und nach (2.105)

$$\mathbf{x} = X(t) \int f(t) y_n(t) dt.$$

Bestimmen wir die Funktion  $x(t)$ , die die erste Komponente von  $\mathbf{x}$  ist. Man erhält  $x(t)$  als das Produkt von der ersten Zeile von  $X$  und dem Spaltenvektor  $\int f(t) y_n(t) dt$ , also

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \int f(t) y_{jn}(t) dt.$$

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 2.16** Seien  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.103) und  $X$  die Fundamentalmatrix (2.104). Für jede stetige Funktion  $f(t)$  auf  $I$  ist die allgemeine Lösung von (2.101) durch die Identität

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \int f(t) y_{jn}(t) dt \quad (2.106)$$

gegeben, wobei  $y_{jk}$  die Elemente der inversen Matrix  $X^{-1}$  sind.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + x = f(t). \quad (2.107)$$

Die unabhängige Lösungen der homogenen DGL  $x'' + x = 0$  sind  $x_1(t) = \cos t$  und  $x_2(t) = \sin t$ , und deshalb ist die Fundamentalmatrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Nach (2.106) erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.107):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \int f(t) y_{12}(t) dt + x_2(t) \int f(t) y_{22}(t) dt \\ &= \cos t \int f(t) (-\sin t) dt + \sin t \int f(t) \cos t dt. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Z.B., für  $f(t) = \sin t$  erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t \int \sin t (-\sin t) dt + \sin t \int \sin t \cos t dt \\ &= -\cos t \int \sin^2 t dt + \frac{1}{2} \sin t \int \sin 2t dt \\ &= -\cos t \left( \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C_1 \right) + \frac{1}{4} \sin t (-\cos 2t + C_2) \\ &= -\frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{4} (\sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t) + c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ &= -\frac{1}{2}t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t. \end{aligned}$$

Die gleiche Antwort kann auch mit Hilfe von Satz 2.8 gewonnen werden, da die Störfunktion  $\sin t$  ein Quasipolynom ist.

Betrachten ein anderes Beispiel von Störfunktion  $f(t) = \tan t$ , die kein Quasipolynom ist. In diesem Fall erhalten wir aus (2.108)<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} x &= \cos t \int \tan t (-\sin t) dt + \sin t \int \tan t \cos t dt \\ &= \cos t \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right) + \sin t \right) - \sin t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ &= \frac{1}{2} \cos t \ln \left( \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right) + c_1 \cos t + c_2 \sin t. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Das Integral  $\int \tan x \sin t dt$  kann wie folgt bestimmt werden:

$$\int \tan x \sin t dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} - \sin t,$$

wobei

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{d \sin t}{\cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} + C.$$

Jetzt zeigen wir, wie man die Methode von Variation der Konstanten für DGL (2.107) direkt benutzen kann, ohne die Formel (2.106) zu erinnern. Zunächst bestimmt man die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x'' + x = 0$  wie üblich:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad (2.109)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  sofern Konstanten sind. Man erhält den Lösungsansatz für (2.107) indem man die Konstanten  $C_k$  durch die Funktionen  $C_k(t)$  ersetzt:

$$x(t) = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t. \quad (2.110)$$

Um die unbekanntenen Funktionen  $C_1(t)$  und  $C_2(t)$  zu bestimmen, finden wir zwei Gleichungen für  $C_1$  und  $C_2$ . Durch Ableitung von (2.110) erhalten wir

$$\begin{aligned} x'(t) &= -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t \\ &\quad + C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t, \end{aligned} \quad (2.111)$$

und wählen die erste Gleichung wie folgt:

$$C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0. \quad (2.112)$$

Die Motivation für (2.112) ist folgende. Betrachten wir wieder das entsprechende Normal-system

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

mit der unbekanntenen Vektorfunktion  $\mathbf{x} = (x, x')$ . Das homogene System hat zwei unabhängige Lösungen  $\begin{pmatrix} \cos t \\ (\cos t)' \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \sin t \\ (\sin t)' \end{pmatrix}$ , die von den Lösungen  $x_1(t) = \cos t$  und  $x_2(t) = \sin t$  der DGL  $x'' + x = 0$  entstehen. Deshalb ist der Lösungsansatz für (2.113) wie folgt:

$$\mathbf{x}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ (\cos t)' \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ (\sin t)' \end{pmatrix},$$

deren Komponenten somit sind

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\ x'(t) &= C_1(t) (\cos t)' + C_2(t) (\sin t)'. \end{aligned}$$

Ableiten die erste Zeile und Subtrahieren die zweite Zeile ergibt (2.112).

Ableiten von der ersten Zeile von (2.111) ergibt

$$\begin{aligned} x'' &= -C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ &\quad - C_1' \sin t + C_2' \cos t, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$x'' + x = -C_1' \sin t + C_2' \cos t.$$

Bemerken Sie, dass alle Terme mit  $C_1$  und  $C_2$  sich herauskürzen lassen. Somit erhalten wir die zweite Gleichung für  $C_1'$  und  $C_2'$ :

$$-C_1' \sin t + C_2' \cos t = f(t).$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = f(t) \end{cases}$$

ergibt

$$C_1' = -f(t) \sin t, \quad C_2' = f(t) \cos t$$

und somit

$$C_1 = -\int f(t) \sin t dt, \quad C_2 = \int f(t) \cos t dt.$$

Einsetzen in (2.110) ergibt (2.108).

## 2.12 Wronski-Determinante und Liouvillesche Formel

Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ .

**Definition.** Sei  $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$  eine Folge von  $n$  Vektorfunktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Man definiert die *Wronski-Determinante*  $W(t)$  von der Folge  $\{x_k\}$  wie folgt:

$$W(t) = \det(x_1(t) \mid x_2(t) \mid \dots \mid x_n(t)),$$

wobei die Matrix auf der rechten Seite aus den Spaltenvektoren  $x_1, \dots, x_n$  besteht.

Somit ist  $W(t)$  die Determinante von der  $n \times n$  Matrix. Man schreibt auch  $W_{x_1, \dots, x_n}(t)$  wenn die Abhängigkeit von  $x_1, \dots, x_n$  explizit gezeigt werden soll.

**Definition.** Sei  $\{x_k\}_{k=1}^n$  eine Folge von  $n$  Skalarfunktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $(n-1)$ -fach differenzierbar auf  $I$  sind. Man definiert die Wronski-Determinante  $W(t)$  von der Folge  $\{x_k\}$  wie folgt:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

**Satz 2.17** (Liouvillesche Formel)

(a) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen des Normalsystems  $x' = A(t)x$ , wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig auf einem Intervall  $I$  ist. Dann erfüllt die Wronski-Determinante  $W(t)$  dieser Folge die Identität

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{Spur } A(\tau) d\tau \right), \quad (2.114)$$

für alle  $t, t_0 \in I$ .

**Bemerkung.** Wir erinnern uns daran, dass die Spur der Matrix  $A$  gleich die Summe der Diagonalelementen dieser Matrix ist.

(b) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen der skalaren DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0,$$

wobei  $a_k(t)$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Dann erfüllt die Wronski-Determinante  $W(t)$  dieser Folge die Identität

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau\right). \quad (2.115)$$

**Beweis.** (a) Bezeichnen wir mit  $x_{ij}$  die  $i$ -te Komponente von  $x_j$  und betrachten die Matrix

$$X = (x_1 | x_2 | \dots | x_n) = (x_{ij}),$$

wobei  $i$  der Zeilenindex und  $j$  der Spaltenindex ist. Bezeichnen wir mit  $z_i$  die  $i$ -te Zeile von  $X$ , d.h.

$$z_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}),$$

und mit  $z_{ij}$  die  $j$ -te Komponente von  $z_i$ , d.h.  $z_{ij} = x_{ij}$ . Insbesondere haben wir

$$W(t) = \det X = \det \begin{pmatrix} \boxed{z_1} \\ \boxed{z_2} \\ \vdots \\ \boxed{z_n} \end{pmatrix} = \det(z_{ij}).$$

**Behauptung.** Die folgende Identität gilt für alle  $t \in I$ :

$$W'(t) = \det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z'_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}. \quad (2.116)$$

Für den Beweis benutzen wir die folgende Verallgemeinerung der Produktregel: seien  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$(f_1 \dots f_n)' = f'_1 f_2 \dots f_n + f_1 f'_2 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f'_n, \quad (2.117)$$

die man durch Induktion nach  $n$  beweist. Ferner benutzen wir die Leibniz-Formel für Determinante:

$$W(t) = \det X = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) z_{1\pi(1)} z_{2\pi(2)} \dots z_{n\pi(n)}, \quad (2.118)$$

wobei  $S_n$  die Menge von allen Permutationen von Elementen  $\{1, \dots, n\}$  ist und  $\operatorname{sgn}(\pi)$  das Signum der Permutation  $\pi$  bezeichnet, d.h.  $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$  falls  $\pi$  gerade ist, und  $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$  falls  $\pi$  ungerade ist. Ableiten von (2.118) mit Hilfe von (2.117) ergibt

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) z'_{1\pi(1)} z_{2\pi(2)} \dots z_{n\pi(n)} \\ &+ \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) z_{1\pi(1)} z'_{2\pi(2)} \dots z_{n\pi(n)} \\ &+ \dots + \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) z_{1\pi(1)} z_{2\pi(2)} \dots z'_{n\pi(n)}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Die erste Summe in (2.119) sieht genauso aus, wie die Summe in (2.118), abgesehen davon, dass die Elemente  $x_{1j}$  der ersten Zeile durch ihre Ableitungen ersetzt werden. Deshalb ist die erste Summe in (2.119) gleich

$$\det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

und das Gleiche gilt für alle andere Summen, woraus (2.116) folgt.

Da  $x_{ij} = z_{ij}$  die  $j$ -te Komponente von  $z_i$  und gleichzeitig die  $i$ -te Komponente von  $x_j$  ist und  $x'_j = Ax_j$ , so erhalten wir

$$(z'_i)_j = x'_{ij} = (x_j)'_i = (Ax_j)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}x_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}z_{kj} = \left( \sum_{k=1}^n A_{ik}z_k \right)_j, \quad (2.120)$$

wobei wir benutzt haben, dass die Koeffizienten  $A_{ik}$  von  $j$  nicht abhängen. Offensichtlich ergibt (2.120) die Gleichung

$$z'_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}z_k.$$

Z.B., es gilt

$$z'_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + \dots + A_{1n}z_n,$$

woraus folgt durch die Linearität der Determinante, dass

$$\det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + A_{12} \det \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \dots + A_{1n} \det \begin{pmatrix} z_n \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Bemerken wir, dass alle Determinanten auf der rechten Seite verschwinden, außer der ersten Determinante, da sie die gleichen Zeilen haben. Somit erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} W(t).$$

Analog berechnen wir die anderen Terme in (2.116) und erhalten

$$\begin{aligned} W'(t) &= (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) W(t) \\ &= (\text{Spur } A) W(t), \end{aligned} \quad (2.121)$$

d.h.  $W(t)$  löst eine lineare DGL 1er Ordnung. Gilt  $W(t) = 0$  für einen Wert von  $t$ , dann gilt  $W(t) \equiv 0$  für alle  $t$  nach Eindeutigkeit von Lösungen von Satz 2.1. In diesem Fall ist die Identität (2.114) trivial. Gilt  $W(t) \neq 0$  für alle  $t$ , dann lösen wir

die trennbare DGL (2.121) indem wir durch  $W(t)$  dividieren und nach  $t$  integrieren. Es folgt, dass<sup>6</sup>

$$\ln \frac{W(t)}{W(t_0)} = \int_{t_0}^t \text{Spur } A(\tau) d\tau,$$

was äquivalent zu (2.114) ist.

(b) Die skalare DGL ist äquivalent zum Normalsystem  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Da  $W_{x_1, \dots, x_n} = W_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n}$  und  $\text{Spur } A = -a_1$ , (2.115) folgt aus (2.114). ■

Im Fall von skalaren DGLen 2-ter Ordnung

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

hilft die Liouvillesche Formel eine allgemeine Lösung zu bestimmen, falls eine spezielle Lösung gegeben ist. In der Tat, seien  $x_1(t)$  eine spezielle Lösung, die nie verschwindet, und  $x(t)$  eine andere Lösung. Dann nach (2.115) haben wir

$$W_{x_1, x}(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x \\ x_1' & x' \end{pmatrix} = C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right),$$

und somit

$$x_1 x' - x x_1' = C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right).$$

Da

$$\frac{x_1 x' - x x_1'}{x_1^2} = \left( \frac{x}{x_1} \right)',$$

Dividieren durch  $x_1^2$  ergibt

$$\left( \frac{x}{x_1} \right)' = \frac{C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right)}{x_1^2}. \quad (2.122)$$

Somit kann die allgemeine Lösung  $x(t)$  durch Integration bestimmt werden.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' - 2(1 + \tan^2 t)x = 0.$$

Diese DGL hat eine Lösung  $x_1(t) = \tan t$ , dass aus der Identitäten

$$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$$

<sup>6</sup>Wir betonen, dass  $W(t)$  und  $W(t_0)$  das gleiche Vorzeichen haben und somit ist ihr Verhältnis positive.

und

$$\frac{d^2}{dt^2} \tan t = 2 \tan t (\tan^2 t + 1)$$

folgt. Somit erhalten wir aus (2.122) mit  $a_1 = 0$

$$\left( \frac{x}{\tan t} \right)' = \frac{C}{\tan^2 t},$$

woraus folgt<sup>7</sup>

$$x = C \tan t \int \frac{dt}{\tan^2 t} = C \tan t (-t - \cot t + C_1).$$

Die Antwort kann auch in der Form

$$x = c_1 \tan t + c_2 (t \tan t + 1)$$

geschrieben werden, wobei  $c_1 = CC_1$  und  $c_2 = -C$ .

## 2.13 Lösungsmethoden für homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Betrachten wir ein Normalsystem

$$x' = Ax$$

wobei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ein konstanter Operator (bzw eine  $n \times n$  Matrix) ist und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine unbekannte Funktion. Nach Satz 2.13 ist die allgemeine Lösung dieses Systems durch Linearkombination von  $n$  unabhängige Lösungen gegeben. In diesem Abschnitt entwickeln wir die Methode für Bestimmung solcher Lösungen.

### 2.13.1 Spezieller Fall

Zunächst benutzen den Exponentialansatz für Lösung:  $x = e^{\lambda t} v$  wobei  $v$  ein Nicht-Null-Vektor aus  $\mathbb{C}^n$  ist und  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Konstante. Einsetzen diesen Ansatz in DGL  $x' = Ax$  ergibt

$$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av,$$

also  $Av = \lambda v$ . Erinnern wir uns daran, dass ein Nicht-Null-Vektor  $v$ , der die Gleichung  $Av = \lambda v$  erfüllt, als *Eigenvektor* von  $A$  bezeichnet wird. Der entsprechende Wert von  $\lambda$  heißt der *Eigenwert*. Somit gilt folgendes.

**Behauptung.** Die Funktion  $x(t) = e^{\lambda t} v$  ist eine Lösung des Normalsystems  $x' = Ax$  genau dann, wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  ist.

---

<sup>7</sup>Wir haben

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\tan^2 t} &= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\cot t - t + C_1. \end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $A$  genau dann ist, wenn

$$\det(A - \lambda \text{id}) = 0, \quad (2.123)$$

wobei  $\text{id}$  den Identitätsoperator in  $\mathbb{C}^n$  bezeichnet. Diese Gleichung heißt die *charakteristische Gleichung* des Operators  $A$ . Sie kann benutzt werden, um die Eigenwerte von  $A$  zu bestimmen. Die Funktion

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda \text{id})$$

ist ein Polynom von  $\lambda$  von Grad  $n$ , das *charakteristisches Polynom* von  $A$  heißt. Deshalb sind die Eigenwerte von  $A$  genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda)$ .

Ist ein Eigenwert  $\lambda$  schon bekannt, so kann ein Eigenvektor aus der Gleichung

$$(A - \lambda \text{id})v = 0 \quad (2.124)$$

bestimmt werden. Wir betonen, dass Eigenvektor auf jeden Fall nicht eindeutig ist, da mit jedem Eigenvektor  $v$  auch alle seine Vielfachen Eigenvektoren sind. Die Menge von allen Lösungen von (2.124) ist ein Unterraum, der ein *Eigenraum* heißt; bezeichnen wir ihn mit  $E_\lambda$ . Ist  $\lambda$  ein Eigenwert, dann gilt  $\dim E_\lambda \geq 1$ . Man erhält genau  $k = \dim E_\lambda$  unabhängige Lösungen in der Form  $x(t) = e^{\lambda t}v$ , indem man  $k$  unabhängige Vektoren  $v$  in  $E_\lambda$  wählt.

**Satz 2.18** *Hat ein Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so stellen die folgenden  $n$  Funktionen*

$$e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2, \dots, e^{\lambda_n t}v_n \quad (2.125)$$

*$n$  linear unabhängige Lösungen von  $x' = Ax$  dar. Somit ist die allgemeine Lösung dieses Normalsystems durch die Identität*

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} v_k \quad (2.126)$$

*gegeben, wobei  $C_1, \dots, C_n$  beliebige komplexe Konstanten sind.*

**Beweis.** Wir haben schon gesehen, dass jede Funktion  $e^{\lambda_k t}v_k$  eine Lösung ist. Da die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sind, so sind auch die Funktionen  $\{e^{\lambda_k t}v_k\}_{k=1}^n$  linear unabhängig und somit stellen eine Basis im Raum von Lösungen dar, was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Folgendes ist aus linearer Algebra bekannt: hat der Operator  $A$   $n$  verschiedenen Eigenwerte, so sind deren Eigenvektoren unbedingt unabhängig. In diesem Fall ist Satz 2.18 verwendbar. Noch ein Fall, wenn die Voraussetzungen von Satz 2.18 erfüllt sind, ist wenn der Operator  $A$  durch eine symmetrische reelle Matrix dargestellt wird. In diesem Fall existiert immer eine Orthogonalbasis von Eigenvektoren.

**Korollar 2.19** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und nehmen wir an, dass  $A$   $n$  verschiedene Eigenwerte hat. Ist  $\lambda$  ein nicht-reeller Eigenwert von  $A$  mit dem Eigenvektor  $v$ , so ist  $\bar{\lambda}$  auch ein Eigenwert mit dem Eigenvektor  $\bar{v}$ , und die Funktionen  $e^{\lambda t}v, e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$  in der Identität (2.126) können durch die reellwertigen Funktionen  $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}v), \operatorname{Im}(e^{\lambda t}v)$  ersetzt werden. Nach Ersetzung in (2.126) von allen Paaren  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda}t}$  mit nicht-reellen Eigenwerten  $\lambda$  erhält man die allgemeine reelle Lösung mit beliebigen reellen Konstanten  $C_1, \dots, C_n$ .

**Beweis.** Gilt  $Av = \lambda v$ , so gilt durch die komplexe Konjugation auch

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v},$$

wobei benutzt man, dass die Koeffizienten der Matrix  $A$  reell sind. Somit ist  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $A$  mit dem Eigenvektor  $\bar{v}$ . Die Werte  $\lambda$  und  $\bar{\lambda}$  sind verschiedene Elemente der Folge  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , z.B.  $\lambda = \lambda_k$  und  $\bar{\lambda} = \lambda_m$ . Da alle Eigenwerte einfach sind, es gilt  $v = \operatorname{const} v_k$  und  $\bar{v} = \operatorname{const} v_m$ . Deshalb können die Funktionen  $e^{\lambda_k t}v_k$  und  $e^{\lambda_m t}v_m$  in (2.126) durch die Funktionen  $u(t) = e^{\lambda t}v$  und  $\bar{u}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$  ersetzt werden. Da

$$u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u, \quad \bar{u} = \operatorname{Re} u - i \operatorname{Im} u$$

und somit

$$\operatorname{Re} u = \frac{u + \bar{u}}{2}, \quad \operatorname{Im} u = \frac{u - \bar{u}}{2i},$$

so entstehen die Paare  $u, \bar{u}$  und  $\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u$  auseinander durch Lineartransformationen. Daraus folgt, dass die linearen Hüllen der beiden Paaren gleich sind, also

$$\operatorname{span}(u, \bar{u}) = \operatorname{span}(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u),$$

und deshalb sind diese Paare in jeder Basis austauschbar. ■

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

und schreiben es in der Vektorform um:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 - 1 = 0$ , und die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Für den Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  erhalten wir aus (2.124) die folgende Gleichung für den Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was nur eine unabhängige Gleichung  $a - b = 0$  liefert. Wählen  $a = 1$  ergibt  $b = 1$  und somit den Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog für den Eigenwert  $\lambda_2 = -1$  erhalten wir die folgende Gleichung für  $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was äquivalent zu  $a + b = 0$  ist. Daraus folgt

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da  $v_1$  und  $v_2$  unabhängig sind, erhalten wir die allgemeine Lösung in der Form

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{pmatrix},$$

also

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}.$$

Die Matrix des Systems ist  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , und das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 + 1 = 0$ , woraus folgt, dass die Eigenwerte  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$  sind. Für den Eigenwert  $\lambda_1 = i$  erhalten wir die folgende Gleichung für den Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

die ist äquivalent zu  $ia + b = 0$ . Die Wahl  $a = i$  ergibt  $b = 1$  und

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die entsprechende Lösung

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}.$$

Die zweite komplexwertige Lösung braucht nicht bestimmt werden, da wir mit Hilfe von Korollar 2.19 zwei unabhängige reelle Lösungen erhalten:

$$\operatorname{Re} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ und } \operatorname{Im} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

und somit auch die allgemeine reelle Lösung

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \operatorname{Re} \mathbf{x}_1 + C_2 \operatorname{Im} \mathbf{x}_1 = C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{pmatrix}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0. \end{cases}$$

Dieses System lässt sich sehr einfach lösen wie folgt:  $y = C_1$  und  $x = C_1 t + C_2$ , so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allerdings kann diese Antwort mit Hilfe von Satz 2.18 nicht erhalten werden. In der Tat ist die Matrix des Systems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2,$$

und die charakteristische Gleichung  $P(\lambda) = 0$  liefert nur einen Eigenwert  $\lambda = 0$ . Den Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  von  $\lambda = 0$  wird aus der folgenden Gleichung bestimmt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

woraus folgt  $b = 0$ . Deshalb erhalten wir nur einen Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und somit nur eine Lösung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . In diesem Fall existiert keine Basis aus Eigenvektoren, und man braucht eine andere Methode.

### 2.13.2 Exponentialfunktion von Operatoren

Wir erinnern und daran, dass eine skalare DGL  $x' = Ax$ , wobei  $A$  eine Konstante ist, hat die allgemeine Lösung  $x(t) = Ce^{At}$ . In diesem Abschnitt definieren wir die Exponentialfunktion  $e^A$  für lineare Operatoren  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und benutzen sie um das Normalsystem  $x' = Ax$  zu lösen.

**Definition.** Für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definieren wir einen Operator  $e^A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  durch die Identität

$$e^A = \text{id} + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (2.127)$$

Man schreibt auch  $\exp(A) = e^A$ .

Um diese Definition zu begründen, müssen wir jedoch überprüfen, dass die Exponentialreihe (2.127) konvergiert. Da alle Potenzen  $A^k$  Elementen von  $\mathbb{C}^{n \times n}$  sind, versteht man die Konvergenz der Reihe (2.127) im Sinn von der Normtopologie von  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

**Satz 2.20** (a) Die Exponentialreihe konvergiert für alle  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

(b) Die allgemeine Lösung des Normalsystems  $x' = Ax$  ist durch die Identität  $x = e^{tA}v$  gegeben, wobei  $v \in \mathbb{C}^n$  ein beliebiger Vektor ist.

**Beweis.** (Vgl. Aufgabe 35). Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = v, \end{cases} \quad (2.128)$$

wobei  $v \in \mathbb{C}$ . Nach Satz 2.1 existiert eine eindeutige Lösung  $x(t)$  auf  $\mathbb{R}$ , und

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t),$$

wobei die Folge  $\{x_k(t)\}$  die Picarditeration ist, die durch die Regeln

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv v, \\ x_{k+1}(t) &= v + \int_0^t Ax_k(s) ds \end{aligned}$$

gegeben ist. Nach Induktion erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v + tAv \\ x_2(t) &= v + tAv + \frac{t^2}{2}A^2v \\ &\dots \\ x_k(t) &= v + tAv + \frac{t^2}{2}A^2v + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k v \\ &\dots \end{aligned}$$

so dass

$$x_k(t) = \left( \text{id} + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \dots + \frac{(tA)^k}{k!} \right) v. \quad (2.129)$$

Da die linke Seite einen Grenzwert für  $k \rightarrow \infty$  hat, konvergiert auch die rechte Seite. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$  (vgl. Abschnitt 2.1), insbesondere für  $t = 1$  die Konvergenz von (2.127), so dass  $e^A$  wohldefiniert ist. In der Identität (2.129) lassen wir  $k \rightarrow \infty$  und erhalten

$$x(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right) v = e^{tA}v. \quad (2.130)$$

Somit ist die Funktion  $t \mapsto e^{tA}v$  ein Lösung von Anfangswertproblem (2.128). Da jede Lösung  $x(t)$  durch den Anfangswert  $v = x(0)$  eindeutig definiert ist, stellt  $e^{tA}v$  die allgemeine Lösung dar. ■

**Korollar 2.21** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

- (a) Die Matrix  $e^{tA}$  ist eine Fundamentalmatrix des Normalsystems  $x' = Ax$ .  
 (b) Die Funktion  $X(t) = e^{tA}$  erfüllt die DGL  $X' = AX$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Die Funktion  $x = x(t)$  nimmt die Werte wie üblich in  $\mathbb{C}^n$  an, während  $X(t)$  eine Funktion mit Werten in  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ist. Da die Produkt  $AX$  von zwei Operatoren sich als ein linearer Operator  $X \mapsto AX$  im Vektorraum  $\mathbb{C}^{n \times n}$  betrachten lässt, so ist die Gleichung  $X' = AX$  eine lineare DGL für  $\mathbb{C}^{n \times n}$ -wertige Funktion  $X$ .

**Beweis.** (a) Sei  $\{v_k\}_{k=1}^n$  die Standardbasis in  $\mathbb{C}^n$ . Betrachten wir die Lösungen  $x_1(t) = e^{tA}v_1, \dots, x_n(t) = e^{tA}v_n$  und bemerken folgendes:

1. Die Lösungen  $x_1, \dots, x_n$  sind unabhängig, da ihre Werte  $x_1(0), \dots, x_n(0)$  unabhängig sind.

2. Der Spaltenvektor  $x_k(t) = e^{tA}v_k$  ist die  $k$ -te Spalte der Matrix  $e^{tA}$  in der Standardbasis, da  $v_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  nur ein 1 auf Platz  $k$  hat.

Somit besteht die Matrix  $e^{tA}$  aus den Spalten  $x_k(t)$ , die  $n$  unabhängige Lösungen darstellen. Nach Definition ist  $e^{tA}$  eine Fundamentalmatrix des Systems  $x' = Ax$ .

(b) Die Fundamentalmatrix  $X(t)$  erfüllt immer die DGL  $X' = AX$ , weil jeder Spaltenvektor  $x_k$  von  $X(t)$  die Gleichung  $x'_k = Ax_k$  erfüllt. ■

**Bemerkung.** Die Konvergenz von Exponentialreihe (2.127) kann auch direkt bewiesen werden durch die Abschätzung

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!},$$

die ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty,$$

und woraus die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  folgt. Dann kann man zeigen, dass die Funktion  $t \mapsto e^{tA}$  differenzierbar ist und es gilt

$$(e^{tA})' = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(tA)^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A e^{tA},$$

indem man sorgfältig die Konvergenz der entsprechenden Reihen überprüft. Daraus folgen alle andere Aussagen von Satz 2.20 und Korollar 2.21.

**Beispiel.** Sei  $A$  eine Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für jedes  $k = 0, 1, \dots$

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

und

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

**Beispiel.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $A^2 = 0$  und somit  $A^k = 0$  für alle  $k \geq 2$ , erhalten wir

$$e^{tA} = \text{id} + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die allgemeine Lösung von  $x' = Ax$  wie folgt:

$$x(t) = e^{tA}v = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $C_1, C_2$  die Komponenten  $v$  und deswegen beliebige Konstanten sind.

Mit Hilfe von Satz 2.20 lässt sich die Lösung von System  $x' = Ax$  auf Bestimmung von  $e^{tA}$  zurückführen. Die Methoden für Bestimmung von  $e^A$  für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  besprechen wir in den nächsten Abschnitten.

### 2.13.3 Eine Eigenschaft der Exponentialfunktion

**Definition.** Man sagt, dass die Operatoren (Matrizen)  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  *kommutieren* (vertauschen) wenn  $AB = BA$  gilt.

Allgemeine kommutieren die Operatoren nicht. Sollen  $A$  und  $B$  kommutieren, dann gelten für  $A$  und  $B$  verschiedene Identitäten, wie für Zahlen, z.B., die binomische Formel

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2. \quad (2.131)$$

In der Tat gilt für beliebige Operatoren  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2,$$

woraus (2.131) folgt genau dann, wenn  $AB = BA$ .

**Lemma 2.22** *Kommutieren die Operatoren  $A$  und  $B$ , so gilt die Identität*

$$e^{A+B} = e^A e^B. \quad (2.132)$$

**Beweis.** Der Beweis besteht aus einer Folge von Behauptungen.

**Behauptung 1.** *Kommutiert jeder von Operatoren  $A, C$  mit  $B$ , so kommutiert auch  $AC$  mit  $B$ .*

In der Tat haben wir mit Hilfe des Assoziativgesetzes

$$(AC)B = A(CB) = A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC).$$

Daraus folgt, dass  $A^k$  und  $B$  für jedes  $k = 0, 1, \dots$  kommutieren, vorausgesetzt, dass  $A$  und  $B$  kommutieren. Der Induktionsanfang für  $k = 0$  ist klar. Der Induktionsschritt von  $k - 1$  nach  $k$  geht wie folgt. Da  $A, A^{k-1}$  mit  $B$  kommutieren, so kommutiert auch  $AA^{k-1} = A^k$  mit  $B$ .

**Behauptung 2.** *Kommutieren  $A$  und  $B$ , so kommutieren auch  $e^A$  und  $B$ .*

Da  $A^k$  und  $B$  kommutieren, wir erhalten

$$\begin{aligned} e^A B &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B}{k!} \right) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B A^k}{k!} \right) = B \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) = B e^A. \end{aligned}$$

Wir haben die folgenden Identitäten benutzt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) B = \sum_{k=0}^{\infty} A_k B$$

und

$$B \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} B A_k,$$

die für alle Operatoren  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und für alle konvergenten Reihen  $\sum_k A_k$  von Operatoren  $A_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gelten. In der Tat ist die (linke bzw rechte) Multiplikation mit  $B$  ein linearer und somit stetiger (vgl. Abschnitt 2.1) Operator in  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , woraus die beiden Identitäten folgen.

**Behauptung 3.** *Sind  $A(t)$  und  $B(t)$  differenzierbare Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , so gilt*

$$(A(t) B(t))' = A'(t) B(t) + A(t) B'(t). \quad (2.133)$$

In der Tat haben wir für jede Komponente

$$\begin{aligned} \left( (AB)_{ij} \right)' &= \left( \sum_k A_{ik} B_{kj} \right)' = \sum_k A'_{ik} B_{kj} + \sum_k A_{ik} B'_{kj} \\ &= (A'B)_{ij} + (AB')_{ij} = (A'B + AB')_{ij}, \end{aligned}$$

woraus (2.133) folgt.

Jetzt können wir (2.132) beweisen. Betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ F(t) &= e^{tA} e^{tB} \end{aligned}$$

Ableiten die Funktion  $F$  mit Hilfe von (2.133) und Korollar 2.21 und Anwendung der Behauptungen 2 ergeben

$$F'(t) = (e^{tA})' e^{tB} + e^{tA} (e^{tB})' = A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = A e^{tA} e^{tB} + B e^{tA} e^{tB} = (A + B) F(t).$$

Andererseits, nach Korollar 2.21 erfüllt die Funktion

$$G(t) = e^{t(A+B)}$$

dieselbe Gleichung

$$G' = (A + B)G.$$

Da  $G(0) = F(0) = \text{id}$ , so sehen wir, dass die beiden Funktionen  $F(t)$  und  $G(t)$  das gleiche Anfangswertproblem lösen. Nach Eindeutigkeit der Lösung von Satz 2.1 beschließen wir, dass  $F(t) \equiv G(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Insbesondere gilt  $F(1) = G(1)$ , also  $e^A e^B = e^{A+B}$ , was zu beweisen war. ■

**Alternativer Beweis.** Hier reißen wir einen direkten algebraischen Beweis der Identität  $e^{A+B} = e^A e^B$  um. Zunächst beweist man durch Induktion nach  $n$  die binomische Formel

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \quad (2.134)$$

(vorausgesetzt, dass  $A$  und  $B$  kommutieren) genauso, wie die klassische binomische Formel für Zahlen. Dann erhält man

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Andererseits benutzen wir die Cauchy-Produktformel (Cauchy-Faltung), die besagt, dass für absolut konvergente Reihen (auch von Operatoren) die folgende Identität gilt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} B_l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} A_k B_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}.$$

Daraus folgt

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!} = e^{A+B},$$

was zu beweisen war.

**Bemerkung.** Mit Hilfe von DGLen kann man auch andere interessante Eigenschaften der Exponentialfunktion beweisen, z.B. die Identität

$$\det e^A = e^{\text{Spur } A}$$

(vgl. die Übungen).

### 2.13.4 Exponentialfunktion von einem Jordanblock

Hier bestimmen wir  $e^A$  wenn  $A$  ein Jordanblock ist.

**Definition.** Eine  $n \times n$  Matrix  $J$  heißt ein *Jordanblock* wenn sie eine Bidiagonalmatrix mit der folgenden Form ist

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.135)$$

wobei eine komplexe Zahl  $\lambda$  auf der Hauptdiagonale steht, 1 auf der ersten oberen Nebendiagonale steht, und alle anderen Elementen 0 sind. Die Zahl  $n$  heißt die Dimension von Jordanblock  $J$  und  $\lambda$  heißt der Eigenwert von  $J$  (offensichtlich,  $\lambda$  ist ein einziger Eigenwert von Matrix  $J$ ).

Wir bemerken, dass  $J = \lambda \text{id} + N$  wobei

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.136)$$

auch ein Jordanblock mit Eigenwert 0 ist. Ein Jordanblock mit Eigenwert 0 heißt *nilpotenter Jordanblock*.

Da die Matrizen  $\lambda \text{id}$  und  $N$  kommutieren (weil  $\text{id}$  mit allen Matrizen kommutiert), erhalten wir nach Lemma 2.22

$$e^{tJ} = e^{t\lambda \text{id}} e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN}. \quad (2.137)$$

Um  $e^{tN}$  zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Potenzen  $N^2, N^3$ , usw. Die Elementen von Matrix  $N$  sind folgende:

$$N_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{fall } j = i + 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $i$  der Zeilenindex und  $j$  der Spaltenindex sind. Daraus folgt

$$(N^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n N_{ik} N_{kj} = \sum_{\substack{k=i+1 \\ j=k+1}} N_{ik} N_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i + 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Elementen mit dem Wert 1 die 2-te obere Nebendiagonale bilden. Durch Induktion erhalten wir, dass

$$N^k = \begin{pmatrix} & & & \overset{k}{\searrow} & & \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Elementen mit dem Wert 1 die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden, vorausgesetzt  $k < n$ , und  $N^k = 0$  falls  $k \geq n$ .<sup>8</sup> Daraus folgt

$$e^{tN} = \text{id} + \frac{t}{1!}N + \frac{t^2}{2!}N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.138)$$

wobei die Elementen mit dem Wert  $\frac{t^k}{k!}$  die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden,  $k \geq 0$ . Kombinieren (2.138) und (2.137) ergibt folgendes.

**Lemma 2.23** Sei  $J$  ein Jordanblock (2.135). Dann gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} \\ 0 & & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}, \quad (2.139)$$

wobei die Elementen mit dem Wert  $\frac{t^k}{k!}e^{t\lambda}$  die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden,  $k = 0, \dots, n-1$ .

Nach Korollar 2.21 stellen die Spalten der Matrix  $e^{tJ}$  unabhängige Lösungen des Normalsystems  $x' = Jx$  dar. Somit erhalten wir die folgenden  $n$  unabhängigen Lösungen:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ \dots \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ \frac{t}{1!}e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

### 2.13.5 Blockdiagonalmatrizen

**Definition.** Eine Matrix  $A$  heißt *blockdiagonal* wenn  $A$  die folgende Form hat:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{A_{r-1}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

<sup>8</sup>Jede Matrix  $A$  mit der Eigenschaft  $A^k = 0$  mit einer natürlichen Zahl  $k$  heißt *nilpotent*. Deshalb ist  $N$  eine nilpotente Matrix, was mit dem Begriff "nilpotenter Jordanblock" übereinstimmt.

wobei  $A_1, \dots, A_r$  die Blöcke von  $A$ , also quadratische Matrizen, sind (alle Elementen von  $A$  außerhalb der Blöcke sind 0). In diesem Fall schreiben wir auch

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r).$$

**Lemma 2.24** *Die folgende Identität gilt:*

$$e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_r)} = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_r}). \quad (2.140)$$

Man kann die Identität (2.140) ausführlicher umschreiben wie folgt:

$$e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{e^{A_2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{e^{A_{r-1}}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{e^{A_r}} \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Offensichtlich haben wir

$$A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k) = \text{diag}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!}, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_r^k}{k!}\right) \\ &= \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_r}). \end{aligned}$$

■

**Definition.** Eine Matrix  $A$  heißt *Jordan-Normalform*, wenn  $A$  eine Blockdiagonalmatrix ist und alle Blöcke von  $A$  Jordanblöcke sind, also

$$A = \text{diag}(J_1, \dots, J_r) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{J_{r-1}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix},$$

wobei  $J_i$  Jordanblöcke sind.

Nach Lemma 2.24 haben wir für eine Jordan-Normalform  $A$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_r}),$$

wobei die Blöcke  $e^{tJ_k}$  mit Hilfe von Lemma 2.23 bestimmt werden können. Mit Satz 2.20 (bzw Korollar 2.21) erhalten wir explizit die allgemeine Lösung von  $x' = Ax$ .

**Beispiel.** Lösen wir das Normalsystem  $x' = Ax$  wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $A$  eine Jordan-Normalform mit Jordanblöcke

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.23 erhalten wir

$$e^{tJ_1} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{tJ_2} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

und nach Lemma 2.24,

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, e^{tJ_2}) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 2.21 liefern die Spalten der Matrix  $e^{tA}$  unabhängige Lösungen, und die allgemeine Lösung ist ihre Linearkombination:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 te^t \\ C_2 e^t \\ C_3 e^{2t} + C_4 te^{2t} \\ C_4 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.13.6 Anwendung von Jordan-Normalform von Operatoren

Sei die Folge  $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis in  $\mathbb{C}^n$ . Für jeden Vector  $x \in \mathbb{C}^n$  bezeichnen wir mit  $x_j^b$  die Komponenten von  $x$  in der Basis  $b$ , also

$$x = x_1^b b_1 + x_2^b b_2 + \dots + x_n^b b_n = \sum_{j=1}^n x_j^b b_j.$$

Bezeichnen mit  $x^b$  den Spaltenvektor  $(x_1^b, \dots, x_n^b)^T$ , der den Vektor  $x$  in der Basis  $b$  darstellt. Ähnlich definiert man für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine  $n \times n$  Matrix  $A^b$ , die den Operator  $A$  in der Basis  $b$  darstellt, also folgendes gilt für jedes  $x \in \mathbb{C}^n$ :

$$(Ax)^b = A^b x^b, \tag{2.141}$$

wobei der Ausdruck  $A^b x^b$  das Produkt von der  $n \times n$  Matrix  $A^b$  und den Spaltenvektor  $x^b$  ist.

Die Operationen von Addition und Multiplikation über Operatoren stimmen mit dieselben Operatoren über Matrizen überein, d.h.

$$(A + B)^b = A^b + B^b \quad \text{und} \quad (AB)^b = A^b B^b.$$

Daraus folgt, dass auch

$$(e^A)^b = e^{A^b}.$$

Man kann die Identität (2.141) benutzen um die Elementen von  $A^b$  zu bestimmen. Die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  ist gleich

$$A^b \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^b b_j^b = (Ab_j)^b$$

wobei der Wert 1 an der Stelle  $j$  steht. Somit erhalten wir die Regel:

*die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  stimmt mit dem Spaltenvektor  $Ab_j$  in der Basis  $b_1, \dots, b_n$  überein.*

Es folgt, dass

$$A^b = \left( (Ab_1)^b \mid (Ab_2)^b \mid \cdots \mid (Ab_n)^b \right).$$

**Beispiel.** Sei  $A$  ein Operator in  $\mathbb{C}^2$ , der in der Standardbasis  $e = \{e_1, e_2\}$  durch die Matrix

$$A^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Betrachten wir die Basis  $b = \{b_1, b_2\}$  wobei

$$b_1 = e_1 - e_2 \quad \text{und} \quad b_2 = e_1 + e_2,$$

d.h.

$$b_1^e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$(Ab_1)^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_1^e$$

und

$$(Ab_2)^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_2^e.$$

Daraus folgt

$$Ab_1 = -b_1 \quad \text{und} \quad Ab_2 = b_2$$

und somit

$$(Ab_1)^b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (Ab_2)^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A^b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir den Operator  $e^{tA}$ , zunächst in der basis  $b$  und danach in der Basis  $e$ . Da  $A^b$  eine Diagonalmatrix ist, erhalten wir

$$(e^{tA})^b = e^{tA^b} = \exp \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir  $(e^{tA})^e$ . Da  $(e_1)^b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  so erhalten wir

$$(e^{tA}e_1)^b = (e^{tA})^b e_1^b = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} e^{tA}e_1 &= \frac{e^{-t}}{2}b_1 + \frac{e^t}{2}b_2 \\ &= \frac{e^{-t}}{2}(e_1 - e_2) + \frac{e^t}{2}(e_1 + e_2) \\ &= (\cosh t)e_1 + (\sinh t)e_2 \end{aligned}$$

und

$$(e^{tA}e_1)^e = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir  $(e_2)^b = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ,

$$(e^{tA}e_2)^b = (e^{tA})^b e_2^b = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

und

$$\begin{aligned} e^{tA}e_2 &= -\frac{e^{-t}}{2}b_1 + \frac{e^t}{2}b_2 \\ &= (\sinh t)e_1 + (\cosh t)e_2, \\ (e^{tA}e_2)^e &= \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir

$$(e^{tA})^e = ((e^{tA}e_1)^e \mid (e^{tA}e_2)^e) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Folglich ist diese Matrix die Fundamentalmatrix des Normalsystems

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$





was zu beweisen war. ■

Um Satz 2.25 anwenden zu können, muss man für gegebene Matrix die Jordan-Normalform und die Jordan-Basis bestimmen. Die Jordan-Normalform kann man häufig bestimmen, indem man die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von Eigenwerten vergleicht. Sei  $\lambda$  ein Eigenwert des Operators  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Bezeichnen wir mit  $m$  die *algebraische* Vielfachheit von  $\lambda$ , d.h. die Vielfachheit von  $\lambda$  als einer Nullstelle des charakteristischen Polynoms<sup>9</sup>  $P(z) = \det(A - z \text{id})$ .

Sei  $b$  die Jordan-Basis von  $A$ . Kommt  $\lambda$  genau  $m'$  mal auf der Hauptdiagonale von  $A^b$  vor, so hat das charakteristische Polynom  $P(z) = \det(A^b - z \text{Id})$  die Form  $P(z) = (z - \lambda)^{m'} Q(z)$ , wobei  $Q$  ein Polynom ohne Nullstelle  $\lambda$  ist. Daraus folgt, dass die Vielfachheit von  $\lambda$  bezüglich  $P$  gleich  $m'$  ist, und somit

$$m' = m.$$

Andererseits ist  $m'$  gleich die Summe von den Dimensionen von allen Jordanblöcken von  $A^b$  mit dem Eigenwert  $\lambda$ , woraus die folgende Regel folgt:

$m$  = die Summe von Dimensionen aller Jordanblöcke mit Eigenwert  $\lambda$

Bezeichnen mit  $g$  die *geometrische* Vielfachheit von  $\lambda$ , d.h. die Dimension des Eigenraums von  $\lambda$ :

$$g = \dim \ker(A - \lambda \text{id}),$$

wobei  $\ker B$  bezeichnet den Kern (=Nullraum) des Operators  $B$ . Man kann  $g$  auch definieren als die maximale Anzahl von linear unabhängigen Eigenvektoren von  $\lambda$ . Da jeder Jordanblock genau einen Eigenvektor aus der Jordan-Basis liefert, so erhalten wir, dass

$g$  = die Anzahl von Jordanblöcken mit Eigenwert  $\lambda$ .

Insbesondere gilt  $g \leq m$ , und die Identität  $g = m$  erfolgt genau dann, wenn alle Jordanblöcke mit dem Eigenwert  $\lambda$  Dimension 1 haben.

Betrachten wir einige Beispiele von Anwendungen des Satzes 2.25.

**Beispiel.** Lösen wir das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

---

<sup>9</sup>Um  $P(z)$  zu bestimmen, stellt man den Operator  $A$  in einer Basis  $b$  als eine Matrix  $A^b$  dar, und danach berechnet  $P(z) = \det(A^b - z \text{id})$ . Wir betonen, dass das charakteristische Polynom unabhängig von der Wahl der Basis  $b$  ist. In der Tat, ist  $b'$  eine andere Basis, so wird die Beziehung zwischen die Matrizen  $A^b$  und  $A^{b'}$  durch die Identität  $A^b = CA^{b'}C^{-1}$  gegeben, wobei  $C$  die Transformationsmatrix des Basiswechsels ist. Daraus folgt, dass  $A^b - z \text{id} = C(A^{b'} - z \text{id})C^{-1}$  und somit  $\det(A^b - z \text{id}) = \det C \det(A^{b'} - z \text{id}) \det C^{-1} = \det(A^{b'} - z \text{id})$ .

und der einzige Eigenwert ist  $\lambda_1 = 3$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m_1 = 2$ . Die Gleichung für Eigenvektor  $v$  ist

$$(A - \lambda \text{id})v = 0$$

also für  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was äquivalent zu  $-a + b = 0$ . Die Lösung dieser Lineargleichung ist 1-dimensional, so dass  $g_1 = 1$ . Wählen  $a = 1$  und  $b = 1$  ergibt den Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und alle anderen Eigenvektoren von  $\lambda_1 = 3$  sind seine Vielfachen. Da nur ein Jordanblock mit dem Eigenwert  $\lambda_1 = 3$  existiert, ist die Jordan-Normalform wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 2.25 erhalten wir zwei unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{3t}v_1 \\ x_2(t) &= e^{3t}(tv_1 + v_2), \end{aligned}$$

wobei  $v_2$  die Hauptvektor der Stufe 2 ist, also erfüllt  $v_2$  die Gleichung

$$(A - \lambda \text{id})v_2 = v_1.$$

Für  $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was äquivalent zu  $-a + b = 1$  ist. Wählen  $a = 0$  und  $b = 1$  ergibt

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir zwei unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2t \\ C_1 + C_2(t + 1) \end{pmatrix}.$$

**Beispiel.** Gegeben sei das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 2$  mit  $m_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 1$  mit  $m_2 = 2$ . Die Eigenvektoren von  $\lambda_1$  erfüllen die Gleichung

$$(A - \lambda_1 \text{id})v = 0,$$

also für  $v = (a, b, c)^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

und somit

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ -2a - 2b - c = 0 \\ 2a + b = 0. \end{cases}$$

Die drei Gleichungen sind abhängig (wie man erwartet), aber jedes Paar von Gleichungen ist unabhängig. Deshalb ist die Lösung 1-dimensional, also  $g_1 = 1$ . Wählen  $a = 1$  und lösen die Gleichungen ergibt  $b = -2$ ,  $c = 2$  und somit den Eigenvektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da  $g_1 = m_1 = 1$ , es gibt nur 1 Jordanblock von  $\lambda_1 = 2$ , und er ist 1-dimensional. Deshalb erhalten wir aus (2.143) eine Lösung

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von  $\lambda_2 = 1$  erfüllen die Gleichung

$$(A - \lambda_2 \text{id})v = 0,$$

also für  $v = (a, b, c)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

und somit

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a - b - c = 0 \\ 2a + b + c = 0. \end{cases}$$

Dieses System hat nur eine unabhängige Lösung  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$ , die den Eigenvektor ergibt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb  $g_2 = 1$ , und somit gibt es nur einen Jordanblock mit dem Eigenwert  $\lambda_2 = 1$ , der muss  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sein. Nach Satz 2.25 ergibt dieser Jordanblock zwei Lösungen

$$x_2(t) = e^t v_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$x_3(t) = e^t (tv_1 + v_2),$$

wobei  $v_2$  der zweite Hauptvektor von  $\lambda_2$  ist, also  $v_2$  von der Gleichung

$$(A - \lambda_2 \text{id}) v_2 = v_1$$

bestimmt werden muss. Für  $v_2 = (a, b, c)^T$  erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a - b - c = 1 \\ 2a + b + c = -1. \end{cases}$$

Das System hat die Lösung  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ , die ergibt

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die dritte Lösung der DGL

$$x_3(t) = e^t (tv_1 + v_2) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} - C_3 e^t \\ -2C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t) e^t \\ 2C_1 e^{2t} + (C_3 - C_2 - C_3 t) e^t \end{pmatrix}.$$

**Korollar 2.26** Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert des Operators  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m$  und geometrischen Vielfachheit  $g$ . Dann liefert  $\lambda$  genau  $m$  linear unabhängige Lösungen des Systems  $x' = Ax$  in der Form

$$x(t) = e^{\lambda t} (u_0 + u_1 t + \dots + u_s t^s), \quad (2.144)$$

wobei  $s = m - g$  und  $u_j$  die unbekannten Vektoren aus  $\mathbb{C}^n$  sind, die durch Einsetzen von dem Ansatz (2.144) in die DGL  $x' = Ax$  bestimmt werden können.

Die Menge von allen  $n$  Lösungen, die man mit Hilfe von allen Eigenwerten in der Form (2.144) erhält, ist unabhängig.

**Bemerkung.** In Anwendungen setzt man den Ansatz (2.144) in die DGL  $x' = Ax$  und löst sie bezüglich der unbekanntenen Werte  $u_{ij}$ , die die Komponenten der Vektoren  $u_j$  sind. Die Antwort enthält  $m$  beliebige Konstanten, und die Lösung (2.144) erscheint als eine Linearkombination von  $m$  unabhängigen Lösungen.

**Beweis.** Seien  $p_1, \dots, p_g$  die Dimensionen von den allen Jordanblöcken mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Wir wissen schon, dass

$$\sum_{j=1}^g p_j = m.$$

Deshalb ist die gesamte Anzahl von linear unabhängigen Lösungen, die von Satz 2.25 für den Eigenwert  $\lambda$  geliefert werden, gleich  $m$ . Wir zeigen jetzt, dass alle Lösung von Satz 2.25 den Ansatz (2.144) erfüllen. In der Tat hat jede Lösung von Satz 2.25 die Form

$$x(t) = e^{\lambda t} P_j(t)$$

wobei  $P_j(t)$  ein vektorwertiges Polynom von Grad  $\leq p_j - 1$  ist. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $p_j - 1 \leq s$ , und das folgt aus der Identität

$$\sum_{j=1}^g (p_j - 1) = \left( \sum_{j=1}^g p_j \right) - g = m - g = s.$$

■

**Beispiel.** Betrachten wir noch einmal das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x,$$

das nur den Eigenwert  $\lambda = 3$  hat und zwar mit  $m = 2$  und  $g = 1$ . Da  $m - g = 1$ , ergibt Korollar 2.26 den folgenden Ansatz für die allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{3t} (u + tv)$$

wobei  $u$  und  $v$  unbekannte Vektoren sind. Dann gilt nach Produktregel

$$x' = 3e^{3t} (u + tv) + e^{3t} v = e^{3t} (3u + (3t + 1)v),$$

und Einsetzen  $x(t)$  und  $x'(t)$  in die Gleichung ergibt

$$3u + (3t + 1)v = A(u + tv).$$

Da diese Gleichung linear in  $t$  ist, es reicht sie für zwei Werte von  $t$  zu erfüllen. Wir nehmen  $t \rightarrow \infty$  und  $t = 0$ , was ergibt

$$\begin{cases} Av = 3v \\ Au = 3u + v \end{cases}$$

Deshalb ist  $v$  ein Eigenvektor und  $u$  ist zweiter Hauptvektor. Die beiden haben wir schon berechnet:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

aber jetzt brauchen wir alle Werte von  $u$  und  $v$ , also

$$v = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t} \left( C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1(t+1) + C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.145}$$

**Beispiel.** Am Ende betrachten wir inhomogenes System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} \tag{2.146}$$

und erinnern uns daran, dass nach Satz 2.15 die allgemeine Lösung durch die Identität

$$x(t) = X(t) \int X(t)^{-1} B(t) dt \tag{2.147}$$

gegeben ist, wobei  $X(t)$  die Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist und  $B(t)$  die Störfunktion ist. Die zwei unabhängige Lösungen des homogenen Systems sind

$$x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix},$$

die aus (2.145) mit  $C_1 = 0$  bzw  $C_2 = 0$  folgen. Somit ist die Fundamentalmatrix

$$X = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

und die inverse Matrix

$$X^{-1} = e^{-3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach (2.147) erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.146):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \int e^{-3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} dt \\
 &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -2 \end{pmatrix} dt \\
 &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 + t + C_1 \\ -2t + C_2 \end{pmatrix} \\
 &= e^{3t} \begin{pmatrix} t - t^2 + C_1 + tC_2 \\ -t - t^2 + C_1 + (t+1)C_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### 3 Das Anfangswertproblem für allgemeine DGLen

In diesem Kapitel beweisen wir unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

#### 3.1 Lipschitz-stetige Funktionen

Wir brauchen den Begriff von Lipschitz-Funktionen. Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition.** Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *Lipschitz-stetig*, falls es eine Konstante  $L$  gibt, derart, dass für alle  $x, y \in \Omega$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|. \tag{3.1}$$

Die Konstante  $L$  heißt *Lipschitz-Konstante* von  $f$  in  $\Omega$ . Eine Lipschitz-stetige Funktion heißt auch *Lipschitz-Funktion*.

Da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  (bzw  $\mathbb{R}^m$ ) äquivalent sind, ist die Lipschitz-Bedingung (3.1) unabhängig von der Wahl der Normen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , obwohl der Wert der Lipschitz-Konstante  $L$  jedoch von den Normen abhängt. Offensichtlich ist jede Lipschitz-stetige Funktion stetig (sogar gleichmäßig stetig).

**Beispiel.** Die Funktion  $f(x) = \|x\|$  als eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig weil nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Die Lipschitz-Konstante ist offensichtlich gleich 1. Bemerken Sie, dass die Funktion  $f(x)$  nicht differenzierbar an  $x = 0$  ist.

**Definition.** Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *lokal Lipschitz-stetig*, falls es für jedes  $x_0 \in \Omega$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt, derart, dass die Kugel  $B(x_0, \varepsilon)$  eine Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f|_{B(x_0, \varepsilon)}$  Lipschitz-stetig ist.

Wir betonen, dass der Wert der Lipschitz-Konstante in der Kugel  $B(x_0, \varepsilon)$  abhängig von der Kugel sein darf.

Folgendes Lemma liefert viele Beispiele von lokal Lipschitz-stetigen Funktionen. Bezeichnen wir mit  $f_k$  wie üblich die Komponenten von  $f$ .

**Lemma 3.1** (a) Seien  $B$  eine Kugel in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare Funktion. Gilt für alle partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

$$\sup_B \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right| \leq M \quad (3.2)$$

mit einer Konstanten  $M$ , so ist die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten  $L = L(M)$ .

(b) Seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig.

Wir benutzen die folgende Eigenschaft von Funktionen in  $\mathbb{R}^n$ .

**Claim** (Mittelwertsatz) Sei  $g$  eine differenzierbare Funktion von einer Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Dann für jede  $x, y \in B$  existiert  $\xi \in [x, y]$ , derart, dass

$$g(y) - g(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi) (y_j - x_j). \quad (3.3)$$

Hier ist  $[x, y]$  das geschlossene Intervall (die Verbindungsstrecke) zwischen  $z$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , also

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}.$$

Sind  $x, y$  Elementen der Kugel  $B = B(z, r)$ , so enthält  $B$  auch ganzes Intervall  $[x, y]$ , da für jedes  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + ty - z\| &= \|(1-t)(x-z) + t(y-z)\| \\ &\leq (1-t)\|x-z\| + t\|y-z\| \\ &< (1-t)r + tr = r. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Deshalb ist für jedes  $\xi \in [x, y]$  der Wert  $\frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi)$  in (3.3) wohldefiniert.

**Beweis.** Im Fall  $n = 1$  stimmt die obige Behauptung mit dem klassischen Mittelwertsatz für differenzierbare reellwertige Funktionen auf einem Intervall überein. Um (3.3) für  $n > 1$  zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$h(t) = g(x + t(y-x)) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Die Funktion  $h(t)$  ist auf  $[0, 1]$  differenzierbar und somit existiert nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz ein  $\tau \in (0, 1)$ , derart, dass

$$g(y) - g(x) = h(1) - h(0) = h'(\tau).$$

Da nach der Kettenregel

$$h'(\tau) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + \tau(y-x)) (y_j - x_j),$$

so erhalten wir (3.3) mit  $\xi = x + \tau(y - x)$ . ■

**Beweis von Lemma 3.1.** (a) Nach (3.3) erhalten wir für  $k$ -te Komponente  $f_k$  von  $f$  und für jede  $x, y \in B$

$$f_k(x) - f_k(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)(x_j - y_j), \quad (3.5)$$

wobei  $\xi \in [x, y]$ . Abschätzung von partiellen Ableitungen nach (3.2) ergibt

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq M \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| = M \|x - y\|_1,$$

woraus folgt

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq M \|x - y\|_1.$$

Da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, können die Normen  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_1$  durch eine gegebene Norm ersetzt werden, woraus die Lipschitz-Bedingung folgt mit der Konstanten  $L = CM$ , wobei die Konstante  $C$  von der gegebenen Norm abhängt.

(b) Da  $\Omega$  offen ist, so für jedes  $x \in \Omega$  existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass die Kugel  $B(x, \varepsilon)$  Teilmenge von  $\Omega$  ist. Durch Reduzierung von  $\varepsilon$  können wir voraussetzen, dass die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \varepsilon\}$$

auch Teilmenge von  $\Omega$  ist. Da die Komponenten  $f_k$  stetig differenzierbar sind, so sind die partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  stetig und somit in  $\overline{B}(x, \varepsilon)$  beschränkt. Nach (a) erhalten wir, dass  $f$  Lipschitz-stetig in  $B(x, \varepsilon)$  ist, was zu beweisen war. ■

**Beispiel.** 1. Die Funktion  $f(x) = x^2$  auf  $\mathbb{R}$  ist lokal Lipschitz-stetig da sie stetig differenzierbar ist. Aber diese Funktion ist nicht Lipschitz-stetig: die Differenz

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| |x + y|$$

kann durch  $L|x - y|$  nicht abgeschätzt werden, weil  $|x + y|$  beliebig groß sein kann.

2. Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  auf  $\mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig, weil ihre Ableitung

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

die folgende Ungleichung erfüllt:  $|f'(x)| \leq 1$ . Insbesondere ist 1 eine Lipschitz-Konstante von  $f(x)$ .

3. Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist Lipschitz-stetig auch mit der Lipschitz-Konstanten 1, aber nicht differenzierbar.

Wir brauchen eine Verallgemeinerung von Lipschitz-Stetigkeit wie folgt. Sei  $f(t, x)$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\mathbb{R}^m$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , und  $(t, x) \in \Omega$ .

**Definition.** Funktion  $f(t, x)$  heißt *Lipschitz-stetig* in  $x$ , wenn es eine Konstante  $L$  gibt, so dass für alle  $(t, x), (t, y) \in \Omega$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (3.6)$$

D.h., für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $f(t, \cdot)$  Lipschitz-stetig mit einer unabhängigen von  $t$  Lipschitz-Konstanten  $L$ .

Die gleiche Definition gilt wenn  $t$  eine Variable der höheren Dimension ist, z.B. aus  $\mathbb{R}^l$ .

Eine Teilmenge  $Z$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  heißt *Zylinder*, falls  $Z = I \times B$ , wobei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $B$  eine (offene oder abgeschlossene) Kugel in  $\mathbb{R}^n$  sind. Der Zylinder ist abgeschlossen genau dann, wenn die beiden Mengen  $I$  und  $B$  abgeschlossen sind (und offen, wenn die beiden  $I$  und  $B$  offen sind).

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für Intervalle und Kugeln:

$$I(t, \delta) := (t - \delta, t + \delta), \quad \bar{I}(t, \delta) = [t - \delta, t + \delta]$$

und

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}, \quad \bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}.$$

**Definition.** Funktion  $f(t, x)$  heißt *lokal Lipschitz-stetig* in  $x$ , falls es für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  Konstanten  $\varepsilon, \delta > 0$  gibt, derart, dass der Zylinder

$$Z = I(t_0, \delta) \times B(x_0, \varepsilon)$$

Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist (vgl. Fig. 17).

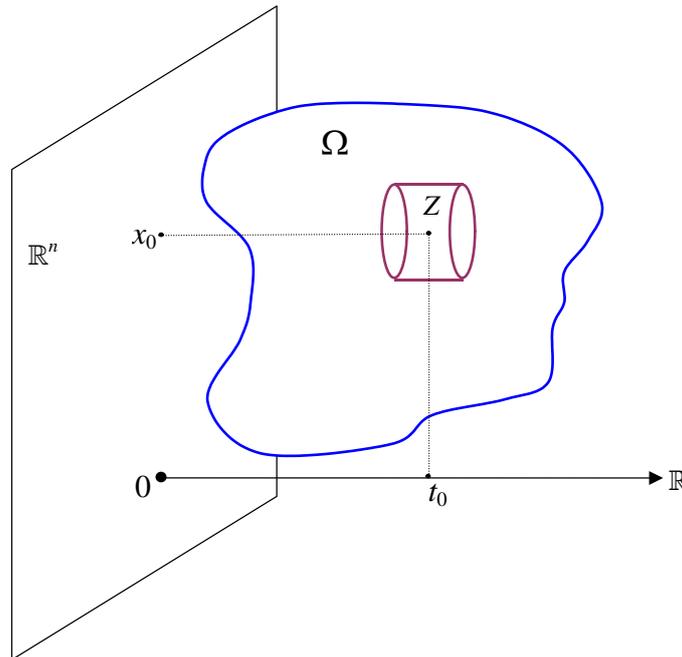


Figure 17: Zylinder  $Z$

**Lemma 3.2** (a) Seien  $Z$  ein Zylinder in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f(t, x) : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare in  $x$  Funktion. Sind alle partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$  beschränkt in  $Z$ , so ist die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$ .

(b) Seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare in  $x$  Funktion. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$ .

**Beweis.** (a) Sei  $Z = I \times B$ . Für jedes  $t \in I$  ist die Funktion  $f(t, \cdot) : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar, und die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  sind beschränkt in  $B$  mit einer unabhängigen von  $t$  Konstante  $M$ . Somit erhalten wir nach Lemma 3.1, dass die Funktion  $f(t, \cdot)$  Lipschitz-stetig ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L = L(M)$ , die auch unabhängig von  $t$  ist. Deshalb ist die Funktion  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitz-stetig in  $x$ .

(b) Da  $\Omega$  offen ist, existiert für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  ein Zylinder

$$Z = I(t_0, \delta) \times B(x_0, \varepsilon),$$

der eine Teilmenge von  $\Omega$  ist, und auch der abgeschlossene Zylinder

$$\bar{Z} = \bar{I}(t_0, \delta) \times \bar{B}(x_0, \varepsilon)$$

eine Teilmenge von  $\Omega$  ist. Da die partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  stetig in  $\Omega$  sind, sind sie beschränkt in  $\bar{Z}$  und deshalb in  $Z$ . Nach (a) ist die Funktion  $f$  auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$ , und somit ist  $f$  auf  $\Omega$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . ■

## 3.2 Existenz und Eindeutigkeit für Normalsysteme

Betrachten wir jetzt ein allgemeines (nicht-lineares) Normalsystem

$$x' = f(t, x), \tag{3.7}$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von  $n + 1$  Variablen mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  ist. Also,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, und das Paar  $(t, x)$  mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wird wie folgt:

$$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n).$$

Erinnern wir uns daran, dass eine Lösung von (3.7) eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (wobei  $I$  ein Intervall ist) mit folgenden Eigenschaften ist:

1.  $x(t)$  ist differenzierbar für jedes  $t \in I$ ;
2.  $(t, x(t)) \in \Omega$  für jedes  $t \in I$ ;
3.  $x'(t) = f(t, x(t))$  für jedes  $t \in I$ .

Betrachten wir auch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.8}$$

wobei  $(t_0, x_0)$  ein gegebener Punkt in  $\Omega$  ist. Eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Lösung von (3.8) falls  $x$  eine Lösung von (3.7) auf Intervall  $I$  ist,  $t_0 \in I$  und  $x(t_0) = x_0$ . Der Graph der Lösung  $x(t)$  ist eine Integralkurve von (3.7), die durch den Punkt  $(t_0, x_0)$  geht.

Jetzt können wir einen Hauptsatz formulieren.

**Satz 3.3 (Hauptsatz)** (Satz von Picard-Lindelöf) *Sei die Funktion  $f(t, x)$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ .*

(a) *Das Anfangswertproblem (3.8) hat eine Lösung für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .*

(b) *Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.8), dann gilt  $x(t) = y(t)$  im gemeinsamen Definitionsbereich von  $x$  und  $y$ .*

**Bemerkung.** Nach Lemma 3.2, kann die Voraussetzung von lokal Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  in  $x$  durch die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x$  ersetzt werden. Für bestimmten Anwendungen ist es jedoch wichtig, dass die Funktion  $f$  nicht unbedingt differenzierbar sein muss.

**Bemerkung.** Alternativ kann man die Voraussetzungen von Satz 3.3 wie folgt formulieren: sei die Funktion  $f(t, x)$  stetig in  $t$  und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Da in einem Zylinder  $Z$  um  $x$  die Lipschitz-Konstante  $L$  unabhängig von  $t$  ist, ist Funktion  $f$  in  $Z$  stetig in  $x$  gleichmäßig bezüglich  $t$ . Zusammen mit der Stetigkeit in  $t$  ergibt dies die Stetigkeit in  $(t, x)$ .

**Bemerkung.** Vergleichen wir Satz 3.3 mit Satz 2.1, wo man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

für lineares Normalsystem betrachtete, wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Die lineare Gleichung hat die Form  $x' = f(t, x)$  für

$$f(t, x) = A(t)x + B(t).$$

Offensichtlich ist die Funktion  $f$  stetig im Definitionsbereich  $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ . Sie ist auch stetig differenzierbar in  $x$  da

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = A_{kj}(t).$$

Deshalb ist Satz 3.3 verwendbar und ergibt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.9) in einem Teilintervall  $I'$  von  $I$ . Satz 2.1 besagt allerdings, dass die Lösung von (3.9) auf ganzem Intervall  $I$  existiert, was offensichtlich stärker ist, als die Behauptung von Satz 3.3.

**Bemerkung.** Ohne Lipschitz-Bedingung, aber doch unter der Voraussetzung von Stetigkeit von  $f$ , gilt die Existenz der Lösung von (3.8) (Satz von Peano), aber nicht die Eindeutigkeit, was man unterhalb sehen kann.

**Beispiel.** Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

(vgl. Abschnitt 1.3). Die Funktion  $x(t) \equiv 0$  ist offensichtlich eine Lösung, sowie auch die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & t \geq 0 \\ -\frac{1}{4}t^2, & t < 0. \end{cases}$$

Deshalb es gibt mindestens zwei Lösungen von (3.10) (vgl. Fig. 18).

Die Eindeutigkeit gilt nicht, weil die Funktion  $f(t, x) = \sqrt{|x|}$  nicht Lipschitz-stetig in der Nähe von 0 ist. Ähnlich hat das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

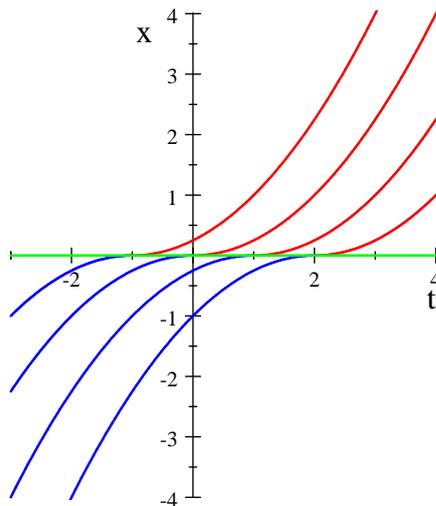


Figure 18: Die Integralkurven von (3.10)

auch mehrere Lösungen, vorausgesetzt  $\alpha \in (0, 1)$ , und die Funktion  $f(t, x) = |x|^\alpha$  ist auch nicht lokal Lipschitz-stetig.

**Beispiel.** Betrachten wir jetzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

wo die Funktion  $f(t, x) = |x|$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist. Die Eindeutigkeit gilt für (3.11) und die eindeutige Lösung ist

$$x(t) = \begin{cases} e^t x_0, & x_0 \geq 0 \\ e^{-t} x_0, & x_0 < 0 \end{cases}$$

(vgl. Fig. 19).

Für den Beweis von Satz 3.3 brauchen wir die folgende Behauptung.

**Fixpunktsatz von Banach.** Seien  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine Kontraktionsabbildung, d.h. , es gilt

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y) \quad (3.12)$$

für eine Konstante  $q \in (0, 1)$  und für alle  $x, y \in X$ . Dann besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt, also einen Punkt  $x \in X$  so dass  $Tx = x$ .

**Beweis.** Wählen wir einen beliebigen Punkt  $x_0 \in X$  und definieren nach Induktion eine Folge  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  durch

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir beweisen, dass die Folge  $\{x_n\}$  konvergiert und der Grenzwert ein Fixpunkt von  $T$  ist.

Bemerken wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq qd(x_n, x_{n-1}).$$

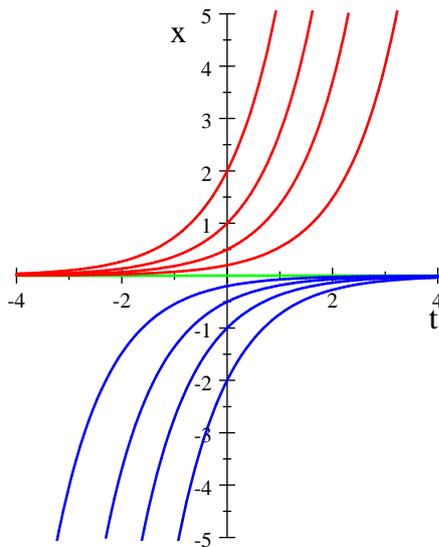


Figure 19: Die Integralkurven von (3.11)

Durch Induktion erhalten wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0) = Cq^n, \quad (3.13)$$

wobei  $C = d(x_1, x_0)$ . Daraus folgt, dass  $\{x_n\}$  eine Cauchy-Folge ist. In der Tat, für jede  $m > n$  erhalten wir nach Dreiecksungleichung und (3.13), dass

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq C(q^n + q^{n+1} + \dots + q^{m-1}) \\ &\leq Cq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= \frac{Cq^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ , was bedeutet, dass  $\{x_n\}$  eine Cauchy-Folge ist. Nach der Vollständigkeit von  $(X, d)$ , konvergiert jede Cauchy-Folge. Somit konvergiert die Folge  $\{x_n\}$  gegen einen Punkt  $a \in X$ , also  $x_n \rightarrow a$ . Daraus folgt, dass

$$d(Tx_n, Ta) \leq qd(x_n, a) \rightarrow 0$$

und somit  $Tx_n \rightarrow Ta$ . Andererseits  $Tx_n = x_{n+1} \rightarrow a$ , was ergibt  $Ta = a$ . Also,  $a$  ist ein Fixpunkt.

Sind  $a, b$  zwei Fixpunkte, so gilt es nach (3.12)

$$d(a, b) = d(Ta, Tb) \leq qd(a, b),$$

was nur dann möglich ist, wenn  $d(a, b) = 0$  und somit  $a = b$ . ■

**Bemerkung.** Der Beweis des Fixpunktsatzes ergibt die folgende Methode um den Fixpunkt zu bestimmen bzw anzunähern. Man fängt mit einem beliebigen Punkt  $x_0$  an und bildet induktiv die Folge von *Näherungslösungen* wie folgt:

$$x_{n+1} = Tx_n,$$

die gegen Fixpunkt konvergiert. Diese Methode wurde in Beweis von Satz 2.1 benutzt aber ohne den Fixpunktsatz.

Wir fangen den Beweis von Satz 3.3 mit der folgenden Behauptung an.

**Lemma 3.4** Sei die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  in (3.8) stetig. Sei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $I$ , so dass  $t_0 \in I$  und  $(t, x(t)) \in \Omega$  für jedes  $t \in I$ . Dann löst die Funktion  $x(t)$  das Anfangswertproblem (3.8) genau dann, wenn  $x(t)$  die folgende Integralgleichung erfüllt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.14)$$

**Beweis.** Löst  $x(t)$  (3.8), so folgt es aus der Gleichung  $x' = f(t, x(t))$ , dass  $x'(t)$  stetig ist, so dass man kann diese Gleichung integrieren und somit erhalten

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

und

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

woraus (3.14) folgt. Umgekehrt, sei  $x$  eine stetige Funktion, die (3.14) erfüllt. Die rechte Seite von (3.14) ist in  $t$  differenzierbar; deshalb ist  $x(t)$  auch differenzierbar. Ableiten von (3.14) ergibt  $x' = f(t, x)$ , und die Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  folgt offensichtlich aus (3.14). ■

**Beweis von dem Satz 3.3.** (a) Wir bilden einen vollständigen metrischen Raum  $(X, d)$  und eine Selbstabbildung  $T$  von  $X$ , so dass die Gleichung  $Tx = x$  äquivalent zum AWP (3.8) ist. Ist  $T$  eine Kontraktionsabbildung so erhalten wir die Existenz der Lösung nach Fixpunktsatz von Banach.

Um den Raum  $(X, d)$  zu definieren, benutzen wir die lokale Lipschitz-Bedingung. Seien  $\varepsilon, \delta, L$  die Konstanten aus der lokalen Lipschitz-Bedingung an  $(t_0, x_0)$ ; also, der Zylinder

$$Z = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$$

ist eine Teilmenge von  $\Omega$  und die Funktion  $f(t, x)$  ist auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$ , d.h.  $f$  erfüllt die Ungleichung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (3.15)$$

für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  und  $x, y \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ . Wählen wir ein  $r$ ,

$$0 < r \leq \delta,$$

das später angegeben wird, und bezeichnen

$$I = [t_0 - r, t_0 + r] \quad \text{und} \quad J = \overline{B}(x_0, \varepsilon).$$

Sei  $X$  die Menge von allen stetigen Funktionen  $x : I \rightarrow J$ , also

$$X = \{x : I \rightarrow J : x \text{ ist stetig}\}$$

(vgl. Fig. 20).

Definieren wir einen Integraloperator  $T$  auf Funktionen  $x \in X$  durch die Identität

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.16)$$

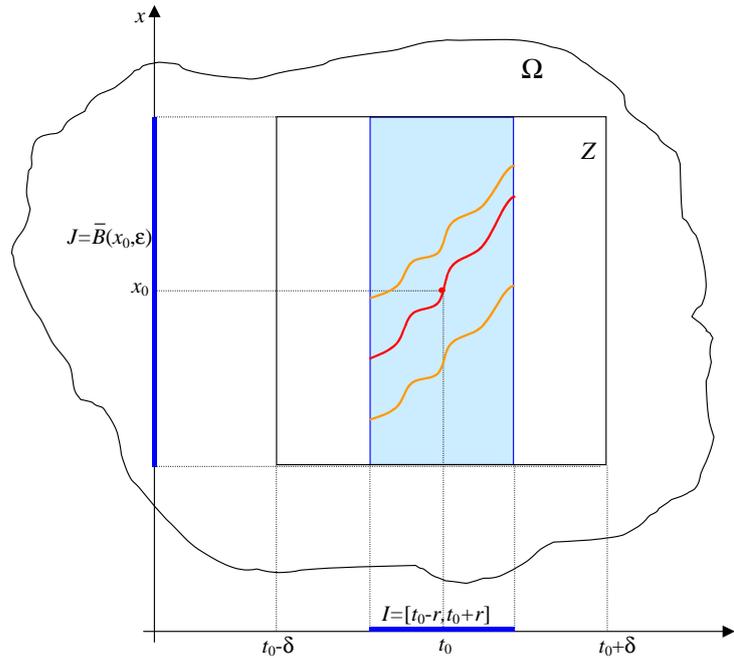


Figure 20: Die Funktionen  $x : I \rightarrow J$

Wir möchten es zu sichern, dass  $T$  eine Selbstabbildung von  $X$  ist, d.h.,  $x \in X$  impliziert  $Tx \in X$ . Bemerken wir, dass für jede Funktion  $x \in X$  und für alle  $s \in I$  der Punkt  $(s, x(s))$  in  $\Omega$  liegt, so dass das Integral in (3.16) für jedes  $t \in I$  wohldefiniert ist. Somit ist die Funktion  $Tx(t)$  auf ganzem Intervall  $I$  definiert. Diese Funktion ist offensichtlich stetig. Es bleibt nur zu zeigen, dass die Werte von  $Tx(t)$  in  $J$  liegen, d.h.

$$\|Tx(t) - x_0\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \in I. \quad (3.17)$$

Für jedes  $t \in I$ , we haben nach (3.16)

$$\begin{aligned} \|Tx(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \right| \\ &\leq \sup_{s \in I, x \in J} \|f(s, x)\| |t - t_0| \\ &\leq Mr, \end{aligned}$$

wobei

$$M := \sup_{(s,x) \in Z} \|f(s, x)\| < \infty.$$

Wir betonen, dass  $M$  unabhängig von  $r$  definiert ist. Jetzt setzen wir voraus, dass  $r$  noch eine Bedingung erfüllt:

$$r \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Dann ist (3.17) offensichtlich erfüllt und somit erhalten wir, dass  $Tx \in X$ .

Nach Lemma 3.4 löst eine Funktion  $x \in X$  das AWP (3.8) genau dann, wenn  $Tx = x$ , also, wenn  $x$  ein Fixpunkt von  $T$  ist. Die Existenz von einem Fixpunkt von  $T$  wird mit Hilfe von Fixpunktsatz von Banach bewiesen. Dafür müssen wir die Menge  $X$  in einen vollständigen metrischen Raum umwandeln, so dass die Abbildung  $T$  eine Kontraktion ist.

Definieren wir die Funktion auf  $X \times X$  wie folgt:

$$d(x, y) = \sup_{t \in I} \|x(t) - y(t)\|,$$

für alle  $x, y \in X$ .

**Claim** Die Funktion  $d$  ist eine Metrik (Abstandsfunktion) auf  $X$ , und der metrische Raum  $(X, d)$  ist vollständig.

Überprüfen wir zunächst die Axiome von Metrik.

1.  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, x) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

In der Tat, sind die 1. und 2. Axiome offensichtlich, und das 3. Axiom folgt aus

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\|.$$

Jetzt zeigen wir, dass der metrische Raum  $(X, d)$  vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge in  $(X, d)$  konvergiert. Sei  $\{x_k\}$  eine Folge aus  $X$ . Die Konvergenz  $x_k \rightarrow x$  bezüglich  $d$  bedeutet, dass  $d(x_k, x) \rightarrow 0$ , also

$$\sup_{t \in I} \|x_k(t) - x(t)\| \rightarrow 0,$$

was genau mit der gleichmäßigen Konvergenz  $x_k \rightrightarrows x$  auf  $I$  übereinstimmt. Sei  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Cauchy-Folge in  $(X, d)$ , also

$$d(x_k, x_m) = \sup_{t \in I} \|x_k(t) - x_m(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k, m \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Es folgt, dass für jedes  $t \in I$

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k, m \rightarrow \infty,$$

also  $\{x_k(t)\}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^n$  ist. Deshalb konvergiert diese Folge gegen einen Vektor aus  $\mathbb{R}^n$ , den wir mit  $x(t)$  bezeichnen, so dass

$$x_k(t) \rightarrow x(t) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

für jedes  $t \in I$ . Da  $x_k(t) \in J$  und  $J$  abgeschlossen ist, erhalten wir auch  $x(t) \in J$ , so dass  $x$  eine Abbildung von  $I$  nach  $J$  ist.

Es bleibt noch zu beweisen, dass  $x$  stetig ist und

$$\sup_{t \in I} \|x_k(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

was bedeutet wird, dass  $\{x_k\}$  gegen  $x$  in  $(X, d)$  konvergiert. Umschreiben wir die Bedingung (3.18) wir folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, m > N \quad \forall t \in I \quad \|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \varepsilon.$$

Für  $m \rightarrow \infty$  (während  $\varepsilon$ ,  $k$  und  $t$  fixiert sind) erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k > N \quad \forall t \in I \quad \|x_k(t) - x(t)\| \leq \varepsilon,$$

woraus (3.19) folgt. Insbesondere ist  $x(t)$  ein gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen  $x_k$  (das heißt  $x_k \rightrightarrows x$ ), woraus folgt, dass  $x(t)$  stetig ist.

Jetzt sichern wir, dass die Abbildung  $T : X \rightarrow X$  eine Kontraktion ist. Für beliebige Funktionen  $x, y \in X$  und für jedes  $t \in I$ , gilt  $x(t), y(t) \in J$ , woraus folgt mit Hilfe von Lipschitz-Bedingung (3.15), dass

$$\begin{aligned} \|Tx(t) - Ty(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \\ &\leq L |t - t_0| \sup_{s \in I} \|x(s) - y(s)\| \\ &\leq Lrd(x, y), \end{aligned}$$

und somit

$$d(Tx, Ty) = \sup_{t \in I} \|Tx(t) - Ty(t)\| \leq Lrd(x, y).$$

Setzen wir voraus, dass

$$r < \frac{1}{L},$$

und erhalten, dass  $T$  eine Kontraktion ist. Nach Fixpunktsatz von Banach, hat die Gleichung  $Tx = x$  eine Lösung  $x \in X$ , die nach Lemma 3.4 auch das AWP (3.8) löst.

Wir betonen, dass die gefundene Lösung  $x(t)$  auf dem Intervall  $[t_0 - r, t_0 + r]$  definiert ist, vorausgesetzt, dass  $r$  die folgenden drei o.g. Bedingungen erfüllt:

$$0 < r \leq \delta, \quad r \leq \frac{\varepsilon}{M}, \quad r < \frac{1}{L},$$

wobei die Konstanten  $\varepsilon, \delta, L$  aus der lokalen Lipschitz-Bedingung an  $(t_0, x_0)$  kommen, also, der Zylinder

$$Z = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$$

ist eine Teilmenge von  $\Omega$ ,  $f$  ist in  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$  mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ , und  $M = \sup_Z \|f\|$ . Z.B., man kann immer nehmen

$$\boxed{r = \min \left( \delta, \frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{2L} \right)}. \quad (3.20)$$

(b) Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen des Anfangswertproblems (3.8), die auf einem  $I \subset \mathbb{R}$  definiert sind. Wir müssen beweisen, dass  $x = y$  auf  $I$ . Wir können annehmen, dass  $I$  offen ist, da aus der Identität  $x(t) = y(t)$  im offenen Intervall auch die gleiche Identität an den Grenzpunkten folgt.

Seien  $\varepsilon$  und  $\delta$  wie im Teil (a). Nach der Stetigkeit von  $x$  und  $y$ , es existiert  $\rho \in (0, \delta)$  so dass

$$I' := (t_0 - \rho, t_0 + \rho) \subset I$$

und

$$x(I') \subset \overline{B}(x_0, \varepsilon) \quad \text{und} \quad y(I') \subset \overline{B}(x_0, \varepsilon).$$

Die beiden Lösungen  $x, y$  erfüllen die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

für alle  $t \in I'$ . Deshalb erhalten wir für die Differenz  $z(t) := \|x(t) - y(t)\|$  die folgende Ungleichung

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right|.$$

Da die beiden Punkte  $(s, x(s))$  und  $(s, y(s))$  Elementen von  $Z$  sind, ergibt die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq L \|x(s) - y(s)\|,$$

woraus folgt

$$z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|.$$

Nach Grönwall-Lemma (Lemma 2.12) beschließen wir, dass  $z(t) \equiv 0$ , woraus die Gleichheit  $x \equiv y$  auf  $I'$  folgt.

Es bleibt noch zu beweisen, dass  $x(t) = y(t)$  für alle  $t \in I$ . Betrachten wir eine Teilmenge von  $I$ :

$$E = \{t \in I : x(t) = y(t)\},$$

und zeigen, dass die Menge  $E$  abgeschlossen sowie auch offen in  $I$ . Die Abgeschlossenheit ist offensichtlich: ist  $\{t_k\}$  eine Folge aus  $E$  so dass  $t_k \rightarrow t \in I$  für  $k \rightarrow \infty$ , dann gilt  $x(t_k) = y(t_k)$  für alle  $k$  und somit nach Stetigkeit von  $x$  und  $y$  auch  $x(t) = y(t)$ , also  $t \in E$ .

Um die Offenheit zu beweisen, wählen ein  $t_1 \in E$  und zeigen, dass es ein  $\rho > 0$  gibt, so dass  $(t_1 - \rho, t_1 + \rho) \subset E$ . Bezeichnen wir mit  $x_1$  den gemeinsamen Wert  $x(t_1) = y(t_1)$  und bemerken, dass die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  das gleiche Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

lösen. Nach dem obigen Teil von Beweis, erhalten wir  $x(t) = y(t)$  auf einem Intervall  $(t_1 - \rho, t_1 + \rho) \subset I$  mit  $\rho > 0$ . Daraus folgt  $(t_1 - \rho, t_1 + \rho) \subset E$ , und somit die Offenheit von  $E$ .

Letztlich benutzen wir das Faktum, dass jedes Intervall  $I$  zusammenhängend ist, was genau bedeutet, dass die einzigen Teilmengen von  $I$ , die gleichzeitig offen und abgeschlossen in  $I$  sind, sind die Leermenge  $\emptyset$  und  $I$ . Da die Menge  $E$  offen, abgeschlossen und nicht leer ist (weil  $t_0 \in E$ ), so beschließen wir, dass  $E = I$ , was zu beweisen war.

Die Zusammenhängendkeit eines Intervalls  $I$  beweist man wie folgt. Sei  $E \subset I$  offen und abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass entweder  $E$  oder das Komplement  $E^c = I \setminus E$  leer ist. Angenommen das Gegenteil gilt, d.h., die beiden Mengen  $E$  und  $E^c$  sind nicht leer, und wählen einige Punkte  $a_0 \in E$  und  $b_0 \in E^c$ . Setzen wir  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  so dass  $c_0 \in I$ . Dann gehört  $c_0$  zum  $E$  oder zum  $E^c$ . Aus zwei Intervalle  $[a_0, c_0]$ ,  $[c_0, b_0]$  wählen wir ein Intervall, dessen Endpunkte zu verschiedenen Mengen  $E, E^c$  gehören, und es mit  $[a_1, b_1]$  bezeichnen, so dass  $a_1 \in E$  und  $b_1 \in E^c$ . Dann holen wir dieses Argument wieder, indem wir ein Intervall  $[a_2, b_2]$  bilden, das eine Hälfte von  $[a_1, b_1]$  ist, und  $a_2 \in E, b_2 \in E^c$ . Durch Induktion erhalten wir eine Intervallschachtelung<sup>10</sup>  $\{[a_k, b_k]\}_{k=0}^\infty$ , wobei  $a_k \in E, b_k \in E^c$  und  $|b_k - a_k| \rightarrow 0$ . Nach Intervallschachtelungsprinzip existiert ein  $x \in [a_k, b_k]$  für alle  $k$ . Offensichtlich gilt  $x \in I$ . Da  $a_k \rightarrow x$  und  $E$  abgeschlossen ist, so gilt  $x \in E$ . Da  $b_k \rightarrow x$  und  $E^c$  abgeschlossen ist, so gilt auch  $x \in E^c$ . Dieser Widerspruch beweist, dass entweder  $E$  oder  $E^c$  leer ist, d.h., entweder  $E = \emptyset$  oder  $E = I$ . ■

**Bemerkung.** Aus dem Beweis von Existenz der Lösung gewinnt man die folgende Methode für Bestimmung der Lösung  $x(t)$  von (3.8). Man fängt mit konstante Funktion  $x_0(t) \equiv x_0$  an und bildet eine Folge von Näherungslösungen  $x_k(t)$  nach der Regel  $x_{k+1} = Tx_k$ , d.h.

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds.$$

Diese Folge  $\{x_k\}$  heißt die *Picarditeration*, und sie konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung  $x(t)$  in einem hinreichend kleinen Intervall  $I = [t_0 - r, t_0 + r]$ .

**Beispiel.** Betrachten wir eine nicht-lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Die Picarditeration ist durch die Identität

$$x_{k+1}(t) = \int_0^t (1 + x_k^2(s)) ds$$

gegeben, und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t \\ x_2(t) &= \int_0^t (1 + s^2) ds = t + \frac{t^3}{3} \\ x_3(t) &= \int_0^t \left(1 + \left(s + \frac{s^3}{3}\right)^2\right) ds = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7 \\ x_4(t) &= \int_0^t \left(1 + \left(s + \frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{15}s^5 + \frac{1}{63}s^7\right)^2\right) ds = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Da die DGL (3.21) trennbar ist, man löst sie mit Hilfe von Trennung der Variablen und erhält

$$t = \int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x,$$

<sup>10</sup>Das ist eine Folge von Intervallen, so dass jedes Intervall komplett in dem vorherigen Intervall liegt.

woraus folgt  $x(t) = \tan t$  im Definitionsbereich  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . In diesem Beispiel ergibt die Picarditeration die Taylorentwicklung von  $\tan t$ .

### 3.3 Existenz und Eindeutigkeit für skalare DGLen

Betrachten wir jetzt eine skalare DGL  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

wobei  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist. Wir bezeichnen die unabhängigen Variablen in  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit  $(t, \mathbf{x})$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , und schreiben  $F = F(t, \mathbf{x})$ .

**Korollar 3.5** (Satz von Picard-Lindelöf für skalare DGLen) *Sei die Funktion  $F(t, \mathbf{x})$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $\mathbf{x}$ .*

(a) *Für jeden Punkt  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$  hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (3.22)$$

eine Lösung.

(b) *Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.22), dann gilt  $x(t) = y(t)$  im gemeinsamen Definitionsbereich von  $x$  und  $y$ .*

Insbesondere erfüllt die Funktion  $F$  die Voraussetzungen, falls  $F$  in  $\Omega$  stetig und stetig differenzierbar in  $x$  ist.

**Beweis.** Betrachten wir die Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$  und erinnern uns daran, dass die DGL  $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$  äquivalent zur Vektor-DGL  $\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x})$  ist, wobei

$$f(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n, F(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)).$$

Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist offensichtlich stetig in  $\Omega$ . Beweisen wir, dass  $f$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$  ist. Wir benutzen die 1-Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $Z$  ein Zylinder in  $\Omega$ , wo  $F$  Lipschitz-stetig in  $\mathbf{x}$  ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ . Es reicht zu zeigen, dass auch  $f$  in  $Z$  Lipschitz-stetig in  $\mathbf{x}$  ist. Für  $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in Z$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\|_1 &= |\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2| + \dots + |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n| + |F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \\ &= (L + 1) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1, \end{aligned}$$

also ist  $f$  Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten  $L + 1$ .

Das Anfangswertproblem (3.22) ist äquivalent zu

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

wobei  $\mathbf{x}_0 = (x_0, \dots, x_{n-1})$ . Nach Satz 3.3 (Satz von Picard-Lindelöf für Normalsysteme), hat das Anfangswertproblem (3.23) eine Lösung für jedes  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ , und zwei Lösungen von (3.23) sind identisch auf dem gemeinsamen Intervall. Deshalb gelten die gleichen Aussagen auch für (3.22), was zu beweisen war. ■

### 3.4 Maximale Lösungen

Betrachten wir wieder ein Normalsystem

$$x' = f(t, x), \quad (3.24)$$

wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist, die in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$  ist. Nach Satz 3.3 (Picard-Lindelöf) sind zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

identisch im gemeinsamen Definitionsbereich. Jedoch gibt es viele Lösungen von (3.25), die auf verschiedenen Intervallen definiert sind. In diesem Abschnitt bestimmen wir eine Lösung von (3.25) mit maximalem Definitionsbereich.

**Definition.** Seien  $x$  und  $y$  zwei Lösungen von (3.24), die jeweils auf den Intervallen  $I_x$  und  $I_y$  definiert sind. Die Lösung  $y$  heißt eine *Fortsetzung* von  $x$ , falls  $I_x \subset I_y$ . Die Fortsetzung  $y$  heißt *echt*, falls  $I_x \neq I_y$ .

In diesem Fall gilt automatisch  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I_x$  nach dem Satz 3.3(b).

**Definition.** Eine Lösung  $x$  von (3.24) heißt *maximal*, falls  $x$  keine echte Fortsetzung (als eine Lösung) besitzt.

**Satz 3.6** Sei die Funktion  $f(t, x)$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Dann gilt folgendes:

(a) Für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  hat das Anfangswertproblem (3.25) eine eindeutige maximale Lösung.

(b) Der Definitionsbereich von einer maximalen Lösung  $x$  ist ein offenes Intervall (dieses Intervall heißt maximales Existenzintervall).

(c) Ist  $x(t)$  eine maximale Lösung mit dem Definitionsbereich  $(a, b)$ , so verlässt  $x(t)$  jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow a$  sowie auch für  $t \rightarrow b$ .

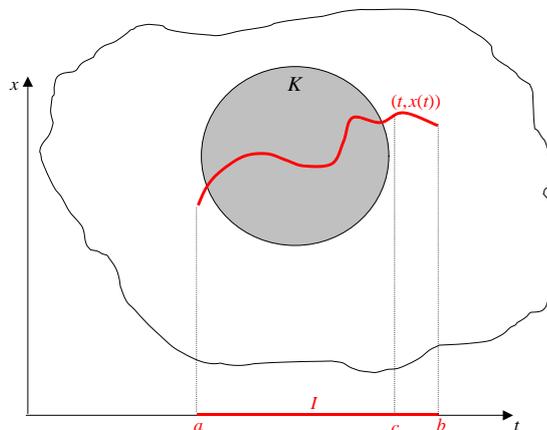


Figure 21: Die Lösung  $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow b$

Die Aussage “ $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow b$ ” bedeutet folgendes: es existiert ein Wert  $c \in (a, b)$ , dass für jedes  $c < t < b$  der Punkt  $(t, x(t))$  (des Graphen von  $x$ ) nicht in  $K$  liegt (Fig. 21). Analog bedeutet die Aussage “ $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow a$ ”, dass ein  $c \in (a, b)$  existiert, so dass für jedes  $a < t < c$  der Punkt  $(t, x(t))$  nicht in  $K$  liegt.

Die folgende Behauptung folgt aus (a): sind zwei maximale Lösungen  $x$  und  $y$  von (3.24) gleich für einen Wert von  $t$ , dann sind die Funktionen  $x$  und  $y$  identisch, inklusive die Übereinstimmung ihrer Definitionsbereiche, da sie gleiches Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung  $(t, x(t))$  lösen.

**Beispiel.** 1. Betrachten wir die DGL  $x' = x^2$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe von Trennung der Variablen lösen. Offensichtlich ist  $x \equiv 0$  eine konstante Lösung. In den Bereichen  $\{x > 0\}$  und  $\{x < 0\}$  erhalten wir

$$\int \frac{x' dt}{x^2} = \int dt$$

und

$$-\frac{1}{x} = \int \frac{dx}{x^2} = \int dt = t - C,$$

woraus folgt  $x(t) = \frac{1}{C-t}$ . Diese Funktion bestimmt zwei maximale Lösungen jeweils auf den Intervallen  $(C, +\infty)$  und  $(-\infty, C)$  (Fig. 22).

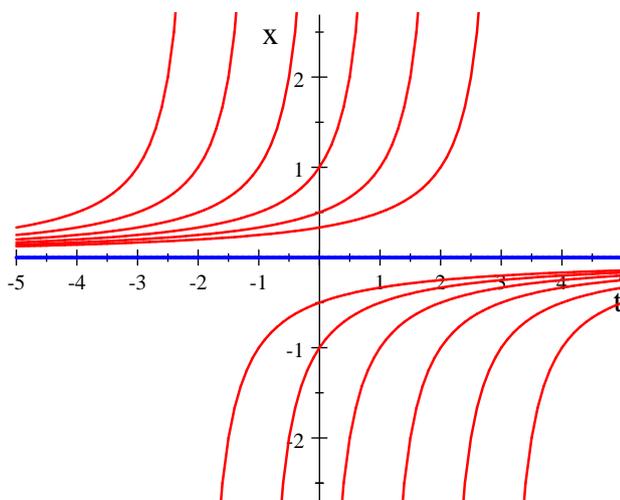


Figure 22: Die Integralkurven von  $x' = x^2$

Jede solche Lösung verlässt jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Zum Beispiel, die Lösung auf  $(C, +\infty)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow +\infty$  da  $K$  beschränkt ist, und auch für  $t \rightarrow C+$  da in diesem Fall  $x(t) \rightarrow -\infty$ .

2. Betrachten wir die DGL  $x' = \frac{1}{x}$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  (d.h.  $t \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$ ). Nach Trennung der Variablen erhalten wir

$$\frac{x^2}{2} = \int x dx = \int x x' dt = \int dt = t - C$$

und somit

$$x(t) = \sqrt{2(t - C)}, \quad t > C \quad (3.26)$$

(Fig. 23).

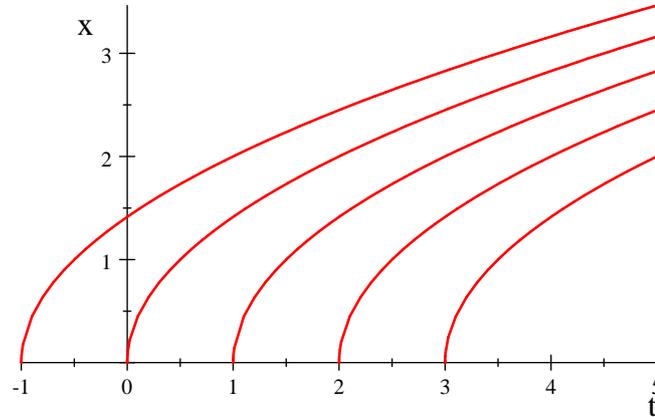


Figure 23: Die Integralkurven von  $x' = \frac{1}{x}$

Die Funktion (3.26) ist eine maximale Lösung mit dem Definitionsbereich  $(C, +\infty)$ . Die Lösung verlässt jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow C+$ , da  $(t, x(t)) \rightarrow (C, 0)$  und der Punkt  $(C, 0)$  auf dem Rand von  $\Omega$  liegt, und für  $t \rightarrow +\infty$  offensichtlich.

3. Die DGL  $x' = x^2 + 1$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R}^2$  hat die Lösung

$$x(t) = \tan(t - C), \quad t \in \left(C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right),$$

die offensichtlich jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  verlässt (Fig. 24).

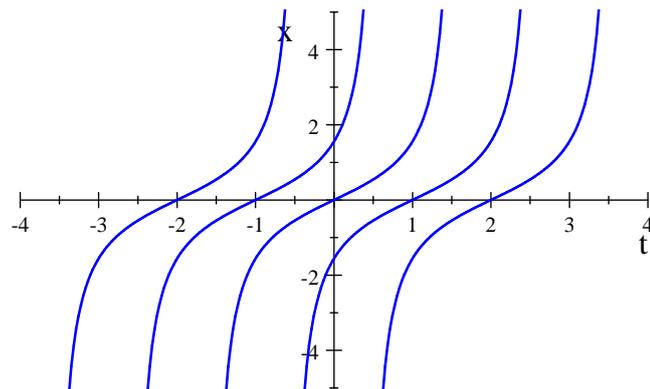


Figure 24: Die Integralkurven von  $x' = x^2 + 1$

Für den Beweis von Satz 3.6 brauchen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.7** Sei  $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha \in A}$  eine Menge von Lösungen des AWP's (3.25), wobei  $A$  eine Indexmenge ist, und  $x_\alpha$  auf einem Intervall  $I_\alpha$  definiert ist. Setzen wir

$$I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$$

und definieren eine Funktion  $x(t)$  auf  $I$  wie folgt:

$$x(t) = x_\alpha(t) \text{ falls } t \in I_\alpha. \quad (3.27)$$

Dann  $I$  ist ein Intervall, die Funktion  $x(t)$  ist wohldefiniert und löst (3.25) auf  $I$ .

Die durch (3.27) definierte Funktion  $x(t)$  heißt die *Vereinigung* der Lösungen  $\{x_\alpha(t)\}$ . Es ist klar, dass der Graph von  $x(t)$  die Vereinigung der Graphen aller Funktionen  $x_\alpha(t)$  ist.

**Beweis von Lemma 3.7.** Die Funktion  $x(t)$  ist wohldefiniert, wenn die rechte Seite der Identität (3.27) unabhängig von  $\alpha$  ist. Gehört  $t$  zu den zwei Intervallen  $I_\alpha$  und  $I_\beta$ , d.h.  $t \in I_\alpha \cap I_\beta$ , so gilt  $x_\alpha(t) = x_\beta(t)$  nach dem Eindeutigkeit von Satz 3.3, woraus folgt, dass der Wert von  $x(t)$  unabhängig von der Wahl des Indexes  $\alpha$  ist.

Jetzt beweisen wir, dass  $I$  ein Intervall ist, d.h. mit Punkten  $a < b$  enthält  $I$  auch das ganze Intervall  $[a, b]$ . Es gibt die Indizes  $\alpha, \beta \in A$  mit  $a \in I_\alpha$  und  $b \in I_\beta$ . Da die beiden Intervalle  $I_\alpha, I_\beta$  auch  $t_0$  enthalten, ist die Vereinigung  $I_\alpha \cup I_\beta$  auch ein Intervall, das  $a$  und  $b$  enthält, woraus  $[a, b] \subset I_\alpha \cup I_\beta$  folgt und somit  $[a, b] \subset I$  (Fig. 25).

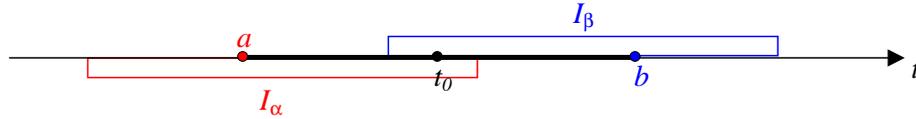


Figure 25: Intervalle  $I_\alpha$  und  $I_\beta$

Um zu beweisen, dass  $x$  eine Lösung von (3.25) ist, zeigen wir erst, dass  $x(t)$  stetig auf  $I$  ist. Es reicht zu zeigen, dass  $x(t)$  stetig auf jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall  $[a, b] \subset I$  ist. Seien  $\alpha, \beta \in A$  zwei Indizes, so dass  $a \in I_\alpha$ ,  $b \in I_\beta$  und somit  $[a, b] \subset I_\alpha \cup I_\beta$ . Da die Funktion  $x(t)$  stetig auf  $I_\alpha$  und  $I_\beta$  ist und die Intervalle  $I_\alpha, I_\beta$  nicht-leeren Durchschnitt haben, ist  $x(t)$  stetig auch auf  $I_\alpha \cup I_\beta$  und somit auf  $[a, b]$ .

Die Funktion  $x(t)$  erfüllt auf jedem Intervall  $I_\alpha$  die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Daraus folgt, dass die Gleichung auch für alle  $t \in I$  erfüllt ist und somit  $x(t)$  eine Lösung von (3.25) auf  $I$  ist. ■

**Beweis von Satz 3.6.** (a) Sei  $S$  die Menge aller Lösungen des Anfangswertproblems (3.25). Definieren wir  $z(t)$  als die Vereinigung von allen Lösungen aus  $S$ , insbesondere der Definitionsbereich  $I_z$  von  $z$  ist

$$I_z = \bigcup_{x \in S} I_x, \quad (3.28)$$

wobei  $I_x$  der Definitionsbereich von  $x$  ist. Nach Lemma 3.7 ist die Funktion  $z$  auch eine Lösung von (3.25). Es folgt aus (3.28), dass  $z(t)$  eine maximale Lösung ist, da  $I_z \supset I_x$  für jede Lösung  $x \in S$  und somit ist  $z$  nicht echt fortsetzbar.

Sei  $y$  noch eine maximale Lösung von (3.25). Da  $y \in S$ , so gilt  $I_z \supset I_y$ . Da  $y$  maximal ist, so ist  $z$  keine echte Fortsetzung von  $y$ , woraus folgt  $I_z = I_y$ . Somit sind  $z$  und  $y$  identisch gleich.

(b) Sei  $I$  der Definitionsbereich einer maximalen Lösung  $x(t)$ . Dann ist  $I$  ein Intervall, und wir beweisen, dass  $I$  offen ist. Angenommen das Gegenteil gilt,  $I$  ist nicht offen, es gehört z.B. der Endpunkt  $a := \inf I$  zu  $I$ . Dann liegt der Punkt  $(a, x(a))$  in  $\Omega$ , und nach Satz 3.3 hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = x(a) \end{cases}$$

eine Lösung auf einem Intervall  $(a - r, a + r)$  mit  $r > 0$  (Fig. 26).

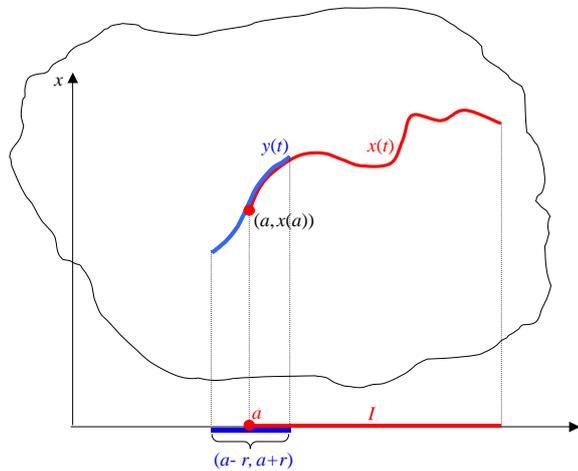


Figure 26: Die Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$

Dann ist die Vereinigung  $z(t)$  der Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$  eine Lösung, die auch für  $t < a$  definiert ist, was bedeutet, dass die Lösung  $x(t)$  auf ein echt größeres Intervall fortsetzbar ist, was im Widerspruch zur Maximalität von  $x$  steht.

(c) Nehmen wir das Gegenteil an, dass also  $x(t)$  eine gewisse kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow a$  nicht verlässt. Dann existiert eine Folge  $t_k \in (a, b)$ , so dass  $t_k \rightarrow a$  und  $(t_k, x_k) \in K$ , wobei  $x_k = x(t_k)$ . Da jede Folge in  $K$  eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in  $K$  besitzt, können wir voraussetzen, dass die ganze Folge  $\{(t_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$  gegen einen Punkt  $(a, q) \in K$  für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert. Wegen  $(a, q) \in \Omega$  existiert ein Zylinder

$$Z := [a - \delta, a + \delta] \times \bar{B}(q, \varepsilon) \subset \Omega,$$

wo die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ . Betrachten wir für ein  $k$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_k) = x_k \end{cases} \quad (3.29)$$

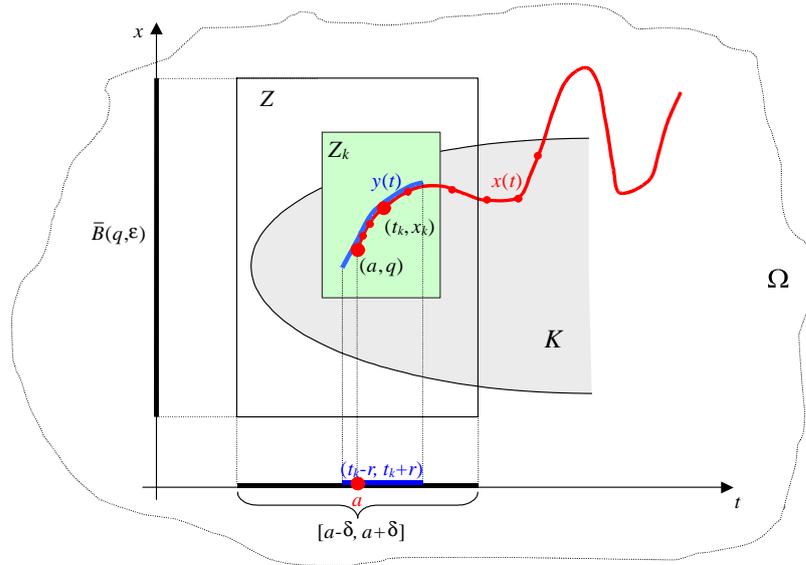


Figure 27: Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$

(Fig. 27). Setzen wir  $M = \sup_Z \|f\|$ .

Ist  $k$  hinreichend groß, so ist  $(t_k, x_k)$  hinreichend nahe bei  $(a, q)$ , und dann ist der Zylinder

$$Z_k = [t_k - \frac{\delta}{2}, t_k + \frac{\delta}{2}] \times \overline{B}(x_k, \frac{\varepsilon}{2})$$

eine Teilmenge von  $Z$ . Insbesondere ist die Funktion  $f$  in  $Z_k$  Lipschitz-stetig in  $x$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$  und

$$\sup_{Z_k} \|f\| \leq \sup_Z \|f\| = M.$$

Nach dem Satz 3.3) hat (3.29) eine Lösung  $y(t)$  im Intervall  $(t_k - r, t_k + r)$ , wobei nach (3.20)

$$r = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}, \frac{1}{2L}\right) > 0.$$

Es ist wichtig zu betonen, dass  $r$  von  $k$  unabhängig ist, da alle Konstanten  $\varepsilon, \delta, L, M$  von  $k$  nicht abhängig sind. Ist  $k$  hinreichend groß, so gilt  $a \in (t_k - r, t_k + r)$ , insbesondere  $t_k - r < a$ , so dass  $y(t)$  auch für die Werte  $t < a$  definiert ist. Da die Funktion  $x(t)$  auch das Anfangswertproblem (3.29) löst, ist die Vereinigung von  $x(t)$  und  $y(t)$  eine Lösung, die im Widerspruch zur Maximalität von  $x$  auch für  $t < a$  definiert ist. ■

### 3.5 Stetigkeit von Lösungen bezüglich $f(t, x)$

Seien  $\Omega$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f, g$  zwei Abbildungen von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$ , die stetig und bezüglich  $x$  lokal Lipschitz-stetig sind, wie im Satz von Picard-Lindelöf. Betrachten wir zwei Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.30)$$

und

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.31)$$

mit gleichem Anfangswert  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .

Fixieren wir  $f$  und betrachten die Funktion  $g$  als variabel. Sei  $x(t)$  eine Lösung von (3.30). Unsere Absicht ist zu zeigen, dass  $y$  nahe bei  $x$  ist, vorausgesetzt, dass  $g$  nahe bei  $f$  ist. Dieses Resultat hat eine theoretische sowie auch praktische Bedeutung. Ist z.B. die Funktion  $f(t, x)$  nur ungefähr bekannt, so löst man statt des genauen AWP (3.30) ein anderes AWP (3.31) mit  $g \approx f$ . In diesem Fall ist es wichtig zu wissen, ob  $y(t) \approx x(t)$  ist, und eine Abschätzung des Approximationsfehlers  $\|x(t) - y(t)\|$  zu bekommen.

**Satz 3.8 (Hauptsatz)** *Sei  $x(t)$  eine Lösung des AWP (3.30), die auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, wobei  $\alpha < t_0 < \beta$ . Dann für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\eta > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: ist  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige und in  $x$  lokal Lipschitz-stetige Funktion mit*

$$\sup_{\Omega} \|f - g\| \leq \eta, \quad (3.32)$$

*so existiert eine auf  $[\alpha, \beta]$  definierte Lösung  $y(t)$  des AWP (3.31), und diese Lösung erfüllt die folgende Ungleichung*

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon. \quad (3.33)$$

**Bemerkung.** Die Lösung  $x(t)$  in diesem Satz soll auf kompaktem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert werden. Ist  $x(t)$  auf offenem Intervall  $(\alpha, \beta)$  definiert, so kann man nicht sichern, dass  $y$  auch auf  $(\alpha, \beta)$  definiert wird.

**Beweis.** Wir fangen mit der folgenden Abschätzung der Differenz  $\|x(t) - y(t)\|$  an.

**Behauptung 1.** *Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  die Lösungen von jeweils (3.30) und (3.31), die auf dem gleichen Intervall  $(a, b)$  definiert sind, wobei  $a < t_0 < b$ . Angenommen, es gibt eine Teilmenge  $K$  von  $\Omega$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (A) *die Graphen von  $x(t)$  und  $y(t)$  sind in  $K$  enthalten;*
  - (B) *die Funktion  $f(t, x)$  ist in  $x$  Lipschitz-stetig auf  $K$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ .*
- Dann gilt*

$$\sup_{t \in (a, b)} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(b-a)} (b-a) \sup_K \|f - g\|. \quad (3.34)$$

Die beiden Funktionen  $x$  und  $y$  erfüllen die Integralgleichungen

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{und} \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds.$$

Nach der Dreiecksungleichung erhalten wir für jedes  $t \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| ds \right|. \end{aligned}$$

Da die Punkte  $(s, x(s))$  und  $(s, y(s))$  Elemente von  $K$  sind, kann der erste Integrand durch die Lipschitz-Bedingung in  $K$  abgeschätzt werden:

$$\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq L \|x(s) - y(s)\|.$$

Der zweite Integral schätzen wir ab wie folgt:

$$\left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| ds \right| \leq \sup_K \|f - g\| |t - t_0| \leq \sup_K \|f - g\| (b - a) =: C,$$

woraus folgt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \right| + C. \quad (3.35)$$

Anwendung von Grönwall-Lemma 2.12 zur Funktion  $\|x(t) - y(t)\|$  ergibt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C e^{L|t-t_0|} \leq e^{L(b-a)} (b-a) \sup_K \|f - g\|,$$

was äquivalent zu (3.34) ist.

Die Ungleichung (3.34) bedeutet insbesondere folgendes: ist  $\sup_\Omega \|f - g\|$  klein, dann ist auch die Differenz  $\|x(t) - y(t)\|$  klein, was im Grunde die Behauptung von Satz 3.8 ist. Aber bevor wir Behauptung 1 anwenden können, müssen wir auf die folgenden Fragen antworten:

- warum ist die Lösung  $y(t)$  auf dem ganzen Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert?
- warum existiert eine Teilmenge  $K \subset \Omega$  mit den Eigenschaften (A) und (B)?

Zunächst bilden wir solche Mengen  $K$ . Für jedes  $\varepsilon \geq 0$  betrachten wir die Menge

$$K_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha \leq t \leq \beta, \|x - x(t)\| \leq \varepsilon\}. \quad (3.36)$$

Insbesondere ist  $K_0$  der Graph der Funktion  $x(t)$ , und  $K_\varepsilon$  für  $\varepsilon > 0$  ist eine abgeschlossene  $\varepsilon$ -Umgebung von  $K_0$  bezüglich der Variable  $x$  (Fig. 28).

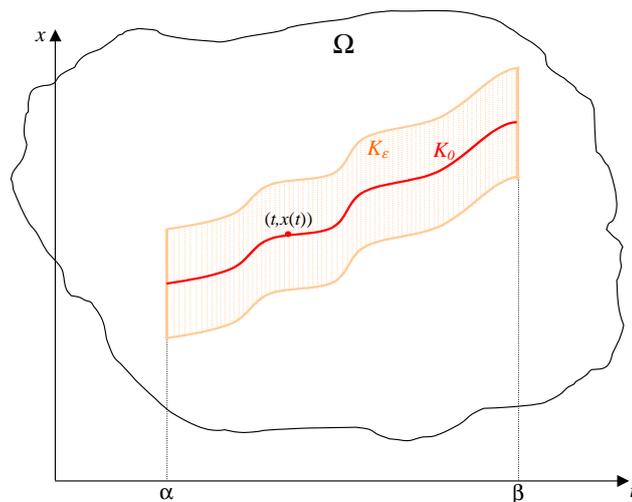


Figure 28: Die Mengen  $K_0$  und  $K_\varepsilon$

Die Menge  $K_0$  ist kompakt, weil  $K_0$  das Bild des Intervalls  $[\alpha, \beta]$  unter der stetigen Abbildung  $t \mapsto (t, x(t))$  ist. Daraus folgt, dass  $K_\varepsilon$  für jedes  $\varepsilon > 0$  auch eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

**Behauptung 2.** *Es existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und  $f$  auf  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist.*

Nach der Lipschitz-Bedingung, existieren für jedes  $(t, x) \in \Omega$  (insbesondere für  $(t, x) \in K_0$ ) die Konstanten  $\varepsilon, \delta > 0$ , so dass der Zylinder

$$Z = [t - \delta, t + \delta] \times \overline{B}(x, \varepsilon)$$

ein Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  auf  $Z$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist (Fig. 29).

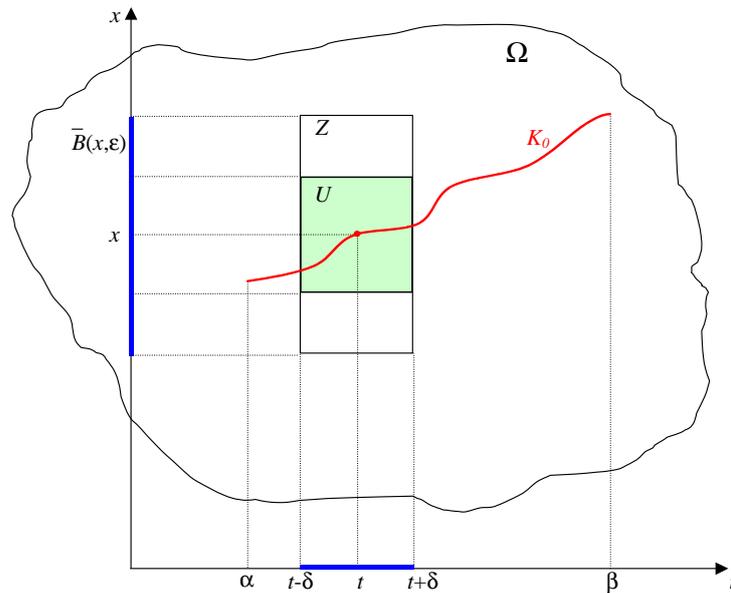


Figure 29: Die Zylinder  $Z$  und  $U$

Betrachten wir auch den offenen Zylinder

$$U = (t - \delta, t + \delta) \times B(x, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Variieren des Punktes  $(t, x)$  in  $K_0$  ergibt eine Überdeckung von  $K_0$  mit den offenen Zylindern  $U$ . Da  $K_0$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $K_0$  mit den offenen Zylindern, d.h. es existieren eine endliche Folge von Punkte  $\{(t_i, x_i)\}_{i=1}^m$  aus  $K_0$  und entsprechende Konstanten  $\varepsilon_i, \delta_i > 0$ , so dass die Zylinder

$$U_i = (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) \times B(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon_i)$$

die Menge  $K_0$  überdecken. Bezeichnen wir mit  $Z_i$  den Zylinder

$$Z_i = [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i] \times \overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$$

und mit  $L_i$  die Lipschitz-Konstante von  $f$  in  $Z_i$  (wir erinnern uns daran, dass nach der Wahl von  $\varepsilon_i, \delta_i$  in jedem Zylinder  $Z_i$  die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist).

Definieren  $\varepsilon$  und  $L$  durch

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i, \quad L = \max_{1 \leq i \leq m} L_i, \quad (3.37)$$

und zeigen, dass die Menge  $K_\varepsilon$  die Eigenschaften (A) und (B) von Behauptung 1 erfüllt, d.h.  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und die Funktion  $f$  auf  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ .

Für jeden Punkt  $(t, x) \in K_\varepsilon$  haben wir nach Definition von  $K_\varepsilon$ , dass  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $(t, x(t)) \in K_0$  und

$$\|x - x(t)\| \leq \varepsilon.$$

Der Punkt  $(t, x(t))$  gehört zu einem Zylinder  $U_i$ , also

$$t \in (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) \quad \text{und} \quad \|x(t) - x_i\| < \frac{1}{2}\varepsilon_i$$

(Fig. 30).

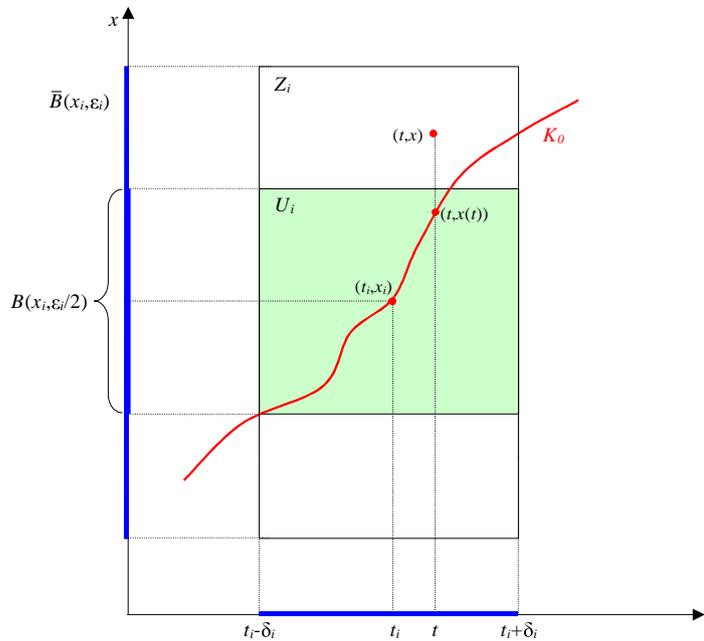


Figure 30: Die Zylinder  $U_i$  und  $Z_i$

Nach der Dreiecksungleichung haben wir

$$\|x - x_i\| \leq \|x - x(t)\| + \|x(t) - x_i\| < \varepsilon + \varepsilon_i/2 \leq \varepsilon_i,$$

wobei man benutzt, dass nach (3.37)  $\varepsilon \leq \varepsilon_i/2$  gilt. Daraus folgt, dass  $x \in B(x_i, \varepsilon_i)$  und somit  $(t, x) \in Z_i$ . Insbesondere erhalten wir  $(t, x) \in \Omega$ , was beweist, dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$ .

Seien  $(t, x), (t, y)$  zwei Punkte aus  $K_\varepsilon$ . Da  $(t, x(t))$  in einem von Zylindern  $U_i$  liegt, so erhalten wir nach dem obigen Argument, dass  $(t, x) \in Z_i$  und auch  $(t, y) \in Z_i$ . Da  $f$  Lipschitz-stetig auf  $Z_i$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L_i$  ist, so erhalten wir

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_i \|x - y\| \leq L \|x - y\|,$$

wobei man (3.37) benutzt. Somit ist  $f$  Lipschitz-stetig in  $x$  in  $K_\varepsilon$ , was in Behauptung 2 zu beweisen war.

Jetzt beweisen wir die Existenz einer Lösung  $y(t)$  von (3.31), die auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist. Es folgt aus Behauptung 2, dass für hinreichend kleine Werte von  $\varepsilon > 0$  die Menge  $K_\varepsilon$  in  $\Omega$  liegt und die Funktion  $f$  in  $K_\varepsilon$  Lipschitz stetig in  $x$  ist, mit einer Lipschitz-Konstante  $L$ . Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die maximale Lösung von (3.31). Nach Satz 3.6 ist  $I$  ein offenes Intervall, und  $t_0 \in I$ . Wir bestimmen zunächst ein Intervall  $(a, b)$ , wo die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  definiert sind und ihre Graphen über  $(a, b)$  in  $K_\varepsilon$  liegen. Wegen  $y(t_0) = x_0$  gehört der Punkt  $(t_0, y(t_0))$  des Graphen von  $y(t)$  zu  $K_\varepsilon$ .

Nach dem Satz 3.6 verlässt der Graph von  $y(t)$  die Menge  $K_\varepsilon$  für  $t$  gegen die Endpunkte von  $I$ , also  $(t, y(t)) \notin K_\varepsilon$ , wenn  $t$  nahe bei den Endpunkten von  $I$  ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} a &= \sup \{t \in I, t < t_0 : (t, y(t)) \notin K_\varepsilon\}, \\ b &= \inf \{t \in I, t > t_0 : (t, y(t)) \notin K_\varepsilon\}, \end{aligned}$$

so dass  $a, b \in I$  und  $a < t_0 < b$ . Wir betonen, dass  $y(t)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert ist. Für jedes  $t \in (a, b)$  haben wir nach Definition von  $a$  und  $b$ , dass  $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$  und somit  $t \in [\alpha, \beta]$ , woraus  $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$  folgt. Man kann auch sagen, dass  $[a, b]$  maximales Intervall ist mit der Eigenschaft, dass der Graph von  $y(t)$  über  $[a, b]$  in  $K_\varepsilon$  enthalten ist (Fig. 31).

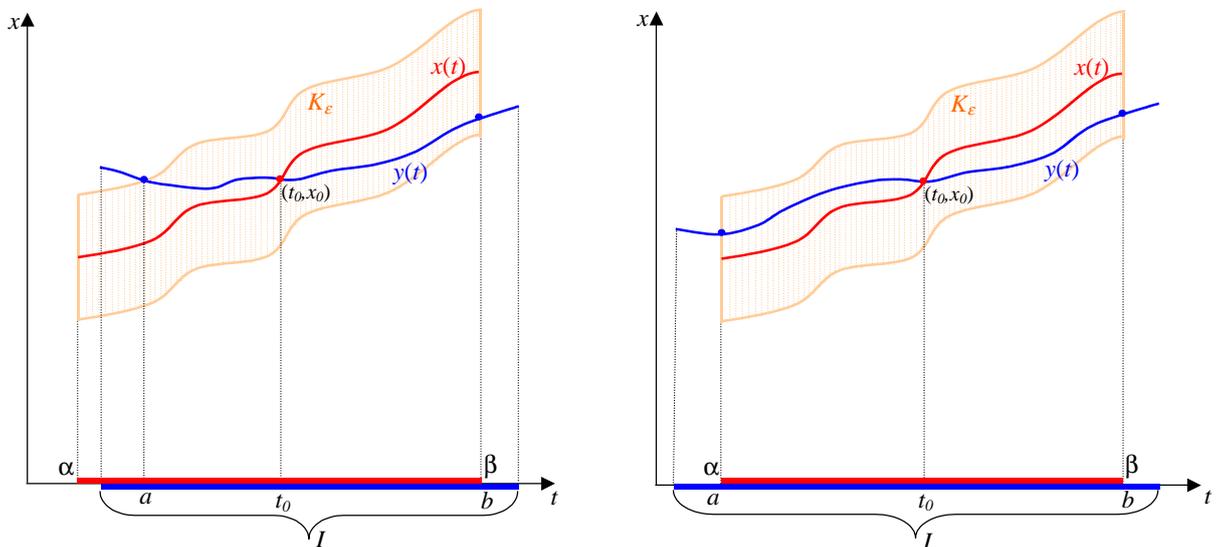


Figure 31: Definition des Intervalls  $[a, b]$ . Zwei Fälle:  $a > \alpha$  und  $a = \alpha$ .

Jetzt, im letzten Schritt des Beweises, zeigen wir, dass  $[a, b] = [\alpha, \beta]$ . Daraus wird es folgen, dass die Lösung  $y(t)$  auf ganzem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist und für jedes  $t \in [\alpha, \beta]$  gilt  $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$ , also

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon,$$

was zu beweisen war. Verwenden wir Behauptung 1 in  $K = K_\varepsilon$ . Alle Voraussetzungen von Behauptung 1 sind erfüllt: die beiden Funktionen  $x, y$  sind auf  $(a, b)$  definiert, ihre Graphen liegen in  $K_\varepsilon$ , die Funktion  $f$  ist in  $K_\varepsilon$  Lipschitz nach Behauptung 2. Somit erhalten wir nach (3.34), dass

$$\sup_{t \in (a, b)} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(b-a)} (b-a) \sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|. \quad (3.38)$$

Angenommen, dass

$$\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\| \leq \eta := \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} e^{-L(\beta - \alpha)},$$

so erhalten wir

$$\sup_{t \in (a, b)} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) \eta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für  $t \rightarrow a+$  folgt es aus (3.38), dass

$$\|x(a) - y(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.39)$$

Zeigen wir, dass  $a = \alpha$ . In der Tat, gilt  $a > \alpha$ , so sind die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  in einem Intervall  $(a - r, a + r)$  mit hinreichend kleinem  $r > 0$  definiert, und es gilt in diesem Intervall  $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$  und somit  $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$ , insbesondere für  $t \in (a - r, a]$ , was im Widerspruch zur Definition von  $a$  ist. Mit gleichem Argument zeigt man, dass  $b = \beta$ . ■

Aus dem Beweis ergibt sich die folgende Verfeinerung von dem Satz 3.8.

**Korollar 3.9** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.8 sei  $\varepsilon > 0$  eine Konstante, so dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und  $f(t, x)$  auf  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$  ist (wobei  $K_\varepsilon$  durch (3.36) definiert ist). Ist  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  hinreichend klein, so hat das AWP (3.31) eine Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$ , die die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\sup_{[\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) \sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|. \quad (3.40)$$

**Beweis.** Nach dem Beweis von Satz 3.8 wissen wir, dass die Kleinheit von  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  die Identität  $[a, b] = [\alpha, \beta]$  ergibt. Dann folgt (3.40) aus (3.38). ■

### 3.6 Stetigkeit von Lösungen in Parameter

Betrachten wir das folgende Anfangswertproblem mit einem Parameter  $s$ :

$$\begin{cases} x' = f(t, x, s) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.41)$$

wobei  $f$  eine Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist und  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  ist. Hier sei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}^m$ , und das Tripel  $(t, x, s)$  wird wie folgt mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  identifiziert:

$$(t, x, s) = (t, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m).$$

Wie soll man das AWP (3.41) verstehen? Für jedes  $s \in \mathbb{R}^m$  betrachten wir die offene Menge

$$\Omega_s = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : (t, x, s) \in \Omega\}.$$

Alternativ kann  $\Omega_s$  definiert werden als der Durchschnitt  $\Omega \cap H_s$  mit der Hyper-ebene

$$H_s = \{(t, x, s) \in \mathbb{R}^{n+m+1} : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\},$$

die mit  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wird. Wir betonen, dass  $\Omega_s$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Ist  $(t, x) \in \Omega_s$ , dann gilt  $(t, x, s) \in \Omega$  und somit existiert eine Kugel  $B$  in  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  mit Zentrum an  $(t, x, s)$ , die in  $\Omega$  enthalten ist. Dann ist der Durchschnitt  $B \cap H_s$  eine Kugel in  $H_s$  mit Zentrum  $(t, x)$ , die in  $\Omega_s$  enthalten ist, woraus folgt, dass  $\Omega_s$  offen ist (Fig. 32).

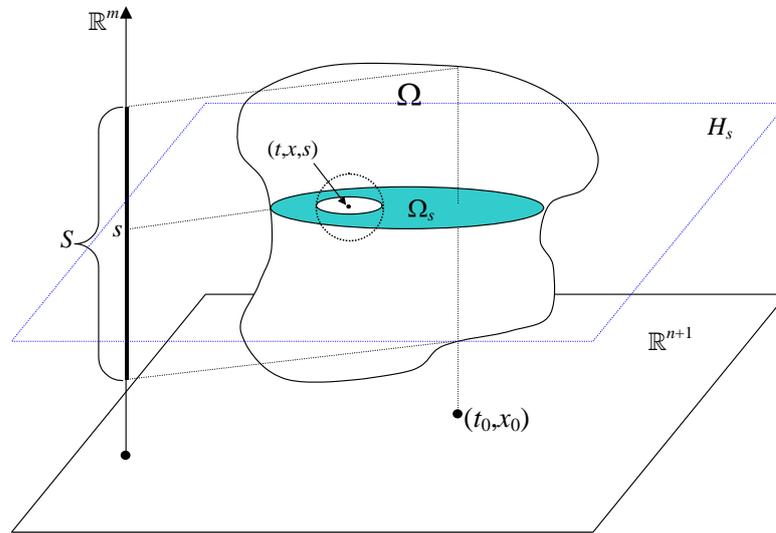


Figure 32: Menge  $\Omega_s$

Gegeben sei  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , bezeichnen wir mit  $S$  die Menge der Werte von  $s$  mit  $(t_0, x_0) \in \Omega_s$ , also

$$S = \{s \in \mathbb{R}^m : (t_0, x_0) \in \Omega_s\} = \{s \in \mathbb{R}^m : (t_0, x_0, s) \in \Omega\}.$$

Wir setzen immer voraus, dass  $S$  nicht leer ist, und betrachten für jedes  $s \in S$  das Anfangswertproblem (3.41) im Definitionsbereich  $\Omega_s$ .

Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist stetig in  $(t, x, s)$  in  $\Omega$  und für jedes  $s \in S$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$  in  $\Omega_s$ . Nach Satz 3.6 existiert für jedes  $s \in S$  die maximale Lösung von (3.41), die mit  $x(t, s)$  bezeichnet wird. Sei  $I_s$  der Definitionsbereich der Funktion  $t \mapsto x(t, s)$ , also  $I_s$  ein offenes Intervall. Der Definitionsbereich  $U$  der Funktion  $(t, s) \mapsto x(t, s)$  ist wie folgt (cf. Fig. 33):

$$U = \{(t, s) \in \mathbb{R}^{m+1} : s \in S, t \in I_s\}.$$

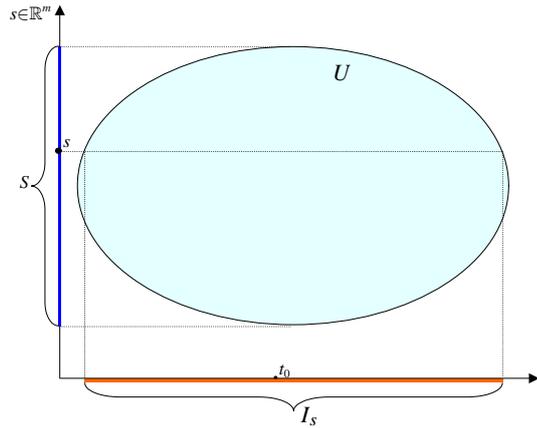


Figure 33: Die Menge  $U$

**Satz 3.10** *Unter den obigen Voraussetzungen ist die Menge  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{m+1}$ , und die Funktion  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig bezüglich  $(t, s)$ .*

**Beweis.** Fixieren wir einen Wert  $s_0 \in S$  und betrachten die Lösung  $x(t) = x(t, s_0)$ , die auf dem Intervall  $I_{s_0}$  definiert ist. Sei  $[\alpha, \beta]$  ein Teilintervall von  $I_{s_0}$  mit  $\alpha < t_0 < \beta$ . Wir beweisen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$[\alpha, \beta] \times \bar{B}(s_0, \delta) \subset U, \quad (3.42)$$

was die Offenheit von  $U$  implizieren wird. Die Kugeln in allen Räumen  $\mathbb{R}^k$  werden bezüglich der  $\infty$ -Norm betrachtet, so dass das Produkt von zwei Kugeln wieder eine Kugel ist (Fig. 34).

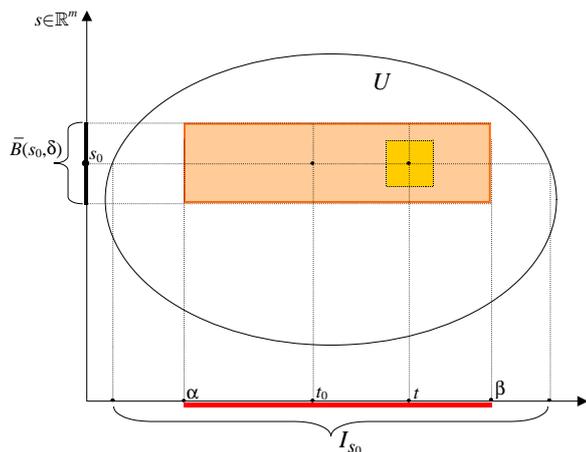


Figure 34: Die Menge  $U$  ist offen

Die Funktion  $x(t)$  löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $f(t, x) := f(t, x, s_0)$ . Betrachten wir noch einen Wert von  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$  und die Funktion  $y(t) = x(t, s)$ , die das folgende Anfangswertproblem löst:

$$\begin{cases} y' = g(t, y), \\ y(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $g(t, y) = f(t, y, s)$ . Um (3.42) zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass die Lösung  $y(t)$  auf dem ganzen Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, vorausgesetzt, dass  $\|s - s_0\|$  hinreichend klein ist, also dass  $\delta$  hinreichend klein ist. Dafür betrachten wir die Menge

$$K_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha \leq t \leq \beta, \|x - x(t)\| \leq \varepsilon\},$$

(vgl. der Beweis von Satz 3.8), die für hinreichend kleines  $\varepsilon$  eine Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$  ist, und die Funktion  $f(t, x)$  in  $K_\varepsilon$  Lipschitz-stetig in  $x$  ist mit einer Lipschitz-Konstanten  $L$ . Da  $K_\varepsilon$  eine kompakte Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$  ist, so gilt für hinreichend kleines  $\delta > 0$  die Inklusion

$$K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta) \subset \Omega,$$

was mit dem gleichen Argument bewiesen wird wie die Inklusion  $K_\varepsilon \subset \Omega_{s_0}$  (Fig. 35).

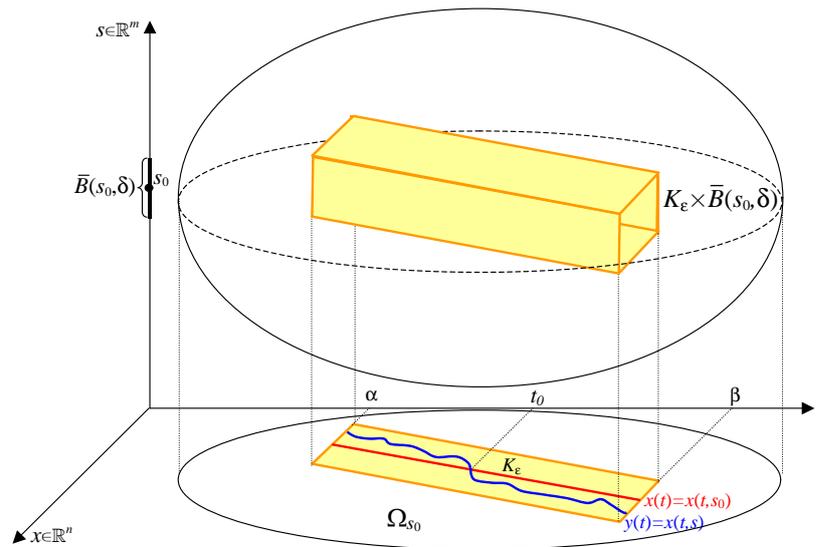


Figure 35: Die Mengen  $K_\varepsilon$  und  $K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta)$

Insbesondere gilt  $K_\varepsilon \subset \Omega_s$  für alle  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$ , und somit ist  $g(t, y)$  auch auf  $K_\varepsilon$  definiert. Da die Funktion  $f(t, x, s)$  stetig ist, so ist sie gleichmäßig stetig auf jeder kompakten Teilmenge von  $\Omega$ , insbesondere auf  $K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta)$ . Daraus folgt, dass

$$\sup_{(t,x) \in K_\varepsilon} \|f(t, x) - g(t, x)\| = \sup_{(t,x) \in K_\varepsilon} \|f(t, x, s_0) - f(t, x, s)\| \rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, \quad (3.43)$$

also, es wird  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  für  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$  beliebig klein sein, vorausgesetzt  $\delta$  ist hinreichend klein. Angenommen dies, erhalten wir nach dem Korollar 3.9, dass die Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, woraus (3.42) folgt.

Darüber hinaus ergibt die Ungleichung (3.40) in Korollar 3.9 folgendes:

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|y(t) - x(t)\| \leq C \sup_{(t, x) \in K_\epsilon} \|f(t, x) - g(t, x)\|, \quad (3.44)$$

wobei  $C := e^{L(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha)$ . Es folgt aus (3.43) und (3.44), dass

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| \rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0. \quad (3.45)$$

Somit ist die Funktion  $s \mapsto x(t, s)$  stetig in  $s = s_0$  ist, und zwar gleichmäßig bezüglich  $t \in [\alpha, \beta]$ . Da  $x(t, s)$  für jedes  $s$  stetig in  $t$  ist, es folgt daraus, dass  $x$  stetig in  $(t, s)$  ist.

In der Tat zeigen wir, dass für jedes  $(t_0, s_0) \in U$  (wobei  $t_0 \in (\alpha, \beta)$  nicht unbedingt der Anfangswert ist) gilt  $x(t, s) \rightarrow x(t_0, s_0)$  für  $(t, s) \rightarrow (t_0, s_0)$ . Anwendung von (3.45) und die Stetigkeit der Funktion  $x(t, s_0)$  in  $t$  ergeben

$$\begin{aligned} \|x(t, s) - x(t_0, s_0)\| &\leq \|x(t, s) - x(t, s_0)\| + \|x(t, s_0) - x(t_0, s_0)\| \\ &\leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| + \|x(t, s_0) - x(t_0, s_0)\| \\ &\rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, t \rightarrow t_0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Als ein Beispiel von Anwendung von Satz 3.10, betrachten wir die Abhängigkeit der Lösung von dem Anfangswert.

**Korollar 3.11** *Betrachten wir das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.46)$$

wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion in einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist. Sei  $f$  in  $\Omega$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . Für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  bezeichnen wir mit  $x(t, t_0, x_0)$  die maximale Lösung von (3.46). Dann ist die Funktion  $x(t, t_0, x_0)$  auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+2}$  definiert und stetig in  $(t, t_0, x_0)$ .

**Beweis.** Betrachten wir eine neue Funktion  $y(t) = x(t + t_0) - x_0$ , die die folgende DGL erfüllt:

$$y'(t) = x'(t + t_0) = f(t + t_0, x(t + t_0)) = f(t + t_0, y(t) + x_0).$$

Betrachten wir die Variable  $s := (t_0, x_0)$  als einen Parameter der Dimension  $n + 1$  und definieren eine Funktion  $F$  durch

$$F(t, y, s) = f(t + t_0, y + x_0).$$

Dann löst  $y(t)$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = F(t, y, s) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Der Definitionsbereich der Funktion  $F$  enthält den Punkt  $(t, y, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$  genau dann, wenn

$$(t + t_0, y + x_0) \in \Omega,$$

woraus folgt, dass der Definitionsbereich von  $F$  die offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{2n+2}$  ist, die das Urbild von  $\Omega$  unter der Abbildung  $(t, y, t_0, x_0) \mapsto (t + t_0, y + x_0)$  ist. Da die Funktion  $F(t, y, s)$  stetig in  $(t, y, s)$  und lokal Lipschitz-stetig in  $y$  ist, erhalten wir nach Satz 3.10, dass die maximale Lösung  $y = y(t, s)$  auf einer offenen Menge definiert und stetig in  $(t, s)$  ist. Somit ist die Funktion  $x(t, t_0, x_0) = y(t - t_0, t_0, x_0) + x_0$  auch auf einer offenen Menge definiert und stetig in  $(t, t_0, x_0)$ . ■

## 3.7 Differenzierbarkeit von Lösungen in Parameter

### 3.7.1 Die Variationsgleichung

Betrachten wir wieder das Anfangswertproblem mit Parameter  $s \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x' = f(t, x, s), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.47)$$

wobei  $f$  eine Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist,  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  ist, und

$$(t, x, s) = (t, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m).$$

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für die Ableitung von  $f$  in  $x$ :

$$f_x = \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right),$$

wobei  $i = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $k = 1, \dots, n$  der Spaltenindex sind, so dass  $f_x$  eine  $n \times n$  Matrix ist. Diese Matrix heißt auch die *Jacobi-Matrix* von  $f$  in  $x$ . Analog definieren wir die Ableitung von  $f$  in  $s$ :

$$f_s = \partial_s f = \frac{\partial f}{\partial s} := \left( \frac{\partial f_i}{\partial s_l} \right),$$

wobei  $i = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $l = 1, \dots, m$  der Spaltenindex sind, so dass  $f_s$  eine  $n \times m$  Matrix ist. Wir betrachten die Ableitungen  $f_x$  und  $f_s$  als Funktionen auf  $\Omega$  mit Werten in jeweils  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

Nach Lemma 3.1, ist  $f_x$  stetig in  $\Omega$ , dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig in  $x$ . In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass  $f, f_x, f_s$  stetig in  $\Omega$  sind, so dass die obigen Ergebnisse verwendbar sind. Wir untersuchen die Existenz und die Eigenschaften der Ableitung  $y = \partial_s x$ .

Sei  $x(t, s)$  die maximale Lösung von (3.47). Nach Satz 3.10 ist der Definitionsbereich  $U$  von  $x(t, s)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{m+1}$  und die Funktion  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig.

**Satz 3.12 (Hauptsatz)** *Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist in  $\Omega$  stetig und stetig differenzierbar in  $x$  und  $s$ . Dann ist die Funktion  $x(t, s)$  stetig differenzierbar in  $(t, s) \in U$  und die Ableitung  $y = \partial_s x$  löst das folgende Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y' = f_x(t, x(t, s), s)y + f_s(t, x(t, s), s), \\ y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Wir beweisen diesen Satz später. Die Ableitung  $\partial_s x = \left( \frac{\partial x_k}{\partial s_l} \right)$  ist eine  $n \times m$  Jacobi-Matrix, wobei  $k = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $l = 1, \dots, m$  der Spaltenindex sind. Deshalb nimmt die Funktion  $y(t, s) = \partial_s x$  die Werte in  $\mathbb{R}^{n \times m}$  an. Die beiden Terme auf der rechten Seite von (3.48) sind auch  $n \times m$  Matrizen:  $f_s$  ist eine  $n \times m$  Matrix nach Definition, und  $f_x y$  ist das Produkt von der  $n \times n$  Matrix  $f_x$  und der  $n \times m$  Matrix  $y$ , was wieder eine  $n \times m$  Matrix ist.

Die Bezeichnung  $f_x(t, x(t, s), s)$  bedeutet, dass man erst die Ableitung  $f_x(t, x, s)$  berechnet und danach den Wert von  $x = x(t, s)$  einsetzt. Die gleiche Erklärung gilt auch für  $f_s(t, x(t, s), s)$ .

Die DGL in (3.48) heißt die *Variationsgleichung* von der DGL  $x' = f(t, x, s)$  entlang der Lösung  $x(t, s)$ .

Wir betonen, dass die Variationsgleichung linear ist. In der Tat für jedes  $s$  kann die Variationsgleichung in der Form

$$y' = a(t)y + b(t)$$

geschrieben werden, wobei

$$a(t) = f_x(t, x(t, s), s), \quad b(t) = f_s(t, x(t, s), s).$$

Die Funktionen  $a(t)$  und  $b(t)$  sind stetig, weil  $f$  und  $x(t, s)$  stetig sind. Ist  $I_s$  der Definitionsbereich der Lösung  $t \mapsto x(t, s)$ , so ist  $I_s \times \mathbb{R}^{n \times m}$  der Definitionsbereich der Variationsgleichung. Nach Satz 2.1 existiert die Lösung  $y(t)$  von (3.48) auf dem ganzen Intervall  $I_s$ . Deshalb kann der Satz 3.12 wie folgt verstanden werden: sind  $x(t, s)$  die Lösung von (3.47) auf  $I_s$  und  $y(t)$  die Lösung von (3.48) auf  $I_s$ , dann gilt  $y(t) = \partial_s x(t, s)$  für alle  $t \in I_s$ .

Somit liefert der Satz 3.12 die Methode für Bestimmung der Ableitung  $\partial_s x(t, s)$  für einen Wert von  $s$ , ohne die Lösung  $x(t, s)$  für alle  $s$  berechnen zu müssen.

**Beispiel.** Betrachten wir das Anfangswertproblem mit Parameter

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2s/t \\ x(1) = -1 \end{cases}$$

im Bereich  $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (also,  $t > 0$  und  $x, s$  sind beliebig reell). Berechnen wir  $x(t, s)$  und  $\partial_s x$  für  $s = 0$ . Da die Funktion  $f(t, x, s) = x^2 + 2s/t$  stetig differenzierbar in  $(x, s)$  ist, ist die Lösung  $x(t, s)$  stetig differenzierbar in  $(t, s)$ .

Für  $s = 0$  haben wir das AWP

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = -1, \end{cases}$$

das man löst und erhält  $x(t, 0) = -\frac{1}{t}$ . Da  $f_x = 2x$  und  $f_s = 2/t$ , so erhalten wir die Variationsgleichung entlang dieser Lösung

$$y' = \left( f_x(t, x, s)|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) y + \left( f_s(t, s, x)|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) = -\frac{2}{t}y + \frac{2}{t}.$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung der Form  $y' = a(t)y + b(t)$ , die man mit Hilfe der Identität

$$y = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt$$

löst, wobei  $A(t)$  eine Stammfunktion von  $a(t) = -2/t$  ist (vgl. Satz 1.4). Setzen wir  $A(t) = -2 \ln t$  ein und erhalten

$$y(t) = t^{-2} \int t^2 \frac{2}{t} dt = t^{-2} (t^2 + C) = 1 + Ct^{-2}.$$

Die Anfangsbedingung  $y(1) = 0$  ist mit  $C = -1$  erfüllt, so dass  $y(t) = 1 - t^{-2}$ . Nach Satz 3.12 beschliessen wir, das  $\partial_s x(t, 0) = 1 - t^{-2}$ .

Die Taylorentwicklung von  $x(t, s)$  erster Ordnung in  $s \rightarrow 0$  ist wie folgt:

$$x(t, s) = x(t, 0) + \partial_s x(t, 0) s + o(s) \text{ für } s \rightarrow 0,$$

also

$$x(t, s) = -\frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) s + o(s) \text{ für } s \rightarrow 0.$$

Deshalb erhalten wir für kleine Werte von  $s$  eine Annäherung

$$x(t, s) \approx -\frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) s.$$

Später werden wir die weiteren Terme in der Taylorentwicklung der Lösung bestimmen.

Besprechen wir weiter die Variationsgleichung (3.48). Es ist einfach (3.48) zu gewinnen, vorausgesetzt, dass die gemischten Ableitungen  $\partial_s \partial_t x$  und  $\partial_t \partial_s x$  existieren und sind gleich. Ableitung die Gleichung (3.47) in  $s$  mit Hilfe von Kettenregel ergibt

$$\partial_t \partial_s x = \partial_s (\partial_t x) = \partial_s [f(t, x(t, s), s)] = f_x(t, x(t, s), s) \partial_s x + f_s(t, x(t, s), s),$$

woraus (3.48) folgt nach Einsetzen  $\partial_s x = y$ . Obwohl dieses Argument kein Beweis von Satz 3.12 ist, es hilft die Variationsgleichung zu erinnern.

Die Existenz und die Gleichheit der Ableitungen  $\partial_t \partial_s x, \partial_s \partial_t x$  gelten unter den Bedingungen von Satz 3.12, aber im Beweis erhält man sie erst nach der Variationsgleichung<sup>11</sup> (vgl. die Bemerkung nach dem Beweis).

Man kann die Variationsgleichung (3.48) auch durch die Linearisierung gewinnen, wie folgt. Fixieren wir den Wert  $s = s_0$  und setzen  $x(t) = x(t, s_0)$ . Da  $f(t, x, s)$  stetig differenzierbar in  $x$  und  $s$  ist und somit auch differenzierbar in  $(x, s)$ , können wir für jedes  $t$  schreiben

$$f(t, x, s) = f(t, x(t), s_0) + f_x(t, x(t), s_0) (x - x(t)) + f_s(t, x(t), s_0) (s - s_0) + R,$$

wobei  $R$  der Restterm ist, also

$$R = o(\|x - x(t)\| + \|s - s_0\|) \text{ für } \|x - x(t)\| + \|s - s_0\| \rightarrow 0.$$

Ist  $s$  nahe bei  $s_0$ , dann ist nach Satz 3.10  $x(t, s)$  nahe bei  $x(t)$ , und wir erhalten die Annäherung

$$f(t, x(t, s), s) \approx f(t, x(t), s_0) + a(t) (x(t, s) - x(t)) + b(t) (s - s_0),$$

woraus folgt

$$x'(t, s) \approx f(t, x(t), s_0) + a(t) (x(t, s) - x(t)) + b(t) (s - s_0).$$

Die rechte Seite ist linear bezüglich  $x(t, s)$ , und diese Gleichung heißt die *Linearisierung* der DGL  $x' = f(t, x, s)$  entlang die Lösung  $x(t)$ . Ersetzen  $f(t, x(t), s_0)$  mit  $x'(t)$  und dividieren durch  $s - s_0$  ergibt die folgende ungefähre Gleichung für die Funktion  $z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t)}{s - s_0}$ :

$$z' \approx a(t) z + b(t).$$

Die Ableitung  $y(t) = \partial_s x|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s)$  erfüllt diese Gleichung exakt.

<sup>11</sup>Man könnte die Identität  $\partial_t \partial_s x = \partial_s \partial_t x$  mit Hilfe von Satz von Schwarz beschließen, indem man zunächst die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen  $\partial_t \partial_s x, \partial_s \partial_t x$  zeigt, aber der Beweis von Stetigkeit liefert gleichzeitig auch die Identität.

### 3.7.2 Höhere Ableitungen in $s$

Der folgende Satz ergänzt den Satz 3.12 im Fall, wenn  $f$  die höheren Ableitungen in  $s$  besitzt. Sei  $F$  eine Funktion von Variablen  $a, b, c, \dots$ . Wir schreiben

$$F \in C^k(a, b, \dots),$$

wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  von der Funktion  $F$  in Variablen  $a, b, \dots$  existieren und stetig im Definitionsbereich von  $F$  sind. Z.B., den ersten Teil von Satz 3.12 schreibt man kurz in der Form

$$f(t, x, s) \in C^1(x, s) \Rightarrow x(t, s) \in C^1(t, s).$$

**Satz 3.13** *Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist stetig in  $\Omega$  und  $f(t, x, s) \in C^k(x, s)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $x(t, s)$  die maximale Lösung von (3.47). Dann gilt  $x(t, s) \in C^k(s)$ . Außerdem gilt die folgende Identität für jeden Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  der Ordnung  $|\alpha| \leq k$ :*

$$\partial_t \partial_s^\alpha x = \partial_s^\alpha \partial_t x. \quad (3.49)$$

Ein Multiindex  $\alpha$  ist eine Folge  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  von  $m$  nicht-negativen ganzen Zahlen  $\alpha_i$ , die Ordnung  $|\alpha|$  von  $\alpha$  ist durch  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  definiert, und die Ableitung  $\partial_s^\alpha$  ist durch

$$\partial_s^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s_1^{\alpha_1} \dots \partial s_m^{\alpha_m}}$$

definiert. Wir beweisen diesen Satz später.

Angenommen  $f \in C^2(x, s)$  und  $n = m = 1$ , bestimmen wir mit Hilfe von Satz 3.13 die zweite Ableitung  $z = \partial_{ss}x$ . Wir schreiben auch wie oberhalb  $y = \partial_s x$ . Die erste Ableitung der Gleichung  $\partial_t x = f(t, x, s)$  in  $s$  ergibt

$$\partial_s \partial_t x = f_x(t, x(t, s), s) \partial_s x + f_s(t, x(t, s), s),$$

und nach der zweiten Ableitung erhält man

$$\partial_s^2 \partial_t x = f_x(t, x(t, s), s) \partial_{ss}x + f_{xx}(t, x, s) (\partial_s x)^2 + f_{xs}(t, x, s) \partial_s x + f_{sx}(t, x, s) \partial_s x + f_{ss}(t, x, s).$$

Da nach (3.49) gilt  $\partial_s^2 \partial_t x = \partial_t \partial_s^2 x = \partial_t z$ , so erhalten wir für  $z$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z' = f_x(t, x, s) z + f_{xx}(t, x, s) y^2 + 2f_{xs}(t, x, s) y + f_{ss}(t, x, s) \\ z(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

Natürlich müssen überall  $x$  und  $y$  jeweils durch  $x(t, s)$  und  $y(t, s)$  ersetzt werden.

Die Gleichung (3.50) heißt die *zweite Variationsgleichung* entlang die Lösung  $x(t, s)$ . Sie ist eine lineare DGL und sie hat den gleichen Koeffizient  $f_x(t, x(t, s), s)$  vor der unbekanntem Funktion, wie die erste Variationsgleichung. Analog bestimmt man die Variationsgleichungen höherer Ordnungen.

**Beispiel.** Betrachten wir wieder das AWP

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2s/t \\ x(1) = -1. \end{cases}$$

Wir haben schon für  $s = 0$  die Lösung und die Ableitung in  $s$  bestimmt:

$$x(t) := x(t, 0) = -\frac{1}{t} \quad \text{und} \quad y(t) := \partial_s x(t, 0) = 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Jetzt bestimmen wir die zweite Ableitung  $z(t) = \partial_{ss} x(t, 0)$ . Da

$$f_x = 2x, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xs} = 0, \quad f_{ss} = 0,$$

ist die zweite Variationsgleichung wie folgt:

$$\begin{aligned} z' &= \left( f_x|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) z + \left( f_{xx}|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) y^2 \\ &= -\frac{2}{t} z + 2(1 - t^{-2})^2. \end{aligned}$$

Die Lösung der linearen Gleichung  $z' = a(t)z + b(t)$  mit  $a(t) = -\frac{2}{t}$  und  $b(t) = 2(1 - t^{-2})^2$  ist

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt = t^{-2} \int 2t^2 (1 - t^{-2})^2 dt \\ &= t^{-2} \left( \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{t} - 4t + C \right) = \frac{2}{3} t - \frac{2}{t^3} - \frac{4}{t} + \frac{C}{t^2}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung  $z(1) = 0$  ergibt  $C = \frac{16}{3}$  und somit

$$z(t) = \frac{2}{3} t - \frac{4}{t} + \frac{16}{3t^2} - \frac{2}{t^3}.$$

Dann ist die Taylorentwicklung von  $x(t, s)$  zweiter Ordnung in  $s \rightarrow 0$  wie folgt:

$$\begin{aligned} x(t, s) &= x(t) + y(t)s + \frac{1}{2} z(t) s^2 + o(s^2) \\ &= -\frac{1}{t} + (1 - t^{-2})s + \left( \frac{1}{3} t - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3} \right) s^2 + o(s^2). \end{aligned}$$

Für Vergleich werden auf dem Bild 36 die folgenden Funktionen gezeigt:

1. die Lösung  $x(t, s)$  mit  $s = 0.1$  (schwarz), die sehr präzise mit Hilfe von numerischen Methoden (MAPLE) berechnet worden ist;
2. die Näherungslösung der Ordnung 0, also die Funktion  $-\frac{1}{t}$  (blau);
3. die Näherungslösung der Ordnung 1, also die Funktion  $-\frac{1}{t} + (1 - t^{-2})s$  (grün);
4. die Näherungslösung der Ordnung 2, also die Funktion

$$-\frac{1}{t} + (1 - t^{-2})s + \left( \frac{1}{3} t - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3} \right) s^2 \quad (\text{rot}).$$

Offensichtlich liefert die letzte Funktion die beste Näherung von  $x(t, s)$ .

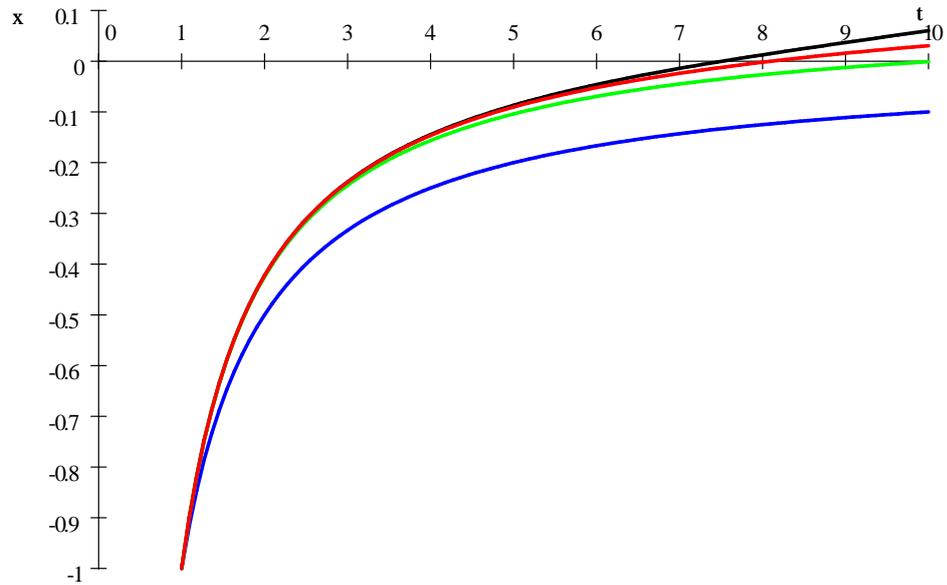


Figure 36: Die Funktion  $x(t, s)$  mit  $s = 0.1$  und Näherungslösungen

Jetzt besprechen wir eine alternative Methode für Bestimmung der Variationsgleichungen erster und zweiter Ordnung. Wie zuvor, seien  $x(t), y(t), z(t)$  jeweils  $x(t, 0), \partial_s x(t, 0)$  und  $\partial_{ss} x(t, 0)$ . Nach Taylor-Formel haben wir für  $s \rightarrow 0$

$$x(t, s) = x(t) + y(t)s + \frac{1}{2}z(t)s^2 + o(s^2). \quad (3.51)$$

Bestimmen wir die ähnliche Entwicklung für  $x' = \partial_t x$ :

$$x'(t, s) = x'(t, 0) + \partial_s x'(t, 0) + \frac{1}{2}\partial_{ss} x'(t, 0)s^2 + o(s^2)$$

und bemerken, dass nach Satz 3.13

$$\partial_s x' = \partial_s \partial_t x = \partial_t \partial_s x = y'$$

und analog

$$\partial_{ss} x' = \partial_s y' = \partial_t \partial_s y = z',$$

woraus folgt

$$x'(t, s) = x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 + o(s^2). \quad (3.52)$$

Einsetzen (3.51) und (3.52) in die DGL

$$x' = x^2 + 2s/t$$

ergibt

$$x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 + o(s^2) = \left( x(t) + y(t)s + \frac{1}{2}z(t)s^2 + o(s^2) \right)^2 + 2s/t$$

und somit

$$x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 = x^2(t) + 2x(t)y(t)s + \left( y(t)^2 + x(t)z(t) \right) s^2 + 2s/t + o(s^2).$$

Gleichsetzen die Terme mit den gleichen Potenzen von  $s$  (was gilt nach der Eindeutigkeit von Taylorentwicklung) ergibt die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}x'(t) &= x^2(t) \\y'(t) &= 2x(t)y(t) + 2s/t \\z'(t) &= 2x(t)z(t) + 2y^2(t).\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung  $x(1, s) = -1$  erhalten wir

$$-1 = x(1) + sy(1) + \frac{s^2}{2}z(1) + o(s^2),$$

woraus folgt

$$x(t) = -1, \quad y(1) = z(1) = 0.$$

Die Lösung von den obigen DGLen mit diesen Anfangsbedingungen ergibt die gleichen Funktionen  $x(t), y(t), z(t)$  wie oberhalb.

### 3.7.3 Konvexität und Hadamard-Lemma

Für den Beweis von Sätzen 3.12 und 3.13 brauchen wir einige Hilfssätze aus Analysis.

**Definition.** Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls  $x, y \in K \Rightarrow [x, y] \subset K$ ; d.h.  $x, y \in K$  ergibt  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$  für jedes  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Beispiel.** Jede Kugel in  $\mathbb{R}^n$  (bezüglich einer beliebigen Norm) ist konvex (siehe Berechnung (3.4) nach dem Lemma 3.1). Man kann auch leicht zeigen, dass das kartesische Produkt von konvexen Mengen ist wieder konvex.

**Lemma 3.14** (Hadamard-Lemma) *Seien  $U$  eine offene konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert eine stetige Abbildung  $\varphi(x, y) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ , die die folgende Identität erfüllt:*

$$f(y) - f(x) = \varphi(x, y)(y - x), \tag{3.53}$$

für alle  $x, y \in U$  (wobei  $\varphi(x, y)(y - x)$  das Produkt der  $l \times n$  Matrix und des Spaltenvektors der Dimension  $n$  ist).

Außerdem gilt für alle  $x \in U$  die folgende Identität

$$\varphi(x, x) = f_x(x). \tag{3.54}$$

Bemerken wir, dass nach der Differenzierbarkeit von  $f$

$$f(y) - f(x) = f_x(x)(y - x) + o(\|y - x\|) \text{ für } y \rightarrow x.$$

Die Identität (3.53) bedeutet, dass die Term  $o(\|x - y\|)$  gelöscht werden kann, vorausgesetzt, dass  $f_x(x)$  durch eine stetige Funktion  $\varphi(x, y)$  ersetzt wird.

Betrachten wir die einfachen Beispiele von Funktionen  $f(x)$  im Fall  $n = l = 1$ . Für  $f(x) = x^2$  haben wir

$$f(y) - f(x) = (y + x)(y - x)$$

so dass (3.53) gilt mit  $\varphi(x, y) = y + x$ . Insbesondere gilt  $\varphi(x, x) = 2x = f'(x)$ . Analog haben wir für  $f(x) = x^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ :

$$f(y) - f(x) = (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1})(y - x),$$

so dass  $\varphi(x, y) = x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}$  und  $\varphi(x, x) = kx^{k-1} = f'(x)$ .

Im Fall  $n = l = 1$  ist der Beweis von Hadamard-Lemma einfach, weil man die Funktion  $\varphi$  wie folgt definieren kann:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, & y \neq x, \\ f'(x), & y = x, \end{cases}$$

die offensichtlich die beiden Identitäten (3.53) und (3.54) erfüllt. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $\varphi$  stetig ist. Die Funktion  $\varphi$  ist offensichtlich stetig in jedem Punkt  $(x, y)$  mit  $x \neq y$ . Sie ist auch stetig in  $(x, x)$  weil für jede Folge  $\{(x_k, y_k)\}$  mit  $(x_k, y_k) \rightarrow (x, x)$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt

$$\varphi(x_k, y_k) = \begin{cases} \frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}, & x_k \neq y_k, \\ f'(x_k), & x_k = y_k, \end{cases} = f'(\xi_k) \rightarrow f'(x) = \varphi(x, x),$$

wobei nach dem Mittelwertsatz  $\xi_k \in [x_k, y_k]$ , also  $\xi_k \rightarrow x$  und  $f'(\xi_k) \rightarrow f'(x)$  nach der Stetigkeit von  $f'(x)$ .

Dieses Argument funktioniert für  $n > 1$  nicht, weil man im Fall  $n > 1$  durch  $y - x$  nicht dividieren kann. Im allgemeinen Fall benutzt man eine andere Methode. Darüber hinaus brauchen wir eine Verallgemeinerung von Hadamard-Lemma, wenn die Funktion  $f$  von  $(t, x)$  abhängt, nicht nur von  $x$ .

**Lemma 3.15** (Verallgemeinerung von Hadamard-Lemma) *Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  so dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Menge*

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \Omega\}$$

*konvex ist (vgl. Fig. 37). Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetige Funktion, die in  $x$  stetig differenzierbar ist. Setzen wir*

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : t \in \mathbb{R}, x, y \in \Omega_t\} \\ &= \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : (t, x) \in \Omega, (t, y) \in \Omega\}. \end{aligned}$$

*Dann existiert eine stetige Abbildung  $\varphi(t, x, y) : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ , die die folgende Identität erfüllt*

$$f(t, y) - f(t, x) = \varphi(t, x, y)(y - x) \quad (3.55)$$

*für alle  $(t, x, y) \in \Omega'$ . Außerdem gilt für alle  $(t, x) \in \Omega$  die folgende Identität*

$$\varphi(t, x, x) = f_x(t, x). \quad (3.56)$$

Z.B., für die Menge  $\Omega = I \times U$ , wobei  $I$  ein Intervall ist und  $U \subset \mathbb{R}^n$ , erhalten wir

$$\Omega_t = \begin{cases} U, & t \in I \\ \emptyset, & t \notin I \end{cases}$$

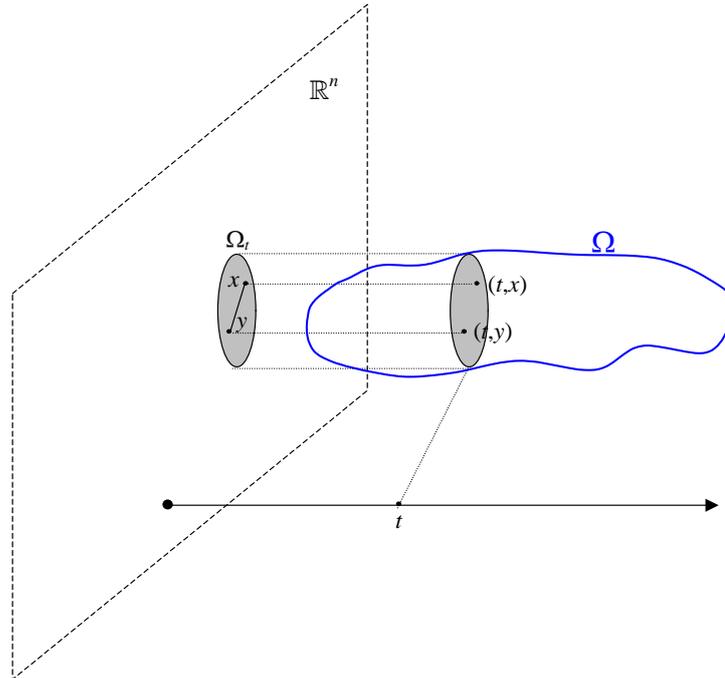


Figure 37: Die Mengen  $\Omega$  und  $\Omega_t$

und  $\Omega' = I \times U \times U$ . Ist die Funktion  $f(t, x)$  unabhängig von  $t$  und somit in einer Menge  $\Omega = \mathbb{R} \times U$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$  definiert, so führt sich Lemma 3.15 auf Lemma 3.14 zurück.

**Beweis von Lemma 3.15.** Die Identität (3.55) ist äquivalent zu

$$f_k(t, y) - f_k(t, x) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ki}(t, x, y) (y_i - x_i),$$

für alle  $k = 1, \dots, l$ . Offensichtlich lässt sich jedes  $k$  unabhängig von anderen Werten behandeln. Fixieren wir ein  $k$  und setzen  $f_k \equiv f$ ,  $\varphi_{ki} \equiv \varphi_i$ . Äquivalent bedeutet es, dass wir weiter den Fall  $l = 1$  betrachten (natürlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit).

Somit ist jetzt  $f$  eine reellwertige Funktion, und wir müssen beweisen, dass es  $n$  reellwertige stetige Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  auf  $\Omega'$  gibt, die die folgende Identität erfüllen

$$f(t, y) - f(t, x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x, y) (y_i - x_i), \quad (3.57)$$

für alle  $(t, x, y) \in \Omega'$ . Fixieren wir einen Punkt  $(t, x, y) \in \Omega'$  und betrachten die Funktion

$$F(\lambda) = f(t, x + \lambda(y - x))$$

für  $\lambda \in [0, 1]$ . Da  $x, y \in \Omega_t$  und  $\Omega_t$  konvex ist, so liegt der Punkt  $x + \lambda(y - x) = (1 - \lambda)x + \lambda y$  in  $\Omega_t$ . Dann gilt  $(t, x + \lambda(y - x)) \in \Omega$  und somit ist die Funktion  $F(\lambda)$  wohldefiniert für alle  $\lambda \in [0, 1]$ .

Offensichtlich gilt  $F(0) = f(t, x)$ ,  $F(1) = f(t, y)$ . Nach der Kettenregel ist die Funktion  $F(\lambda)$  stetig differenzierbar und

$$F'(\lambda) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x))(y_i - x_i).$$

Nach Fundamentalsatz der Analysis erhalten wir

$$\begin{aligned} f(t, y) - f(t, x) &= F(1) - F(0) \\ &= \int_0^1 F'(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x))(y_i - x_i) d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x, y)(y_i - x_i), \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi_i(t, x, y) = \int_0^1 f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) d\lambda. \quad (3.58)$$

Somit gilt die Identität (3.57). Für  $x = y$  erhalten wir

$$f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) = f_{x_i}(t, x),$$

woraus folgt

$$\varphi_i(t, x, x) = \int_0^1 f_{x_i}(t, x) d\lambda = f_{x_i}(t, x)$$

und somit  $\varphi(t, x, x) = f_x(t, x)$ , also (3.56).

Um die Stetigkeit von  $\varphi_i$  zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass  $\Omega'$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ist, da  $\Omega'$  das Vorbild von  $\Omega \times \Omega$  unter der stetigen Abbildung

$$(t, x, y) \mapsto ((t, x), (t, y))$$

ist. Offensichtlich ist  $f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x))$  eine stetige Funktion von  $(t, x, y, \lambda) \in \Omega' \times [0, 1]$ . Nach Integration in  $\lambda$  (vgl. (3.58)) erhält man eine stetige Funktion von  $(t, x, y)$ , was zu beweisen war. ■

Der Vollständigkeit halber beweisen wir die letzte Behauptung, die zu Analysis II gehört (vgl. Lemma 1.10).

**Lemma** Sei  $f(v, \lambda)$  eine reellwertige stetige Funktion auf  $V \times [a, b]$ , wobei  $V$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^k$  ist,  $v \in V$  und  $\lambda \in [a, b]$ . Dann ist die Funktion

$$\varphi(v) = \int_a^b f(v, \lambda) d\lambda$$

stetig in  $v \in V$ .

**Beweis.** Sei  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $V$ , die gegen einen Punkt  $v \in V$  konvergiert. Da  $V$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  so dass  $\overline{B}(v, \varepsilon) \subset V$ . Es folgt aus  $v_k \rightarrow v$ , dass alle Punkte  $v_k$  mit genügend großen  $k$  in der Kugel  $\overline{B}(v, \varepsilon)$  liegen. Da  $f$  stetig auf  $V \times [a, b]$  ist, ist  $f$  gleichmäßig stetig auf jeder kompakten Teilmenge von  $V \times [a, b]$ , insbesondere auf  $\overline{B}(v, \varepsilon) \times [a, b]$ . Daraus folgt, dass

$$f(v_k, \lambda) \rightrightarrows f(v, \lambda) \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

wobei das Zeichen  $\Rightarrow$  die gleichmäßige Konvergenz bezüglich  $\lambda \in [a, b]$  bezeichnet. Da das Integralzeichen und die gleichmäßige Konvergenz vertauschbar sind, erhalten wir

$$\varphi(v_k) = \int_a^b f(v_k, \lambda) d\lambda \rightarrow \int_a^b f(v, \lambda) d\lambda = \varphi(v),$$

also  $\varphi$  stetig ist, was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Man kann auch zeigen, dass  $\varphi(x, y)$  in  $(x, y)$   $k$ -fach stetig differenzierbar ist, vorausgesetzt, dass  $f(t, x)$  in  $x$   $(k+1)$ -fach stetig differenzierbar ist.

### 3.7.4 Beweise von Sätzen 3.12 und 3.13

**Beweis von Satz 3.12.** Erinnern wir uns daran, dass  $x(t, s)$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems (3.47) ist, die auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^{m+1}$  definiert und stetig ist (vgl. Satz 3.10). Im Hauptteil von Beweis zeigen wir, dass alle partielle Ableitungen  $y_{kj} = \partial_{s_j} x_k$  existieren und die folgende DGL erfüllen:

$$\partial_t y_{kj} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_k(t, x(t, s), s) y_{ij} + \partial_{s_j} f_k(t, x(t, s), s). \quad (3.59)$$

Offensichtlich ist die Existenz von der Ableitung  $\partial_{s_j} x$  unabhängig für verschiedene Werte von  $j$ . Auch die Gleichungen (3.59) sind unabhängig für verschiedene Werte von  $j$ . Somit können wir in diesem Teil von Beweis den Index  $j$  fixieren und ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $m = 1$  setzen. Um die Stetigkeit von Ableitungen  $\partial_{s_j} x_k$  in  $(t, s)$  zu beweisen, werden wir am Ende zu den allgemeinen Werten von  $m$  zurückkehren.

Fixieren wir einen Wert  $s_0$  des Parameters  $s$  und beweisen zunächst, dass die Ableitung  $\partial_s x(t, s)$  existiert in  $s = s_0$ . Dafür betrachten wir den Differenzenquotient

$$z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0}$$

und bemerken, dass

$$z' = \frac{x'(t, s) - x'(t, s_0)}{s - s_0} = \frac{f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t, s_0), s_0)}{s - s_0}$$

Weiter verwenden wir das Hadamard-Lemma 3.15 um die Differenz im Zähler bequem darzustellen. Damit werden wir eine DGL für  $z$  ermitteln und mit Hilfe von der DGL zeigen, dass  $\lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s)$  existiert.

Um Lemma 3.15 verwenden zu können, brauchen wir eine offene Teilmenge  $W \subset \Omega$  mit den Eigenschaften:

- die Schnittmenge  $W_t$  ist konvex für alle  $t$ ;
- $(t, x(t, s), s) \in W$  für alle  $s$  in einer Umgebung von  $s_0$ .

Wir bilden die Menge  $W$  mit diesen Eigenschaften wie folgt. Sei  $[\alpha, \beta]$  ein beschränktes abgeschlossenes Teilintervall von  $I_{s_0}$ , wobei  $I_{s_0}$  der Definitionsbereich der Lösung  $x(t, s_0)$  ist. Es reicht zu beweisen, dass  $\partial_s x(t, s)$  existiert in  $s = s_0$  für jedes  $t \in (\alpha, \beta)$ . Wir nehmen immer an, dass  $(\alpha, \beta)$  den Punkt  $t_0$  enthält. Nach dem Beweis von Satz 3.10 existieren hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  mit den folgenden Eigenschaften: die Menge

$$\begin{aligned} V &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha < t < \beta, \|x - x(t, s_0)\| < \varepsilon\} \\ &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha < t < \beta, x \in B(x(t, s_0), \varepsilon)\} \end{aligned}$$

ist eine Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$ , die Lösung  $t \mapsto x(t, s)$  ist für jedes  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  auf dem Intervall  $(\alpha, \beta)$  definiert, und der Graph dieser Lösung liegt in  $V$  (vgl. Fig. 38).

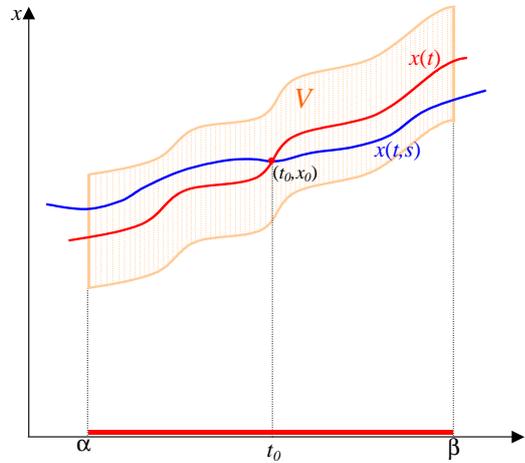


Figure 38: Lösungen  $x(t)$  und  $x(t, s)$

Setzen wir jetzt

$$W := V \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

und bemerken, dass  $W$  offen ist und in  $\Omega$  liegt für hinreichend kleines  $\delta$ . Es folgt, dass für  $t \in (\alpha, \beta)$

$$W_t = B(x(t, s_0), \varepsilon) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

und  $W_t = \emptyset$  für  $t \notin (\alpha, \beta)$  (vgl. Fig. 39). Wir können die  $\infty$ -norm in allen Räumen  $\mathbb{R}^k$  für die Definition der Kugel benutzen. In diesem Fall ist das Produkt zweier Kugel wieder eine Kugel. Dann ist die Menge  $W_t$  eine Kugel in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und somit konvex.

Da die Funktion  $f(t, x, s)$  stetig in  $(t, x, s)$  und stetig differenzierbar in  $(x, s)$  ist, so ist Lemma 3.15 verwendbar mit Funktion  $f(t, x, s)$  im Definitionsbereich  $W$ , mit dem Parameter  $t$  und Funktionsargument  $(x, s)$ . Nach dem Lemma 3.15 erhalten wir die Identität

$$f(t, y, s) - f(t, x, s_0) = \Phi(t, x, s_0, y, s) \begin{pmatrix} y - x \\ s - s_0 \end{pmatrix}$$

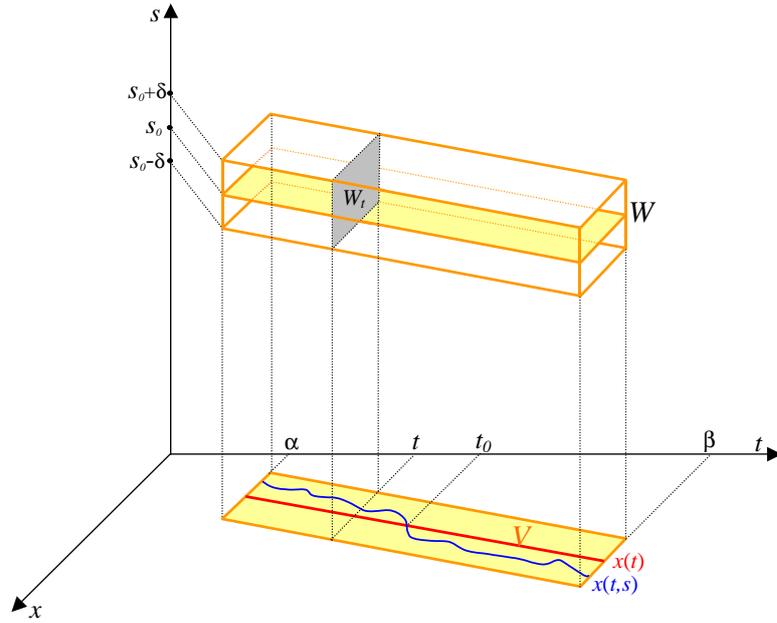


Figure 39: Die Mengen  $W$  und  $W_t$

für alle  $(t, y, s), (t, x, s_0) \in W$ , wobei  $\Phi$  eine stetige Funktion<sup>12</sup> ist. Der Wert von  $\Phi$  ist eine  $n \times (n + 1)$  Matrix. Stellen wir diese Matrix dar wie folgt:

$$\Phi = (\varphi \mid \psi),$$

wobei  $\psi$  die letzte Spalte von  $\Phi$  ist und  $\varphi$  die restliche  $n \times n$  Matrix. Daraus folgt, dass

$$f(t, y, s) - f(t, x, s_0) = \varphi(t, x, s_0, y, s)(y - x) + \psi(t, x, s_0, y, s)(s - s_0).$$

Insbesondere erhalten wir für  $x = x(t, s_0)$  und  $y = x(t, s)$ :

$$\begin{aligned} f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t, s_0), s_0) &= \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s)(x(t, s) - x(t, s_0)) \\ &\quad + \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s)(s - s_0) \\ &= a(t, s)(x(t, s) - x(t, s_0)) + b(t, s)(s - s_0), \end{aligned}$$

wobei the Funktionen

$$a(t, s) = \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) \quad \text{und} \quad b(t, s) = \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) \quad (3.60)$$

stetig in  $(t, s) \in (\alpha, \beta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  sind (und  $s_0$  immer fixiert ist).

<sup>12</sup>Der Definitionsbereich der Funktion  $\Phi(t, x, r, y, s)$  ist die Menge

$$\begin{aligned} W' &= \{(t, x, r, y, s) : (t, x, r) \in W, (t, y, s) \in W\} \\ &= \{(t, x, r, y, s) : \alpha < t < \beta, \|x - x(t, s_0)\| < \varepsilon, \|y - x(t, s_0)\| < \varepsilon, |r - s_0| < \delta, |s - s_0| < \delta\} \end{aligned}$$

Für alle  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \setminus \{s_0\}$  und  $t \in (\alpha, \beta)$  definieren wir die Funktion

$$z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0} \quad (3.61)$$

und bemerken, dass nach (3.47) und (3.60),

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x'(t, s) - x'(t, s_0)}{s - s_0} = \frac{f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t), s_0)}{s - s_0} \\ &= a(t, s)z + b(t, s). \end{aligned}$$

Da auch  $z(t_0, s) = 0$  gilt (weil  $x(t_0, s) = x(t_0, s_0) = x_0$ ), so löst die Funktion  $z(t, s)$  für jedes  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \setminus \{s_0\}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z' = a(t, s)z + b(t, s) \\ z(t_0, s) = 0. \end{cases} \quad (3.62)$$

Da die DGL (3.62) linear ist und the Funktionen  $a$  und  $b$  stetig in

$$(t, s) \in (\alpha, \beta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \quad (3.63)$$

sind, so erhalten wir nach Satz 2.1 (Picard-Lindelöf für lineare Systeme), dass die Lösung des AWP's (3.62) für alle  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  und  $t \in (\alpha, \beta)$  existiert und eindeutig ist. Bezeichnen wir jetzt mit  $z(t, s)$  die Lösung von (3.62), die als Funktion von  $(t, s)$  im Bereich (3.63) definiert ist, und bemerken, dass nach Satz 3.10 die Funktion  $z(t, s)$  stetig in diesem Bereich ist. Andererseits ist die Lösung von (3.62) für  $s \neq s_0$  durch (3.61) gegeben. Nach der Stetigkeit von  $z(t, s)$  in  $s$  erhalten wir

$$\partial_s x(t, s) |_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s) = z(t, s_0).$$

Es folgt, dass die Ableitung  $y(t) = \partial_s x(t, s) |_{s=s_0}$  existiert und mit  $z(t, s_0)$  übereinstimmt, also  $y(t)$  erfüllt das Anfangswertproblem (3.62) mit  $s = s_0$ :

$$\begin{cases} y' = a(t, s_0)y + b(t, s_0), \\ y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

Nach (3.60) und Lemma 3.15 erhalten wir

$$\begin{aligned} (a(t, s_0) \mid b(t, s_0)) &= (\varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s_0), s_0) \mid \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s_0), s_0)) \\ &= \Phi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s_0), s_0) \\ &= f_{(x,s)}(t, x(t, s_0), s_0) \\ &= (f_x(t, x(t, s_0), s_0) \mid f_s(t, x(t, s_0), s_0)) \end{aligned}$$

und somit

$$a(t, s_0) = f_x(t, x(t, s_0), s_0)$$

und

$$b(t, s_0) = f_s(t, x(t, s_0), s_0).$$

Einsetzen in (3.64) ergibt die Variationsgleichung (3.48) für  $y(t)$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion  $x(t, s)$  stetig differenzierbar in  $(t, s)$  ist, d.h. die Ableitungen  $\partial_t x$  und  $\partial_s x$  stetig sind. Dafür kehren wir zum allgemeinen Fall  $s \in \mathbb{R}^m$  zurück, da die Stetigkeit bezüglich aller Komponenten von  $(t, s)$  bewiesen werden soll. Die Ableitung  $\partial_s x = y$  erfüllt die Variationsgleichung (3.48), also

$$\partial_t y = f_x(t, x(t, s), s)y + f_s(t, x(t, s), s) \quad (3.65)$$

und ist somit stetig in  $(t, s)$  nach dem Satz 3.10. Die Ableitung  $\partial_t x$  erfüllt die Identität

$$\partial_t x = f(t, x(t, s), s), \quad (3.66)$$

woraus die Stetigkeit von  $\partial_t x$  in  $(t, s)$  folgt. ■

**Beweis von Satz 3.13.** Induktion nach  $k$ . Für den Induktionsanfang mit  $k = 1$  haben wir  $x \in C^1(s)$  nach dem Satz 3.12. Es folgt aus der DGL (3.66), dass  $\partial_t x$  differenzierbar in  $s$  ist, und wir erhalten nach der Kettenregel

$$\partial_s(\partial_t x) = \partial_s[f(t, x(t, s), s)] = f_x(t, x(t, s), s)\partial_s x + f_s(t, x(t, s), s). \quad (3.67)$$

Andererseits die Variationsgleichung (3.65) ergibt

$$\partial_t(\partial_s x) = \partial_t y = f_x(t, x(t, s), s)\partial_s x + f_s(t, x(t, s), s), \quad (3.68)$$

und wir beschliessen nach dem Vergleich von (3.67) und (3.68), dass

$$\partial_s \partial_t x = \partial_t \partial_s x. \quad (3.69)$$

Induktionsschritt von  $k - 1$  nach  $k$  für  $k \geq 2$ . Angenommen  $f \in C^k(x, s)$ , wir haben auch  $f \in C^{k-1}(x, s)$  und erhalten nach der Induktionsvoraussetzung, dass  $x \in C^{k-1}(s)$ . Setzen wir  $y = \partial_s x$  und benutzen die Variationsgleichung von Satz 3.12:

$$\begin{cases} y' = f_x(t, x, s)y + f_s(t, x, s), \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \quad (3.70)$$

wobei  $x = x(t, s)$ . Da  $f_x, f_s \in C^{k-1}(x, s)$  und  $x(t, s) \in C^{k-1}(s)$ , so beschließen wir, dass die Verkettungen  $f_x(t, x(t, s), s)$  und  $f_s(t, x(t, s), s)$  von der Klasse  $C^{k-1}(s)$  sind. Deshalb ist die rechte Seite von (3.70) von der Klasse  $C^{k-1}(y, s)$ , und nach der Induktionsvoraussetzung erhalten wir, dass  $y \in C^{k-1}(s)$ . Daraus folgt, dass  $x \in C^k(s)$ .

Jetzt beweisen wir die Identität (3.49). Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  ein Multiindex mit  $0 < |\alpha| \leq k$ . Wählen wir einen Index  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\alpha_i \geq 1$  aus und bezeichnen mit  $\beta$  den Index

$$\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m),$$

wobei 1 nur an der Stelle  $i$  subtrahiert wird. Dann gilt die Identität  $\partial_s^\alpha = \partial_s^\beta \partial_{s_i}$  von Differentialoperatoren auf alle Funktionen von  $C^k(s)$ . Da

$$\partial_t x = f(t, x(t, s), s) \in C^k(s),$$

erhalten wir nach (3.69)

$$\partial_s^\alpha \partial_t x = \partial_s^\beta \partial_{s_i} \partial_t x = \partial_s^\beta \partial_t \partial_{s_i} x = \partial_s^\beta \partial_t y_i,$$

wobei  $y_i = \partial_{s_i} x$  die  $i$ -te Spalte der Matrix  $y = \partial_s x$  ist. Nach der Variationsgleichung (3.70) erfüllt  $y_i$  die folgende DGL

$$\partial_t y_i = f_x(t, x, s) y_i + f_{s_i}(t, x, s), \quad (3.71)$$

wobei die rechte Seite zur  $C^{k-1}(y, s)$  gehört. Da  $|\beta| \leq k-1$ , erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung für die DGL (3.71), dass

$$\partial_s^\beta \partial_t y_i = \partial_t \partial_s^\beta y_i,$$

woraus folgt

$$\partial_s^\alpha \partial_t x = \partial_t \partial_s^\beta y_i = \partial_t \partial_s^\beta \partial_{s_i} x = \partial_t \partial_s^\alpha x.$$

■

## 4 Autonome Systeme und Stabilität von Lösungen

### 4.1 Autonome DGLen

Eine *autonome* DGL ist die DGL der Form

$$x' = f(x) \quad (4.1)$$

wobei die Funktion keine explizite Abhängigkeit von  $t$  enthält. Die Funktion  $f(x)$  ist auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert und nimmt die Werte in  $\mathbb{R}^n$  an. Der Definitionsbereich der DGL (4.1) ist somit  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Wir nehmen immer an, dass  $f$  lokal Lipschitz-stetig ist, so dass Satz 3.3 (Picard-Lindelöf) gilt.

Die Menge  $\Omega$  heißt der *Phasenraum* (oder *Zustandsraum*) von (4.1). Jede maximale Lösung  $x : I \rightarrow \Omega$  (wobei  $I$  ein offenes Intervall ist) bestimmt eine *Phasenkurve* oder eine *Trajektorie* von (4.1), die nach Definition die Menge  $\{x(t) \in \Omega : t \in I\}$  ist. Die Gesamtheit von allen Trajektorien heißt das *Phasendiagramm* von (4.1).

Erinnern wir uns daran, dass der Graph von jeder Lösung, d.h. die Integralkurve  $\{(t, x(t)) : t \in I\}$ , eine Teilmenge des Definitionsbereiches  $\mathbb{R} \times \Omega$  ist. Offensichtlich ist die Phasenkurve die Projektion der Integralkurve auf  $\Omega$ .

Die Unabhängigkeit der Funktion  $f$  von  $t$  impliziert die folgenden Eigenschaften der Lösungen.

**Lemma 4.1** *Sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokal Lipschitz-stetige Funktion.*

1. *Ist  $x(t)$  eine Lösung von (4.1), so ist auch die Funktion  $t \mapsto x(t+a)$  eine Lösung von (4.1) für jedes  $a \in \mathbb{R}$ .*
2. *Für jeden Punkt  $x_0 \in \Omega$  existiert genau eine Phasenkurve durch  $x_0$ , bis zur Zeitverschiebung.*
3. *Sei  $x_0 \in \Omega$ . Die konstante Funktion  $x(t) \equiv x_0$  ist eine Lösung von  $x' = f(x)$  genau dann, wenn  $f(x_0) = 0$ .*

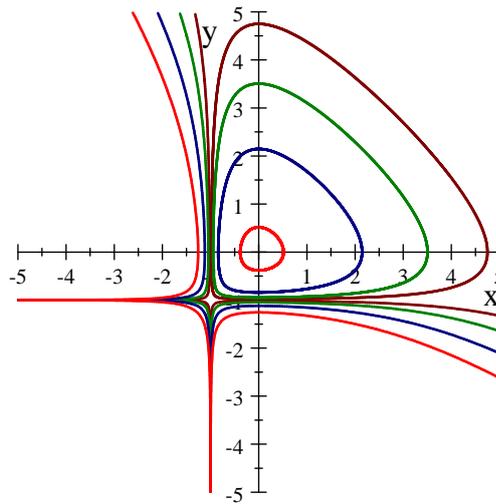


Figure 40: Das Phasendiagramm von (4.2)

**Beweis.** Die Punkte 1 und 3 sind trivial. Beweisen wir den Punkt 2. Die Existenz folgt aus Satz 3.3 (Picard-Lindelöf). Angenommen, zwei Phasenkurven gehen durch einen Punkt. Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  die entsprechenden Lösungen. Dann gilt  $x(t_1) = y(t_2)$  für einige Werte  $t_1, t_2$ . Betrachten wir die Lösungen  $\tilde{x}(t) = x(t + t_1)$  und  $\tilde{y}(t) = y(t + t_2)$ . Dann gilt  $\tilde{x}(0) = \tilde{y}(0)$ , woraus folgt die Gleichheit  $\tilde{x}(t) \equiv \tilde{y}(t)$  für alle  $t$  nach Satz 3.3. Daher erhalten wir  $x(t) \equiv y(t + t_2 - t_1)$ , was zu beweisen war. ■

**Definition.** Jede Nullstelle von  $f$  heißt *Ruhelage* der DGL  $x' = f(x)$ .

Dann ist jede Ruhelage eine konstante Lösung, was diese Bezeichnung erklärt. Es ist häufig der Fall, dass die Ruhelagen eines Systems die Form des Phasendiagramms bestimmen.

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases} \quad (4.2)$$

die teilweise gelöst werden kann, wie folgt. Dividieren die Gleichungen ergibt die trennbare DGL für  $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+y)}{y(1+x)},$$

woraus folgt

$$\int \frac{y dy}{1+y} = - \int \frac{x dx}{1+x}$$

und

$$y - \ln|y+1| + x - \ln|x+1| = C. \quad (4.3)$$

Die Trajektorien von (4.3) sind auf das Bild 40 gezeichnet. Man sieht zwei "Beson-

derheiten" des Phasendiagramms: die Punkte  $(0, 0)$  und  $(-1, -1)$ , die genau die Ruhelagen von (4.2) sind.

**Definition.** Eine Ruhelage  $x_0$  des Systems  $x' = f(x)$  heißt *Ljapunow-stabil* wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  derart, dass jede maximale Lösung  $x(t)$  mit  $\|x(0) - x_0\| < \delta$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist und die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \|x(t) - x_0\| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Sonst heißt  $x_0$  instabil.

Also, die Ljapunow-Stabilität bedeutet, dass

$$x(0) \in B(x_0, \delta) \implies x(t) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Für ein beschränktes Intervall  $[0, T]$  gilt es immer, dass

$$x(0) \in B(x_0, \delta) \implies x(t) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ für alle } t \in [0, T],$$

was aus Korollar 3.11 folgt. Deshalb ist die Hauptfrage der Ljapunow-Stabilität das Verhalten der Lösung für  $t \rightarrow +\infty$ .

**Definition.** Eine Ruhelage  $x_0$  des Systems  $x' = f(x)$  heißt *asymptotisch stabil* wenn  $x_0$  Ljapunow-stabil ist und *attraktiv*, d.h.

$$x(t) \rightarrow x_0 \text{ as } t \rightarrow +\infty,$$

vorausgesetzt  $\|x(0) - x_0\|$  hinreichend klein ist.

Die Ljapunow-Stabilität und die asymptotische Stabilität sind unabhängig von der Wahl der Norm, da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind.

**Bemerkung.** Der Begriff von Stabilität lässt sich auch für beliebige Lösung  $x(t)$  des Systems  $x' = f(t, x)$  definieren. Dann bedeutet die Ljapunow-Stabilität von  $x(t)$ , dass die kleinen Störungen des Anfangswerts  $x(0)$  zu kleinen Störungen von  $x(t)$  für alle  $t > 0$  führen. Die asymptotische Stabilität bedeutet zusätzlich, dass bei kleinen Störungen von  $x(0)$  die Lösung  $x(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  praktisch unverändert bleibt.

Die Stabilität der bestimmten physikalischen Systems hat die große Bedeutung für die Menschheit, z.B. die Stabilität des Sonnensystems. Die mathematische Untersuchung der Stabilität solches komplizierten Systems kann extrem schwierig sein. Die Stabilität von bestimmten Modellen des Sonnensystems wurde von verschiedenen Mathematikern (Laplace, Lagrange, Gauss, Poincaré, Kolmogorov, Vladimir Arnold and Jürgen Moser) bewiesen, aber die Modelle gelten für höchstens 100 Millionen Jahre, und was passiert danach ist unklar.

## 4.2 Stabilität eines linearen Systems

Für jedes lineares System  $x' = Ax$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ist offensichtlich  $x = 0$  eine Ruhelage.

**Satz 4.2** Betrachten wir das System  $x' = Ax$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und setzen

$$\alpha = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \}.$$

- Gilt  $\alpha < 0$ , so ist 0 asymptotisch stabil (und somit auch Ljapunow-stabil) für das System  $x' = Ax$ .
- Gilt  $\alpha \geq 0$ , so ist 0 nicht asymptotisch stabil.
- Gilt  $\alpha > 0$ , so ist 0 instabil.

Im Fall  $\alpha = 0$  kann man die Ljapunow-Stabilität nicht eindeutig bestimmen, wie die Beispiele zeigen.

Den Satz 4.2 beweisen wir später. Jetzt betrachten wir den Fall  $n = 2$ , wenn die vollständige Klassifikation der Fällen von Stabilität möglich ist, sowohl auch die Beschreibung von den Phasendiagrammen.

Seien  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b = \{b_1, b_2\}$  die Jordan-Basis von  $A$ , und  $A^b$  die Jordan-Normalform von  $A$  in dieser Basis. Betrachten wir zunächst den Fall, wenn

$$A^b = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Dann sind  $b_1$  und  $b_2$  die Eigenvektoren mit den Eigenwerten jeweils  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , und nach dem Satz 2.18 die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} b_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} b_2,$$

also in der Basis  $b$

$$x(t) = (C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (4.5)$$

und  $x(0) = (C_1, C_2)$ . Daraus folgt, dass

$$\|x(t)\|_\infty = \max(|C_1 e^{\lambda_1 t}|, |C_2 e^{\lambda_2 t}|) = \max(|C_1| e^{\operatorname{Re} \lambda_1 t}, |C_2| e^{\operatorname{Re} \lambda_2 t}) \leq \|x(0)\|_\infty e^{\alpha t}, \quad (4.6)$$

wobei

$$\alpha = \max(\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2).$$

Ist  $\alpha \leq 0$ , so gilt

$$\|x(t)\|_\infty \leq \|x(0)\|$$

woraus die Ljapunow-Stabilität folgt.

Für  $\alpha < 0$  gilt asymptotische Stabilität nach dem Satz 4.2, aber man sieht es auch aus (4.6), dass  $x(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow +\infty$ .

Ist  $\alpha > 0$ , so ergibt der Satz 4.2 die Instabilität (gleiches kann man auch aus (4.5) bekommen).

Zeichnen wir das Phasendiagramm des Systems  $x' = Ax$  unter der obigen Voraussetzungen in den verschiedenen Fällen.

*Fall*  $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell.

Für die Komponenten  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  der Lösung  $x(t)$  in der Basis  $\{b_1, b_2\}$  haben wir

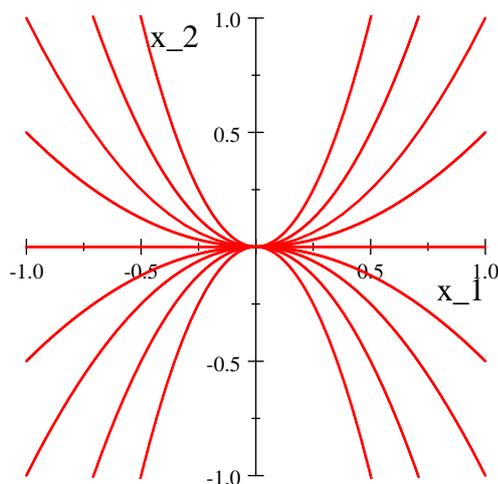
$$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Im Fall  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  erhalten wir die folgende Beziehung zwischen  $x_1$  und  $x_2$ :

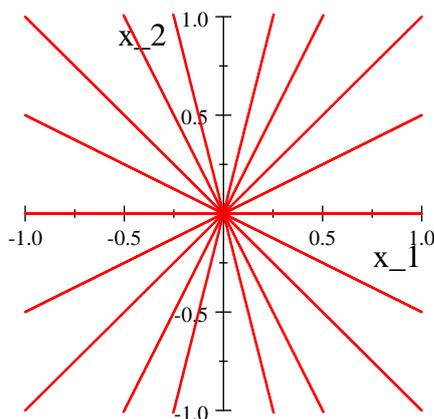
$$x_2 = C |x_1|^\gamma, \quad (4.7)$$

wobei  $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ . Das Phasendiagramm besteht aus den Kurven (4.7) sowohl auch aus den Halbgeraden  $x_1 > 0, x_1 < 0, x_2 > 0, x_2 < 0$ , die den Nullwerten von  $C_2$  und  $C_1$  entsprechen.

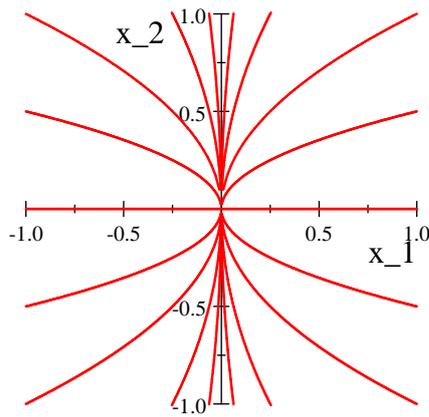
Ist  $\gamma > 0$  (d.h.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  haben gleiches Vorzeichen), so heißt der Typ von Ruhelage der *Knoten*. Man nennt das entsprechende Phasendiagramm auch der *Knoten*. Der Knoten ist (und heißt) stabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , und instabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .



Der Knoten mit  $\gamma > 1$

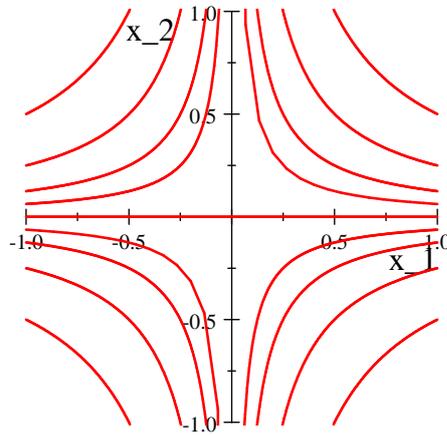


Der Knoten mit  $\gamma = 1$



Der Knoten mit  $0 < \gamma < 1$

Ist  $\gamma < 0$  (d.h.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  haben verschiedene Vorzeichen), so heißt der Typ von Ruhelage der *Sattel*. Der Sattel ist immer instabil, da  $\alpha > 0$ .



Der Sattel

Ist einer (oder die beiden) von  $\lambda_1, \lambda_2$  gleich 0, dann heißt der Typ von Ruhelage *ausgeartet*. Das Phasendiagramm besteht aus den parallelen Geraden oder einzelnen Punkten). Zum Beispiel, im Fall  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$  erhalten wir

$$x(t) = (C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2)$$

so dass die Phasenkurven die horizontalen Geraden sind. Im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  erhalten wir  $x(t) = (C_1, C_2)$  so dass die Phasenkurven die einzelnen Punkte sind.

Fall  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind imaginär, also  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$  und  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ , wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , und  $\beta \neq 0$ .

Sei  $b_1 = u + iv$  mit  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Nach dem Korollar 2.19 erhalten wir die allgemeine reelle Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \operatorname{Re}(e^{(\alpha-i\beta)t} b_1) + C_2 \operatorname{Im}(e^{(\alpha-i\beta)t} b_1) \\ &= C_1 e^{\alpha t} \operatorname{Re}(\cos \beta t - i \sin \beta t)(u + iv) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{Im}(\cos \beta t - i \sin \beta t)(u + iv) \\ &= e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t) u + e^{\alpha t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) v \\ &= C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \psi) u + C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi) v, \end{aligned}$$

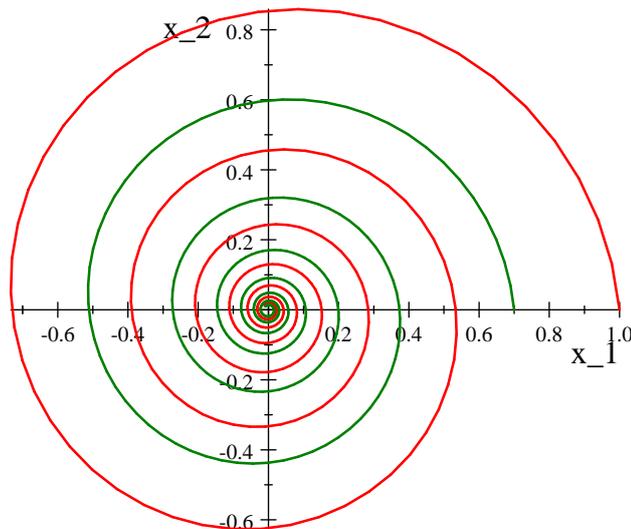
wobei  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  und

$$\cos \psi = \frac{C_1}{C}, \quad \sin \psi = \frac{C_2}{C}.$$

Diese Lösung hat die folgenden Polarkoordinaten in der Ebene mit der kartesischen Basis  $(u, v)$ :

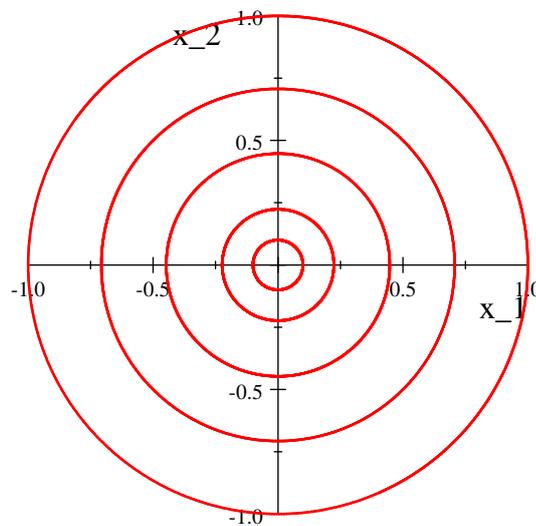
$$r(t) = Ce^{\alpha t} \quad \text{und} \quad \theta(t) = \beta t + \psi.$$

Ist  $\alpha \neq 0$  so bestimmen diese Gleichungen eine *logarithmische Spirale*, und der Typ von der Ruhelage 0 heißt auch *Spirale*. Die Spirale ist stabil, falls  $\alpha < 0$  und instabil falls  $\alpha > 0$ .



Die Spirale

Ist  $\alpha = 0$  (d.h.  $\lambda_1 = i\beta$  und  $\lambda_2 = -i\beta$ ), so ist die allgemeine Lösung durch  $r(t) = C$  gegeben, was die konzentrischen Kreislinien ergibt. In diesem Fall heißt der Typ von Ruhelage das *Zentrum*. Das Zentrum ist Ljapunow-stabil aber nicht asymptotisch stabil.



Das Zentrum

Jetzt betrachten wir den Fall, wenn  $A^b$  keine Diagonalmatrix ist, d.h.  $A^b$  ein Jordanblock ist:

$$A^b = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist  $\lambda$  unbedingt reell, weil sonst die Matrix  $A$  auch den Eigenwert  $\bar{\lambda}$  besitzen muss. Nach dem Satz 2.25 erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} b_1 + C_2 e^{\lambda t} (b_2 + t b_1).$$

In der Basis  $b$  hat  $x(t)$  die folgende Komponenten:

$$x(t) = ((C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}, C_2 e^{\lambda t}). \quad (4.8)$$

Ist  $\lambda < 0$  so ist die Ruhelage asymptotisch stabil nach Satz 4.2 (oder kann direkt gesehen werden). Im Fall  $\lambda \geq 0$  ist die Ruhelage instabil, da für  $C_1 = 0$  und  $C_2 > 0$  erhalten wir

$$\|x(t)\|_\infty \geq C_2 t e^{\lambda t},$$

so dass  $\|x(t)\|_\infty \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow +\infty$ .

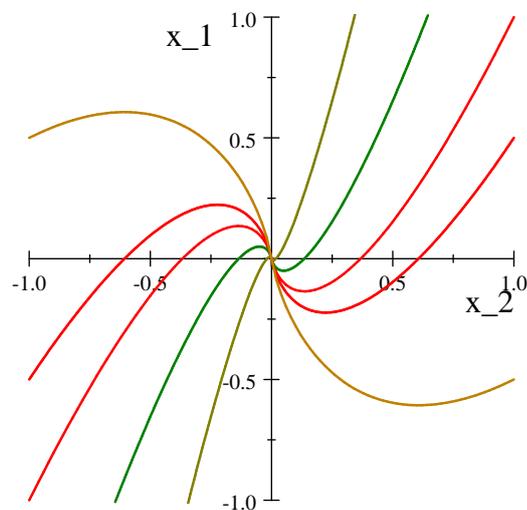
Zeichnen wir jetzt das Phasendiagramm. Im Fall  $\lambda \neq 0$  erhalten wir aus (4.8)

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_2}{C_2},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = \frac{C_1}{C_2} x_2 + \frac{1}{\lambda} \left( \ln \frac{x_2}{C_2} \right) x_2 \\ &= C x_2 + \frac{1}{\lambda} (\ln |x_2|) x_2 \end{aligned}$$

mit  $C = \frac{C_1}{C_2} - \frac{1}{\lambda} \ln |C_2|$ . In diesem Fall heißt der Typ von Ruhelage auch der Knoten. Dieser Knoten ist asymptotisch stabil falls  $\lambda < 0$  und instabil falls  $\lambda > 0$ .



Der Knoten

Im Fall  $\lambda = 0$  erhalten wir

$$x(t) = (C_1 + C_2 t, C_2),$$

was ein ausgeartetes Phasendiagramm ist – eine Menge von parallelen Geraden.

Anbei ist die Zusammenfassung von Typen der Ruhelagen in  $\mathbb{R}^2$ :

- *Knoten*:  $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell und  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  (inklusive zwei Fälle für  $A^b$ : Diagonalmatrix und Jordan-Block). Der Knoten ist asymptotisch stabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  und instabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .
- *Sattel*:  $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell und  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  (immer instabil).
- *Spirale* : Im  $\lambda \neq 0$  und  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$  (asymptotisch stabil falls  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  und instabil falls  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ).
- *Zentrum*: Im  $\lambda \neq 0$  und  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  (Ljapunow-stabil, aber nicht asymptotisch).
- Ausgearteter Typ:  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ , wenn das Phasendiagramm aus parallelen Geraden oder Punkten besteht (instabil im Fall von parallelen Geraden, und Ljapunow-stabil im Fall von Punkten, d.h. wenn  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ).

Wir betonen, dass im Fall  $\max \operatorname{Re} \lambda = 0$  die beiden Stabilität und Instabilität geschehen können abhängig von der Jordan-Normalform von  $A$ .

### 4.3 Ljapunow-Sätze

Betrachten wir wieder eine allgemeine autonome DGL  $x' = f(x)$  wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $x_0$  eine Ruhelage, d.h.  $f(x_0) = 0$ . Wir untersuchen die Stabilität von  $x_0$ .

**Satz 4.3 (Hauptsatz)** (1-er Ljapunow-Satz) *Sei  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  und setzen wir  $A = f_x(x_0)$  (d.h.  $A$  ist die Jacobi-Matrix von  $f$  in  $x_0$ ) und*

$$\alpha = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \}.$$

- (a) *Ist  $\alpha < 0$  so ist  $x_0$  asymptotisch stabil.*  
 (b) *Ist  $\alpha > 0$  so ist  $x_0$  instabil.*

Wir beweisen (a) unterhalb, aber (b) beweisen wir nicht, da der Beweis zu lang ist. Man darf trotzdem den Punkt (b) für die Aufgaben benutzen.

Das lineare Normalsystem  $X' = AX$  heißt die *Linearisierung* von  $x' = f(x)$  in der Nähe von  $x_0$ . Es gilt für  $x$  in der Nähe von  $x_0$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f_x(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \\ &= A(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \quad x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Somit gilt für  $X(t) = x(t) - x_0$

$$X' = AX + o(\|X\|), \quad X \rightarrow 0$$

und die Linearisierung davon ist  $X' = AX$ . Der Vergleich von den Sätzen 4.2 und 4.3 zeigt, dass im Fall  $\alpha < 0$  die beiden Ruhelagen  $x_0$  von  $x' = f(x)$  und 0 für  $X' = AX$  asymptotisch stabil sind, und im Fall  $\alpha > 0$  – instabil.

Im Fall  $\alpha = 0$  gibt es keine eindeutige Antwort. Das linearisierte System  $X' = AX$  lässt sich mit Hilfe von Jordan-Normalform von  $A$  untersuchen, wie wir im Fall  $n = 2$  gemacht haben. Für das allgemeine System  $x' = f(x)$  gibt es die Methoden, die für bestimmten Typen von  $f$  funktionieren.

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases} \quad (4.9)$$

Die Lösung der Gleichungen

$$\begin{cases} y + xy = 0 \\ x + xy = 0 \end{cases}$$

ergibt zwei Ruhelagen  $(0, 0)$  und  $(-1, -1)$ . Die Funktion

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + xy \\ -x - xy \end{pmatrix}$$

hat die Jacobi-Matrix

$$f' = \begin{pmatrix} y & 1+x \\ -1-y & -x \end{pmatrix}.$$

In der Ruhelage  $(-1, -1)$  ist die Jacobi-Matrix

$$A = f' \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und das linearisierte System in diesem Punkt ist

$$\begin{cases} X' = -X \\ Y' = Y. \end{cases}$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind  $-1$  und  $+1$ . Da  $\alpha = 1 > 0$ , so ist die Ruhelage instabil für die beiden Systeme.

In der Ruhelage  $(0, 0)$  erhalten wir

$$A = f' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und das linearisierte System

$$\begin{cases} X' = Y \\ Y' = -X. \end{cases}$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind  $\pm i$ . Da  $\alpha = 0$  und der Typ der Ruhelage für die Linearisierung das Zentrum ist, so ist die Linearisierung Ljapunow-stabil (aber nicht asymptotisch stabil). Im Fall  $\alpha = 0$  können wir die Stabilität der Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.9) aufgrund der Eigenwerte von  $A$  nicht entscheiden. Mit Hilfe von anderen Methoden kann man zeigen, dass diese Ruhelage für (4.9) auch Ljapunow-stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

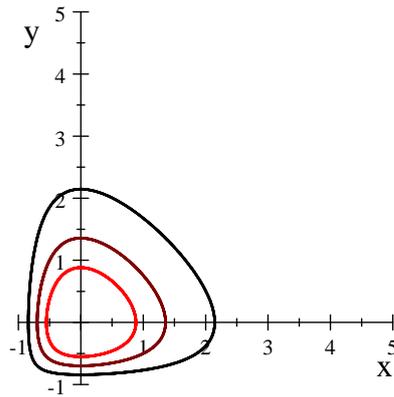


Figure 41: Die Trajektorien des System (4.9) in der Nähe von  $(0, 0)$

Da die Lösung von (4.9) kann explizit durch

$$x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C$$

gegeben werden (vgl. (4.3)), es folgt, dass die Phasenkurven in der Nähe von  $(0, 0)$  geschlossen sind (vgl. Fig. 41). Somit ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.9) Ljapunow-stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Wir werden dies rigoros mit Hilfe von 2. Ljapunow-Satz unterhalb beweisen.

Der Satz 4.3 wird mit Hilfe von dem zweiten Satz von Ljapunow bewiesen. In der Formulierung benutzen wir den Begriff von Richtungsableitung  $\partial_u V(x)$  einer Funktion  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  (wobei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist) in der Richtung  $u \in \mathbb{R}^n$  im Punkt  $x \in U$ :

$$\partial_u V(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(x + tu) - V(x)}{t} = V'(x)u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) u_k. \quad (4.10)$$

**Satz 4.4 (Hauptsatz)** (2-ter Ljapunow-Satz) *Sei  $x_0$  eine Ruhelage von  $x' = f(x)$  wobei  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\Omega$  mit  $x_0 \in U$ , und  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $V(x) > 0$  für alle  $x \in U \setminus \{x_0\}$  und  $V(x_0) = 0$ .*

(a) *Gilt für alle  $x \in U$*

$$\partial_{f(x)} V(x) \leq 0, \quad (4.11)$$

*so ist die Ruhelage  $x_0$  Ljapunow-stabil.*

(b) *Sei  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $W(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_0\}$ . Gilt für alle  $x \in U$*

$$\partial_{f(x)} V(x) \leq -W(x), \quad (4.12)$$

*so ist die Ruhelage  $x_0$  asymptotisch stabil.*

(c) *Gilt für alle  $x \in U$*

$$\partial_{f(x)} V(x) \geq W(x), \quad (4.13)$$

*wobei  $W$  ist wie im Punkt (b), so ist die Ruhelage  $x_0$  instabil.*

**Definition.** Eine Funktion  $V$ , wie in den Punkten (a), (b), oder (c), heißt die *Ljapunow-Funktion*.

Bemerken wir, dass nach (4.10) mit  $u = f(x)$  gilt

$$\partial_{f(x)}V(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) f_k(x). \quad (4.14)$$

Wir betonen, dass der Vektor  $f(x)$  in der Ableitung  $\partial_{f(x)}V(x)$  auch von  $x$  abhängt. Die Ableitung  $\partial_{f(x)}V(x)$  heißt die *orbitale Ableitung* von  $V$  bezüglich der DGL  $x' = f(x)$ . Die geometrische Bedeutung der orbitalen Ableitung wird aus dem Beweis klar sein.

#### 4.4 Beispiele von Ljapunow-Funktionen

Hier zeigen wir einige Beispiele von Ljapunow-Funktionen.

**Beispiel.** Betrachten wir eine skalare DGL 2-ter Ordnung ODE

$$x'' + kx' = F(x),$$

die 1-dimensionale Bewegung eines Teilchens von Masse 1 unter einer konservativen Kraft  $F(x)$  beschreibt, und zwar mit der Reibungskoeffizient  $k \geq 0$ . Das entsprechende Normalsystem ist

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky + F(x). \end{cases} \quad (4.15)$$

Sei  $F$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert, so dass der Phasenraum des Systems (4.15) gleich  $\mathbb{R}^2$  ist. Jeder Punkt  $(x, y)$  im Phasenraum stellt das Paar Koordinate-Geschwindigkeit dar.

Angenommen  $F(0) = 0$ , so dass  $(0, 0)$  eine Ruhelage ist. Wir versuchen herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Ruhelage  $(0, 0)$  stabil ist. Wir konstruieren die Ljapunow Funktion als die gesamte Energie:

$$V(x, y) = P(x) + \frac{y^2}{2},$$

wobei

$$P(x) = - \int F(x) dx$$

die potentielle Energie ist und  $\frac{y^2}{2}$  die kinetische Energie. Setzen wir weiter voraus, dass in einem Intervall  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  in der Nähe von 0 gilt

$$F(x) < 0 \quad \text{für } x > 0, \quad F(x) > 0 \quad \text{für } x < 0, \quad (4.16)$$

und wählen die folgende Version der Potentialfunktion

$$P(x) = - \int_0^x F(s) ds,$$

so dass  $P(0) = 0$  und  $P(x) > 0$  für  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ . Die Funktion  $V(x, y)$  verschwindet im  $(0, 0)$  und ist sonst positiv in  $U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$ .

Für die Vektorfunktion

$$f(x, y) = (y, -ky + F(x)),$$

die die rechte Seite von (4.15) darstellt, berechnen wir die orbitale Ableitung  $\partial_f V$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= V_x y + V_y (-ky + F(x)) \\ &= P'(x) y + y (-ky + F(x)) \\ &= -F(x) y - ky^2 + yF(x) \\ &= -ky^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $V$  eine Ljapunow Funktion, und nach dem Satz 4.4 ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.15) Ljapunow-stabil.

Physikalisch bedeutet die Bedingung (4.16), dass die Kraft immer in die Richtung zu 0 wirkt und somit wird das Teilchen gezwungen, immer wieder zur 0 zu bewegen, was die Stabilität ergibt.

Betrachten wir, z.B., die folgende Funktion  $F$ , die (4.16) erfüllt:

$$F(x) = -2x$$

Die entsprechende Ljapunow-Funktion ist

$$V(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir wieder das System (4.9), also

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases}$$

und die Ruhelage  $(0, 0)$ . Wie wir es schon gesehen haben, erfüllen die Phasenkurven des System die Gleichung

$$x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C.$$

Deshalb ist es sinnvoll die folgende Funktion

$$V(x, y) = x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1|$$

in der Nähe von  $(0, 0)$  zu betrachten. Da

$$x > \ln|x + 1|$$

für alle  $x > -1$ ,  $x \neq 0$ , so ist die Funktion  $V$  echt positiv für alle  $x > -1, y > -1$  außer  $(0, 0)$ . Die orbitale Ableitung ist

$$\begin{aligned}\partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)(y+xy) + \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)(-x-xy) \\ &= xy - xy = 0.\end{aligned}$$

Nach Satz 4.4(a) ist die Ruhelage  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil, wie wir es auf dem Bild 41 schon gesehen haben.

## 4.5 \* Weitere Beispiele

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y} \\ y' = \sin 3x + \ln(1-4y). \end{cases} \quad (4.17)$$

Der Punkt  $(0, 0)$  ist offensichtlich eine Ruhelage. Für die Funktion

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y} \\ \sin 3x + \ln(1-4y) \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$A = f_x(0, 0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man alle Komponenten von  $f(x, y)$  nach Taylor-Formel entwickeln wie folgt:

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= 2\sqrt{1+y} - 2e^{x+y} = 2\left(1 + \frac{y}{2} + o(x)\right) - 2(1 + (x+y) + o(|x| + |y|)) \\ &= -2x - y + o(|x| + |y|)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}f_2(x, y) &= \sin 3x + \ln(1-4y) = 3x + o(x) - 4y + o(y) \\ &= 3x - 4y + o(|x| + |y|),\end{aligned}$$

woraus folgt

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(|x| + |y|) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(|x| + |y|)$$

mit gleicher Matrix  $A$ .

Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 3 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 11,$$

und die Eigenwerte sind  $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{2}$ . Deshalb  $\alpha := \max \operatorname{Re} \lambda < 0$  und somit ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für das System 4.17 asymptotisch stabil.

**Beispiel.** Betrachten wir ein lineares Normalsystem  $x' = Ax$  wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um die Stabilität der Ruhelage 0 zu untersuchen, betrachten wir die Funktion

$$V(x) = \|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

die offensichtlich stetig differenzierbar in  $\mathbb{R}^n$  ist,  $V(0) = 0$  und  $V(x) > 0$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Setzen wir  $f(x) = Ax$  und  $A = (A_{kj})$  und bemerken, dass

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^n A_{kj}x_j.$$

Da  $\frac{\partial V}{\partial x_k} = 2x_k$ , es folgt aus (4.14), dass

$$\partial_f V = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k = 2 \sum_{j,k=1}^n A_{kj}x_jx_k.$$

Die Matrix  $A$  heißt *negativ semidefinit*, falls

$$\sum_{j,k=1}^n A_{kj}x_jx_k \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Also, ist  $A$  negativ semidefinit so gilt  $\partial_f V \leq 0$ , und nach Satz 4.4(a) ist die Ruhelage 0 Ljapunow-stabil.

Die Matrix  $A$  heißt *negativ definit*, falls

$$\sum_{j,k=1}^n A_{kj}x_jx_k < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Ist  $A$  negativ definit, dann haben wir

$$\partial_f V = -W \text{ mit } W = -2 \sum_{j,k=1}^n A_{kj}x_jx_k,$$

und nach Satz 4.4(b) ist 0 asymptotisch stabil. Analog, ist die matrix  $A$  *positiv definit* so ist 0 instabil nach Satz 4.4(c).

Z.B., sei  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  wobei  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ . Gilt  $\lambda_k \leq 0$  für alle  $k$ , dann ist  $A$  negativ semidefinit und somit ist 0 Ljapunow-stabil. Gilt  $\lambda_k < 0$  für alle  $k$ , dann ist  $A$  negativ definit und somit ist 0 asymptotisch stabil. Gilt  $\lambda_k > 0$  für alle  $k$ , so ist  $A$  positiv definit und somit ist 0 instabil. Eigentlich, 0 ist instabil schon im Fall, wenn  $\lambda_k > 0$  für ein  $k$ , wie aus dem Satz 4.2 folgt.

**Beispiel.** Betrachten wir ein System

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = -x^3, \end{cases} \quad (4.18)$$

mit der Ruhelage  $(0, 0)$ . Die Funktion  $V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$  ist echt positive in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , aber ihre orbitale Ableitung

$$\begin{aligned}\partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= x(y - x) - yx^3 \\ &= xy - x^2 - yx^3\end{aligned}$$

nimmt in der Nähe von  $(0, 0)$  sowohl positive als auch negative Werte an. Deshalb kann diese Funktion als Ljapunow-Funktion nicht benutzt werden.

Die Funktion

$$V(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

ist echt positiv in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , und die orbitale Ableitung dieser Funktion bezüglich der DGL (4.18) ist

$$\begin{aligned}\partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= x^3(y - x) - yx^3 \\ &= -x^4 \leq 0.\end{aligned}$$

Nach Satz 4.4(a) ist  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil.

Mit Hilfe von einer anderen Ljapunow-Funktion kann man zeigen, dass die Ruhelage  $(0, 0)$  tatsächlich asymptotisch stabil ist. Für die Funktion

$$V(x, y) = (x - y)^2 + y^2$$

haben wir

$$\begin{aligned}\partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= 2(x - y)(y - x) - (-2(x - y) + 2y)x^3 \\ &= -2(x - y)^2 - (4y - 2x)x^3 \\ &= -2(x - y)^2 - (4y - 4x + 2x)x^3 \\ &= -2((x - y)^2 + 2(y - x)x^3 + x^4) \\ &= -2\left((x - y + x^3)^2 + x^4 - x^6\right) = -2W,\end{aligned}$$

wobei

$$W(x, y) := (x - y + x^3)^2 + x^4 - x^6 > 0$$

für alle  $-1 < x < 1$  und  $y \in \mathbb{R}$  außer  $(x, y) = (0, 0)$ . Nach Satz 4.4 ist  $(0, 0)$  asymptotisch stabil für (4.18), was zu beweisen war. Auf dem Bild 42 wird eine Trajektorie des Systems (4.18) in der Nähe von  $(0, 0)$  gezeichnet.

Betrachten wir auch das linearisierte System von (4.18) in der Nähe von  $(0, 0)$ :

$$\begin{cases} X' = -X + Y \\ Y' = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Die Matrix ist  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dieses Systems hat die Eigenwerte 0 und  $-1$ . Nach Satz 4.2 ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.19) nicht asymptotisch stabil. Trotzdem ist  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil, da  $A$  diagonalisierbar ist (vgl. Abschnitt 4.2).

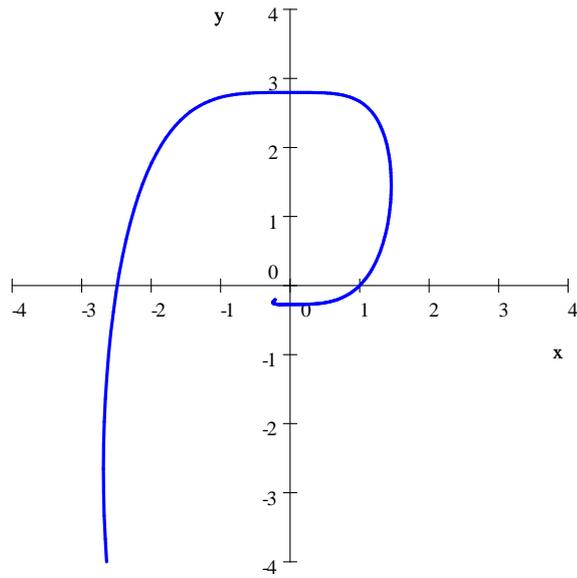


Figure 42: Eine Trajektorie des Systems (4.18)

Das linearisierte System (4.19) lässt sich explizit lösen wie folgt:

$$\begin{cases} X(t) = C_2 e^{-t} + C_1 \\ Y(t) = C_1 \end{cases},$$

woraus folgt, dass die Phasenkurven die horizontalen Geraden sind.

## 4.6 Beweise von Sätzen 4.2, 4.4 und 4.3

**Beweis von Satz 4.2.** Wir untersuchen die Stabilität der Ruhelage 0 des linearen Normalsystems  $x' = Ax$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Nach Korollar 2.26 ist die allgemeine komplexwertige Lösung des Systems  $x' = Ax$  durch die Identität

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} P_k(t) \quad (4.20)$$

gegeben, wobei  $C_k$  beliebige komplexe Konstanten sind,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  alle Eigenwerte von  $A$  mit den algebraischen Vielfachheiten, und  $P_k(t)$  Vektorwertige Polynome, also jedes  $P_k$  hat die Form

$$P_k(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_N t^N \quad (4.21)$$

mit einem  $N = 0, 1, \dots$  und mit Vektoren  $u_0, \dots, u_N \in \mathbb{R}^n$ .

(a) Angenommen  $\alpha := \max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , beweisen wir, dass die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist. Es folgt aus (4.20), dass für alle  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sum_{k=1}^n |C_k e^{\lambda_k t}| \|P_k(t)\| \\ &\leq \max_k |C_k| e^{(\operatorname{Re} \lambda_k)t} \sum_{k=1}^n \|P_k(t)\| \\ &\leq \max_k |C_k| e^{\alpha t} \sum_{k=1}^n \|P_k(t)\|. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Norm des Polynoms (4.21) lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|P_k(t)\| &\leq \|u_0\| + \|u_1\| t + \dots + \|u_N\| t^N \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\| (1 + t + \dots + t^N) \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\| N (1 + t^N) \end{aligned}$$

weil  $t^j \leq 1 + t^N$  für alle  $j = 1, \dots, N-1$ . Daraus folgt, dass für alle  $k = 1, \dots, n$

$$\|P_k(t)\| \leq c (1 + t^N) \quad (4.23)$$

vorausgesetzt, dass  $c$  und  $N$  hinreichend groß sind.

Andererseits (4.20) ergibt

$$x(0) = \sum_{k=1}^n C_k P_k(0),$$

so dass die Koeffizienten  $C_k$  die Koordinaten des Anfangsvektors  $x(0)$  in der Basis  $\{P_k(0)\}_{k=1}^n$  sind (was eine Jordan-Basis ist). Daraus folgt, dass in dieser Basis

$$\max_k |C_k| = \|x(0)\|_\infty. \quad (4.24)$$

Weiter nehmen wir an, dass  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ . Es folgt aus (4.22), (4.23) und (4.24), dass

$$\|x(t)\| \leq c \|x(0)\| e^{\alpha t} (1 + t^N). \quad (4.25)$$

Gilt  $\alpha < 0$ , so ist die Funktion  $e^{\alpha t} (1 + t^N)$  auf  $[0, +\infty)$  beschränkt, und wir erhalten, dass für alle  $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq K \|x(0)\|,$$

wobei

$$K = c \sup_{t \geq 0} e^{\alpha t} (1 + t^N) < \infty.$$

Daraus folgt die Ljapunow-Stabilität von 0. Außerdem, da

$$e^{\alpha t} (1 + t^N) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

erhalten wir aus (4.25) dass auch  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , so dass 0 asymptotisch stabil ist.

(b) Angenommen  $\alpha \geq 0$ , beweisen wir, dass die Ruhelage 0 nicht asymptotisch stabil ist. Dann existiert ein Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Sei  $v$  ein Eigenvektor mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Die Lösung

$$x(t) = e^{\lambda t} v \quad (4.26)$$

lässt sich wir folgt abschätzen:

$$\|x(t)\| = |e^{\lambda t}| \|v\| = e^{t \operatorname{Re} \lambda} \|v\| \geq \|v\|, \quad (4.27)$$

woraus folgt  $x(t) \not\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Ist  $x(t)$  reellwertig, so folgt es daraus, dass 0 nicht asymptotisch stabil ist, da auch  $\varepsilon x(t) \not\rightarrow 0$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , obwohl der Anfangswert  $\varepsilon x(0)$  beliebig klein sein kann. Ist  $x(t)$  komplexwertig, so sind  $\operatorname{Re} x(t)$  und  $\operatorname{Im} x(t)$  reellwertige Lösungen, und mindestens eine davon konvergiert gegen 0 nicht. Wie im ersten Fall beschließen wir, dass 0 nicht asymptotisch stabil ist.

(c) Angenommen  $\alpha > 0$ , beweisen wir, dass die Ruhelage 0 instabil ist. Für den Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  betrachten wieder die Lösung (4.26). Es folgt aus (4.27), dass  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow +\infty$ . Dann ist einer von den reellwertigen Lösungen  $\varepsilon \operatorname{Re} x(t)$  und  $\varepsilon \operatorname{Im} x(t)$  unbeschränkt, obwohl der Anfangswert  $\varepsilon x(0)$  beliebig klein sein kann, woraus die Behauptung folgt. ■

**Beweis von Satz 4.4.** (a) Wir beweisen die asymptotische Stabilität der Ruhelage  $x_0$  des Normalsystems  $x' = f(x)$  unter der Voraussetzung, dass es in einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  eine Ljapunow-Funktion gibt, d.h. eine stetig differenzierbare Funktion  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaft

- $V(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$  und  $V(x_0) = 0$
- $\partial_{f(x)} V(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$ .

Die Hauptidee von Beweis ist wie folgt. Sei  $x(t)$  eine Lösung mit den Anfangswert  $x(0)$  in der Nähe von  $x_0$ , insbesondere in  $U$ . Dann gilt auch  $x(t) \in U$  für  $t \in [0, T)$  mit einem  $T > 0$ , und wir erhalten nach der Kettenregel für alle  $t \in [0, T)$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = V'(x) x'(t) = V'(x) f(x) = \partial_{f(x)} V(x). \quad (4.28)$$

Insbesondere erklärt die Identität (4.28), warum  $\partial_{f(x)}V(x)$  die orbitale Ableitung heißt: da sie gleich die Ableitung von  $V$  entlang die Phasenkurve ist. Nach (4.28) und die Voraussetzung (4.11) erhalten wir, dass

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0,$$

woraus folgt, dass die Funktion  $V$  monoton fallend entlang die Lösung  $x(t)$  ist, insbesondere gilt

$$V(x(t)) \leq V(x(0)).$$

Weitere Idee ist wie folgt: ist  $x(0)$  in der Nähe von  $x_0$ , so gilt  $V(x(0)) \approx 0$  woraus folgt  $V(x(t)) \approx 0$  und somit muss der Punkt  $x(t)$  in der Nähe von  $x_0$  immer bleiben. Die Funktion  $V$  spielt die Rolle von einer Barriere, die die Lösung in der Nähe von  $x(0)$  hält.

Um diese Idee zu verwirklichen, verkleinern wir zunächst die Menge  $U$ , so dass  $U$  beschränkt ist und  $V(x)$  im Abschluss  $\bar{U}$  definiert ist. Bezeichnen wir

$$B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $\bar{B}_\varepsilon \subset U$ . Für solches  $\varepsilon$  setzen wir

$$m_\varepsilon := \inf_{x \in \bar{U} \setminus B_\varepsilon} V(x).$$

Da  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  kompakt ist und  $V$  stetig und echt positiv auf  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  ist, erhalten wir, dass auch  $m_\varepsilon > 0$  (nach dem Extremwertsatz).

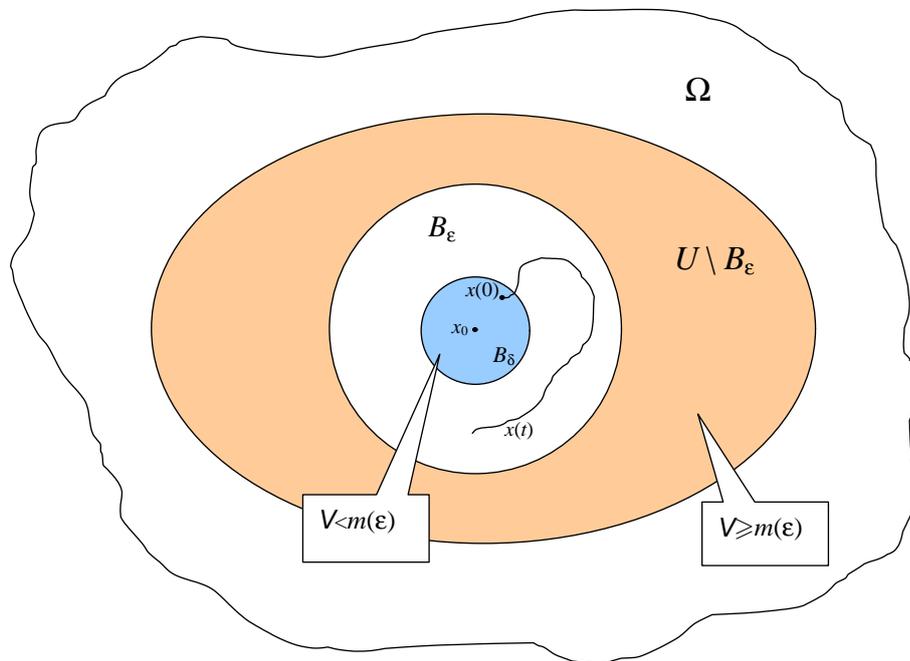


Figure 43: Beweis von Satz 4.4(a)

Also, nach Definition von  $m_\varepsilon$  haben wir

$$V(x) \geq m_\varepsilon \text{ für alle } x \in \bar{U} \setminus B_\varepsilon. \quad (4.29)$$

Da  $V(x_0) = 0$  und  $m_\varepsilon > 0$ , so existiert  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  so klein, dass

$$V(x) < m_\varepsilon \quad \text{für alle } x \in B_\delta. \quad (4.30)$$

Sei  $x(t)$  eine maximale Lösung der DGL  $x' = f(x)$  im Bereich  $\mathbb{R} \times U$  mit  $x(0) \in B_\delta$ . Wir beweisen, dass  $x(t)$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist und  $x(t) \in B_\varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ , woraus die Ljapunow-Stabilität von 0 folgen wird (Fig. 43). Da  $x(0) \in B_\delta$ , so erhalten wir nach (4.30), dass

$$V(x(0)) < m_\varepsilon.$$

Da die Funktion  $V(x(t))$  monoton fallend ist, erhalten wir auch

$$V(x(t)) < m_\varepsilon \quad \text{für alle } t > 0,$$

sofern  $x(t)$  definiert ist<sup>13</sup>. Es folgt aus (4.29) dass  $x(t) \in B_\varepsilon$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $x(t)$  für alle  $t > 0$  definiert ist. Angenommen das Gegenteil, also der Definitionsbereich von  $x$  sei ein Intervall  $(a, b)$  mit  $b < \infty$ . Dann liegt der Graph der Lösung  $x(t)$  für  $t \geq 0$  in der kompakten Menge  $[0, b] \times \overline{B_\varepsilon}$ , während nach dem Satz 3.6 die maximale Lösung jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R} \times U$  für  $t \rightarrow b-$  verlässt. Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

(b) Es folgt aus (4.12) und (4.28), dass

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -W(x(t)).$$

Es reicht zu zeigen, dass

$$V(x(t)) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

da das die Konvergenz  $x(t) \rightarrow x_0$  ergibt (erinnern wir uns daran, dass  $x_0$  die einzige Nullstelle von  $V$  ist). Da  $V(x(t))$  monoton fallend ist, so existiert der Grenzwert

$$c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)).$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass  $c > 0$ . Nach der Stetigkeit von  $V$  existiert ein  $r > 0$  mit

$$V(x) < c \quad \text{für alle } x \in B_r.$$

Da  $V(x(t)) \geq c$  für alle  $t > 0$ , es folgt, dass  $x(t) \notin B_r$  für alle  $t > 0$ . Bezeichnen

$$m := \inf_{z \in \overline{U} \setminus B_r} W(z) > 0.$$

Da  $x(t) \in \overline{U} \setminus B_r$ , es folgt, dass  $W(x(t)) \geq m$  für alle  $t > 0$  und somit

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -W(x(t)) \leq -m.$$

Integration in  $t$  ergibt

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - mt,$$

---

<sup>13</sup>Da  $x(t)$  als eine Lösung bezüglich des Definitionsbereiches  $\mathbb{R} \times U$  der DGL definiert ist, ist der Punkt  $x(t)$  immer in  $U$  enthalten, sofern  $x(t)$  definiert ist.

woraus folgt, dass  $V(x(t)) < 0$  für hinreichend große Werte von  $t$ . Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

(c) Nehmen wir das Gegenteil an, dass die Ruhelage  $x_0$  stabil ist, also, für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(t) \in B_\varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Wählen wir  $\varepsilon$  so dass  $\overline{B_\varepsilon} \subset U$ . Sei  $x(0)$  ein Punkt in  $B_\delta \setminus \{x_0\}$ . Dann  $x(t) \in B_\varepsilon$  für alle  $t > 0$ ; insbesondere haben wir  $x(t) \in U$  für alle  $t > 0$ . Es folgt aus der Voraussetzung (4.13), dass

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \geq W(x(t)) \geq 0 \quad (4.31)$$

so dass die Funktion  $V(x(t))$  monoton wachsend ist und somit

$$V(x(t)) \geq V(x(0)) =: c > 0$$

für alle  $t \geq 0$ . Es existiert  $r > 0$  so dass  $V(x) < c$  für alle  $x \in B_r$ .

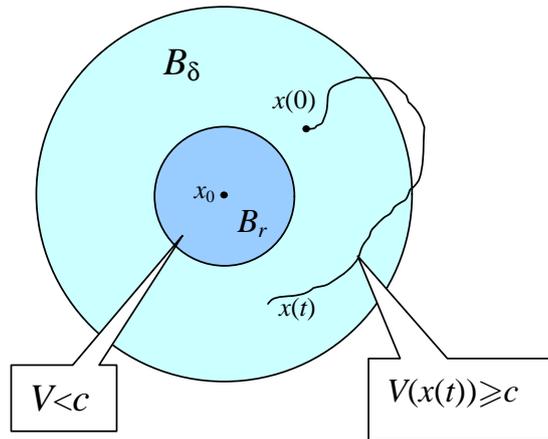


Figure 44: Beweis von Satz 4.4(c)

Daraus folgt, dass  $x(t) \notin B_r$  für alle  $t > 0$ . Bezeichnen

$$m := \inf_{z \in \overline{U} \setminus B_r} W(z) > 0,$$

und erhalten  $W(x(t)) \geq m$ , was zusammen mit (4.31) ergibt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \geq m \text{ für alle } t > 0.$$

Es folgt nach Integration, dass  $V(x(t)) \geq mt \rightarrow +\infty$  für  $t \rightarrow +\infty$ , was im Widerspruch zur Beschränktheit von  $V$  auf  $\overline{U}$  ist (Fig. 44). ■

**Beweis von Satz 4.3.** (a) Wir untersuchen die Stabilität der Ruhelage  $x_0$  des Normalsystems  $x' = f(x)$  mit Hilfe von der Jacobi-Matrix  $A = f'(x_0)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_0 = 0$ , so dass  $f(0) = 0$ . Setzen wir

$$\alpha = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \}$$

and beweisen, dass unter der Voraussetzung  $\alpha < 0$  die folgende Funktion

$$V(x) = \int_0^{\infty} \|e^{sA}x\|_2^2 ds \quad (4.32)$$

eine Ljapunow-Funktion für  $x' = f(x)$  ist. Dann folgt die Ljapunow-Stabilität der Ruhelage aus dem Satz 4.4(a).

Zunächst überprüfen wir, dass  $V(x) < \infty$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ , also das Integral in (4.32) konvergiert. Im Beweis von Satz 4.2 haben wir die folgende Ungleichung bewiesen:

$$\|e^{tA}x\| \leq ce^{\alpha t} (t^N + 1) \|x\| \quad (4.33)$$

(vgl. (4.25)), wobei  $c, N$  positive Konstanten sind. Da  $\alpha < 0$ , es folgt aus (4.33), dass die Funktion  $s \mapsto \|e^{sA}x\|$  exponentiell fallend für  $s \rightarrow +\infty$  ist, woraus die Konvergenz des Integrals (4.32) folgt.

Jetzt zeigen wir, dass  $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  (tatsächlich gilt  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ). Stellen wir den Vektor  $x$  in der Standardbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{R}^n$  wie folgt dar:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Da

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = x \cdot x$$

und

$$e^{sA}x = \sum_{i=1}^n x_i e^{sA}v_i,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|e^{sA}x\|_2^2 &= e^{sA}x \cdot e^{sA}x = \left( \sum_{i=1}^n x_i (e^{sA}v_i) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n x_j (e^{sA}v_j) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j (e^{sA}v_i \cdot e^{sA}v_j). \end{aligned}$$

Integration in  $s$  ergibt

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j,$$

wobei

$$b_{ij} = \int_0^{\infty} (e^{sA}v_i \cdot e^{sA}v_j) ds$$

Konstanten sind. Deshalb ist  $V(x)$  eine quadratische Funktion von  $x_1, \dots, x_n$ , woraus folgt, dass  $V$   $\infty$ -fach differenzierbar ist.

**Bemerkung.** Normalerweise benutzen wir eine beliebige Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Im Gegensatz benutzen wir in der Definition (4.32) von  $V(x)$  ausdrücklich die 2-Norm, um die Differenzierbarkeit von  $V(x)$  zu sichern.

Die Funktion  $V(x)$  ist offensichtlich nicht-negativ und  $V(x) = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = 0$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\partial_{f(x)}V(x) \leq 0$ . Nach der Differenzierbarkeit von  $f(x)$  in 0 haben wir

$$f(x) = Ax + h(x), \quad (4.34)$$

wobei

$$h(x) = o(\|x\|) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Für  $f \in C^2$  gilt sogar, dass

$$\|h(x)\| \leq C \|x\|^2, \quad (4.35)$$

für klein genug  $\|x\|$  und eine Konstante  $C$  (siehe Behauptung unterhalb). Nach (4.34) haben wir

$$\partial_{f(x)}V(x) = \partial_{Ax}V(x) + \partial_{h(x)}V(x). \quad (4.36)$$

Die Funktion  $y(t) = e^{tA}x$  löst nach dem Satz 2.20 die DGL  $y' = Ay$ . Nach (4.28) erhalten wir für alle  $t \geq 0$

$$\partial_{Ay}V(y) = \frac{d}{dt}V(y(t)),$$

d.h.

$$\partial_{Ae^{tA}x}V(e^{tA}x) = \frac{d}{dt}V(e^{tA}x)$$

woraus folgt für  $t = 0$

$$\partial_{Ax}V(x) = \left. \frac{d}{dt}V(e^{tA}x) \right|_{t=0}. \quad (4.37)$$

Andererseits nach Definition (4.32) von  $V$  erhalten wir

$$V(e^{tA}x) = \int_0^\infty \|e^{sA}(e^{tA}x)\|_2^2 ds = \int_0^\infty \|e^{(s+t)A}x\|_2^2 ds = \int_t^\infty \|e^{\tau A}x\|_2^2 d\tau,$$

wobei wir die Substitution  $\tau = s + t$  benutzt haben. Ableiten dieser Identität in  $t$  ergibt

$$\frac{d}{dt}V(e^{tA}x) = -\|e^{tA}x\|_2^2.$$

Nach dem Einsetzen in (4.37) erhalten wir

$$\partial_{Ax}V(x) = -\|x\|_2^2. \quad (4.38)$$

Die zweite Term (4.36) lässt sich mit Hilfe von Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen:

$$\partial_{h(x)}V(x) = V'(x) \cdot h(x) \leq \|V'(x)\|_2 \|h(x)\|_2. \quad (4.39)$$

Es folgt aus (4.36), (4.38), (4.39) und (4.35), dass

$$\begin{aligned} \partial_{f(x)}V(x) &= \partial_{Ax}V(x) + \partial_{h(x)}V(x) \\ &\leq -\|x\|_2^2 + \|V'(x)\|_2 \|h(x)\|_2 \\ &\quad -\|x\|_2^2 + C \|V'(x)\|_2 \|x\|_2^2, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass  $\|x\|_2$  hinreichend klein ist.

Da die Funktion  $V(x)$  ein Minimum in 0 annimmt, so erhalten wir  $V'(0) = 0$ . Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\|V'(x)\|_2 \leq \varepsilon,$$

vorausgesetzt  $\|x\|$  hinreichend klein ist. Setzen wir  $\varepsilon = \frac{1}{2}C^{-1}$  und erhalten die folgende Ungleichung

$$\partial_{f(x)}V(x) \leq -\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|_2^2 = -\frac{1}{2}\|x\|_2^2,$$

die in einer kleinen Umgebung  $U$  von 0 gilt. Nach dem Satz 4.4(b) mit  $W(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$  erhalten wir, dass die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist.

**Behauptung.** Wir beweisen jetzt (4.35). Nach der Taylor-Formel erhalten wir für jedes  $k = 1, \dots, n$

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_k(0) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f_k(0) x_i x_j + o(\|x\|^2) \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Der erste Glied auf der rechten Seite ist die  $k$ -te Komponente von  $Ax$ , und der Rest ist die  $k$ -te Komponente von  $h(x)$ , also

$$h_k(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f_k(0) x_i x_j + o(\|x\|^2),$$

woraus folgt

$$|h_k(x)| \leq B \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j| + o(\|x\|^2) = B \|x\|_1^2 + o(\|x\|^2),$$

wobei  $B = \max_{i,j,k} |\partial_{ij} f_k(0)|$ . Da die Normen  $\|x\|_1$  und  $\|x\|$  äquivalent sind, so erhalten wir (4.35). ■

Den Punkt (b) des Satzes 4.3 beweisen wir hier nicht.

## 4.7 \* Periodische Lösungen

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  $T$ -periodisch, für ein  $T > 0$ , wenn

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Der Wert  $T$  heißt eine Periode von  $f$ . Ist  $f$  auch von anderen Variablen abhängig, z.B.  $f = f(t, x)$ , dann heißt  $f$   $T$ -periodisch in  $t$ , wenn die Funktion  $t \mapsto f(t, x)$   $T$ -periodisch für jedes  $x$  ist.

In diesem Abschnitt betrachten wir periodische Lösungen von DGLen.

**Lemma 4.5** Sei  $f(t, x)$  eine Funktion mit Definitionsbereich  $\mathbb{R} \times \Omega$  und mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. Angenommen,  $f$  ist  $T$ -periodisch in  $t$ . Sei  $x(t)$  eine Lösung der DGL  $x' = f(t, x)$  auf dem Intervall  $[0, T]$  mit  $x(0) = x(T)$ . Dann ist die Funktion  $x(t)$  fortsetzbar auf  $(-\infty, \infty)$  als eine  $T$ -periodische Lösung.

**Beweis.** Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  definieren wir  $x(t)$  wie folgt:  $x(t) = x(\tau)$  wobei  $\tau$  der einzige Wert auch  $[0, T)$  ist, so dass  $T$  durch  $t - \tau$  teilbar ist. Äquivalent, für jedes  $t$  existiert eine ganze Zahl  $k$  mit  $t + kT \in [0, T)$ . Dann setzen wir  $x(t) = x(t + kT)$ .

Wegen  $x(0) = x(T)$  ist die fortgesetzte Funktion  $x(t)$  stetig in  $\mathbb{R}$ . Auf  $[0, T]$  ist  $x(t)$  differenzierbar als eine Lösung von DGL. Dann ist  $x(t)$  offensichtlich differenzierbar auch für alle Werte von  $t$ , die kein Vielfaches von  $T$  sind. Zeigen wir, dass  $x(t)$  differenzierbar auch für  $t = kT$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  ist. Wegen der  $T$ -Periodizität reicht es zu zeigen, dass  $x$  differenzierbar in  $t = 0$  ist. Die Funktion  $x$  hat auf  $[0, T]$  die rechte Ableitung  $x'_R(t)$  in  $t = 0$  und die linke Ableitung  $x'_L(t)$  in  $t = T$ , und zwar

$$x'_R(0) = f(0, x(0)) \quad \text{und} \quad x'_L(T) = f(T, x(T)).$$

Nach  $T$ -Periodizität von  $f(t, x)$  und  $x(t)$  erhalten wir  $x'_L(T) = x'_L(0)$  und

$$f(T, x(T)) = f(0, x(0)),$$

woraus folgt

$$x'_L(0) = f(0, x(0)) = x'_R(0)$$

und somit  $x(t)$  in  $t = 0$  differenzierbar ist. Die Gleichung  $x'(t) = f(t, x(t))$  für alle  $t \in [0, T]$  ergibt dann dieselbe Gleichung für alle  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**Satz 4.6** (Periodische Lösungen lineares Systems) *Betrachten wir das Normalsystem*

$$x' = Ax + f(t), \tag{4.40}$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige  $T$ -periodische Funktion ist. Angenommen, alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  erfüllen die Bedingung

$$\lambda \neq \frac{2\pi i}{T}k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.41}$$

Dann hat das System genau eine  $T$ -periodische Lösung.

Ist die Bedingung (4.41) erfüllt, so heißt die Periode  $T$  *nicht-resonant* für die Gleichung (4.40).

**Beweis.** Sei  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung von (4.40) auf  $(-\infty, \infty)$  mit  $x_0(0) = 0$ . Dann ist die allgemeine Lösung durch die folgende Identität gegeben:

$$x(t) = e^{tA}v + x_0(t)$$

mit beliebigem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$ . In der Tat, wir haben  $x(0) = v$ . Nach Lemma 4.5 ist die Lösung  $x(t)$   $T$ -periodisch genau dann, wenn  $x(0) = x(T)$ , was äquivalent zu

$$v = e^{TA}v + x_0(T)$$

ist, d.h.

$$(e^{TA} - \text{id})v = -x_0(T). \tag{4.42}$$

Das ist ein lineares algebraisches System bezüglich  $v$ , das genau dann lösbar ist, wenn (4.40) eine  $T$ -periodische Lösung hat. Andererseits ist (4.42) eindeutig lösbar, vorausgesetzt

$$\det(e^{TA} - \text{id}) \neq 0.$$

Die Eigenwerte von  $e^{TA} - \text{id}$  sind gleich  $e^{T\lambda} - 1$ , wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  ist. Die Bedingung (4.41) ergibt, dass  $T\lambda \neq 2\pi ki$  und somit  $e^{T\lambda} \neq 1$ . Deshalb verschwinden die Eigenwerte von  $e^{TA} - \text{id}$  nicht, und somit  $\det(e^{TA} - \text{id}) \neq 0$ . Die Gleichung (4.42) hat genau eine Lösung  $v$ , die die  $T$ -periodische Lösung von (4.40) bestimmt.

■

**Beispiel.** Wir zeigen in diesem Beispiel, dass die Voraussetzung (4.41) wesentlich ist. Betrachten wir die DGL

$$x'' + px' + qx = F(t) \quad (4.43)$$

wobei  $p, q \in \mathbb{R}$  und  $F(t)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion ist. Diese Gleichung ist äquivalent zum System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -py - qx + F(t) \end{cases}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}$$

mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -q & -p - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q,$$

und die Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Betrachten wir die Werte  $\lambda = \frac{2\pi k}{T}i = ki$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Ist  $\lambda = ki$  ein Eigenwert, so gilt  $\text{Re } \lambda = 0$ , woraus folgt

$$p = 0 \text{ und } q = -\lambda^2 = k^2. \quad (4.44)$$

Somit haben wir folgendes bewiesen: ist  $p \neq 0$  oder  $q \neq k^2$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , dann hat die Gleichung (4.43) genau eine  $2\pi$ -periodische Lösung.

Im Fall (4.44) ist die DGL (4.43) äquivalent zu

$$x'' + k^2x = F(t). \quad (4.45)$$

Zeigen wir, dass diese Gleichung mit  $F(t) = \cos kt$  keine periodische Lösung hat. In der Tat, da  $ik$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, hat die DGL

$$x'' + k^2x = e^{ikt}$$

eine spezielle Lösung der Form  $x(t) = ate^{ikt}$  mit  $a = \frac{1}{P'(ik)} = \frac{1}{2ik}$  (angenommen  $k \neq 0$ ). Daraus folgt, dass (4.45) eine spezielle Lösung

$$x(t) = \text{Re} \left( \frac{1}{2ik} te^{ikt} \right) = \frac{1}{2k} t \sin t,$$

hat. Somit ist die allgemeine Lösung von (4.45)

$$x(t) = \frac{t}{2k} \sin kt + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Da diese Lösung unbeschränkt ist, ist sie nie periodisch.

Im Fall  $k = 0$  hat die Gleichung  $x'' = 1$  die allgemeine Lösung

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2,$$

die auch nie periodisch ist.

Betrachten wir ein numerisches Beispiel

$$x'' + 3x = 2 \sin t$$

mit  $2\pi$ -periodischer Störfunktion  $F(t) = 2 \sin t$ . Da 3 keine Quadratzahl ist, das ist nichtresonanter Fall, so dass es genau eine  $2\pi$ -periodische Lösung gibt. Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = \sin t + C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t,$$

und die  $2\pi$ -periodische Lösung ist  $x(t) = \sin t$ .

**Satz 4.7** (Periodische Lösungen für kleine Störungen von linearen Systemen) *Under den Bedingungen von Satz 4.6, sei  $g(t, x, s)$  eine Funktion mit Definitionsbereich  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S$  und mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $S$  eine offene Umgebung von 0 in  $\mathbb{R}^m$  ist. Angenommen,  $g$  ist  $T$ -periodisch in  $t$ ,  $g \in C^k(x, s)$  mit  $k \geq 1$  und  $g(t, x, 0) \equiv 0$ . Betrachten wir das Normalsystem*

$$x' = Ax + f(t) + g(t, x, s). \quad (4.46)$$

*Dann hat das System (4.46) für alle  $s$  mit hinreichend klein  $\|s\|$  genau eine  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$ . Darüber hinaus gilt  $x \in C^k(s)$ .*

**Bemerkung.** Für  $s = 0$  nimmt die Gleichung (4.46) die Form

$$x' = Ax + f(t) \quad (4.47)$$

an. Insbesondere ist  $x(t, 0)$  die  $T$ -periodische Lösung von (4.47), die auch nach Satz 4.6 existiert. Die DGL (4.46) kann als eine Störung von (4.40) betrachtet werden.

**Beweis.** Bezeichnen wir mit  $x(t, s, v)$  die maximale Lösung von (4.46) mit der Anfangsbedingung  $x|_{t=0} = v$ , für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $s \in S$ . Nach Satz 4.6 existiert ein eindeutiger Wert  $v_0 \in \Omega$ , derart, dass  $x(t, 0, v_0)$   $T$ -periodisch ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $v_0 = 0$ , so dass  $x(t, 0, 0)$  eine  $T$ -periodische Lösung ist.

Nach Satz 3.10 ist der Definitionsbereich der Lösung  $x(t, s, v)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Da die Lösung  $x(t, 0, 0)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert ist, ist die Lösung  $x(t, s, v)$  mindestens für alle  $t \in [0, T]$  definiert ist, vorausgesetzt  $\|s\|$  und  $\|v\|$  hinreichend klein sind. Wir möchten den Anfangswert  $v$  abhängig von  $s$  wählen, derart, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$x(T, s, v) = v. \quad (4.48)$$

Ist  $v = v(s)$  eine Lösung von (4.48), so ist die Funktion  $x(t, s, v(s))$   $T$ -periodisch nach Lemma 4.5<sup>14</sup>.

Wir brauchen jetzt zu beweisen, dass die Gleichung (4.48) für hinreichend klein  $\|s\|$  genau eine Lösung  $v$  hat. Dafür benutzen wir der Satz von der impliziten Funktion.

**Satz von der impliziten Funktion.** Sei  $F(u, v)$  eine  $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktion, die auf einer offenen Umgebung von  $(0, 0)$  in  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  definiert ist (mit  $u \in \mathbb{R}^m$  und  $v \in \mathbb{R}^n$ ). Sei  $F \in C^k(u, v)$  mit  $k \geq 1$ ,  $F(0, 0) = 0$  und  $\det \partial_v F(0, 0) \neq 0$ . Dann hat die Gleichung  $F(u, v) = 0$  für hinreichend klein  $\|u\|$  genau eine Lösung  $v = v(u)$ , und es gilt  $v \in C^k(u)$ .

Wir benutzen diesen Satz für die Funktion

$$F(s, v) = x(T, s, v) - v,$$

so dass die Gleichung (4.48) äquivalent zu  $F(s, v) = 0$  ist. Nach Satz 3.13 gilt  $x \in C^k(s, v)$ , so dass auch  $F \in C^k(s, v)$ . Bei  $s = 0, v = 0$  ist die Gleichung (4.48) erfüllt, so dass  $F(0, 0) = 0$ . Berechnen wir  $\partial_v F = \partial_v x - \text{id}$  bei  $s = 0, v = 0$ . Für  $s = 0$  ist  $x(t, 0, v)$  die Lösung von (4.47) mit Anfangsbedingung  $x|_{t=0} = v$ . Wie im Beweis von Satz 4.6 haben wir

$$x(T, 0, v) = e^{TA}v + x_0(T),$$

woraus folgt  $\partial_v x(T, 0, v) = e^{TA}$  und somit

$$\partial_v F(0, 0) = e^{TA} - \text{id}.$$

Im Beweis von Satz 4.6 haben wir schon gezeigt, dass  $\det(e^{TA} - \text{id}) \neq 0$ , vorausgesetzt, dass  $T$  nicht-resonant für  $A$  ist. Somit hat die Gleichung  $F(s, v) = 0$  genau eine Lösung  $v = v(s)$  für hinreichend klein  $\|s\|$ . Dann löst  $v(s)$  auch die Gleichung (4.48), und wir erhalten die  $T$ -periodische Lösung  $t \mapsto x(t, s, v(s))$ . Wegen  $v(s) \in C^k(s)$  ist die Lösung  $x(t, s, v(s))$  auch von der Klasse  $C^k(s)$ . ■

**Korollar 4.8** *Under den Bedingungen von Satz 4.7 es gilt für die  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  von (4.46) die folgende asymptotische Entwicklung*

$$x(t, s) = x_0(t) + x_1(t)s + x_2(t)s^2 + \dots + x_k(t)s^k + o(s^k) \quad \text{für } s \rightarrow 0, \quad (4.49)$$

wobei alle Funktionen  $x_j(t)$   $T$ -periodisch sind.

**Beweis.** Die Entwicklung (4.49) gilt nach Taylorformel, da  $x(t, s) \in C^k(s)$ . Wir brauchen nur zu zeigen, dass die Funktionen  $x_j(t)$   $T$ -periodisch sind. Wir haben

$$x(t+T, s) - x(t, s) = \sum_{j=0}^k (x_j(t+T) - x_j(t))s^j + o(s^k).$$

Da die linke Seite identisch Null ist, so erhalten wir nach Eindeutigkeit von Taylorentwicklung, dass  $x_j(t+T) - x_j(t) \equiv 0$ , d.h.  $x_j$   $T$ -periodisch ist. ■

<sup>14</sup>Da die Lösung  $t \mapsto x(t, s, v)$  schon maximal ist, man braucht diese Lösung nicht fortzusetzen.

Gegeben sei eine skalare DGL

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = F(t) + G(t, x, s) \quad (4.50)$$

mit Parameter  $s \in \mathbb{R}^m$ , man erhält das äquivalente Normalsystem

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + f(t) + g(t, \mathbf{x}, s)$$

mit  $\mathbf{x} = (x, x', \dots, x^{(n-1)})^T$  und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ F(t) \end{pmatrix}, \quad g(t, \mathbf{x}, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ G(t, \mathbf{x}_1, s) \end{pmatrix}$$

Sei  $P(\lambda)$  das charakteristische Polynom von (4.50), also

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

**Behauptung.** Die folgende Identität gilt:

$$\det(A - \lambda \text{id}) = (-1)^n P(\lambda),$$

d.h.  $(-1)^n P(\lambda)$  ist das charakteristische Polynom von  $A$ .

**Beweis.** Induktionsanfang: für  $n = 1$  gilt  $A = (-a_1)$  und  $\det(A - \lambda) = -(\lambda + a_1) = -P(\lambda)$ . Für den Induktionsschritt von  $n-1$  nach  $n$  entwickeln wir die Determinante nach der ersten Spalte und benutzen die Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \text{id}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -\lambda - a_1 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -\lambda - a_1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^n a_n \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(-1)^{n-1} \lambda (\lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + (-1)^n a_n \\ &= (-1)^n P(\lambda). \end{aligned}$$

■

Nach Satz 4.7 erhalten wir folgendes.

**Korollar 4.9** *Angenommen, die Funktionen  $F(t)$  und  $G(t, x, s)$  sind stetig und  $T$ -periodisch in  $t$ ,  $G \in C^k(x, s)$  mit  $k \geq 1$  und  $G(t, x, 0) \equiv 0$ . Ist  $T$  nicht-resonant für das Polynom  $P(\lambda)$  (d.h. die Nullstellen von  $P(\lambda)$  erfüllen die Bedingung (4.41)), so existiert für alle  $s$  mit hinreichend klein  $\|s\|$  genau eine  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  von (4.50). Diese Lösung hat eine Taylorentwicklung*

$$x(t, s) = x_0(t) + x_1(t)s + x_2(t)s^2 + \dots + x_k(t)s^k + o(s^k) \quad \text{für } s \rightarrow 0, \quad (4.51)$$

wobei alle Funktionen  $x_j(t)$   $T$ -periodisch sind.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL mit Parameter

$$x'' + 3x = 2 \sin t + sx^2. \quad (4.52)$$

Die Funktion  $f(t) = 2 \sin t$  ist  $2\pi$ -periodisch, und die Funktion  $g(t, x, s) = sx^2$  gehört zu alle  $C^k(x, s)$  und ist trivial  $2\pi$ -periodisch in  $t$ . Das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + 3$  hat die Nullstellen  $\lambda = \pm i\sqrt{3}$ . Offensichtlich ist  $2\pi$  nicht-resonant, und nach Korollar 4.9 erhalten wir für kleine  $s$  die Existenz von einer  $T$ -periodischen Lösung  $x(t, s)$  mit der Entwicklung (4.51).

Bestimmen wir die Koeffizienten  $x_j(t)$  bis zum  $j = 2$ . Dafür setzen wir die Entwicklung

$$x(t, s) = x_0(t) + x_1(t)s + x_2(t)s^2 + o(s^2)$$

in die Gleichung (4.52) ein und somit erhalten

$$\begin{aligned} (x_0'' + 3x_0) + (x_1'' + 3x_1)s + (x_2'' + 3x_2)s^2 + o(s^2) &= 2 \sin t + s(x_0^2 + 2x_0x_1s + o(s)) \\ &= 2 \sin t + x_0^2s + 2x_0x_1s^2 + o(s^2). \end{aligned}$$

Das Vergleich von Koeffizienten bei  $s^j$  ergibt, dass  $x_j(t)$  die folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} x_0'' + 3x_0 &= 2 \sin t \\ x_1'' + 3x_1 &= x_0^2 \\ x_2'' + 3x_2 &= 2x_0x_1. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung has die einzige  $2\pi$ -periodische Lösung  $x_0(t) = \sin t$ . Die zweite Gleichung nimmt die Form

$$x_1'' + 3x_1 = \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

an, woraus wir die folgende  $2\pi$ -periodische Lösung bestimmen:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{6}.$$

Die  $2\pi$ -periodische Lösung der dritten Gleichung

$$x_2'' + 3x_2 = \sin t \left( \cos 2t + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6} \sin t + \frac{1}{2} \sin 3t$$

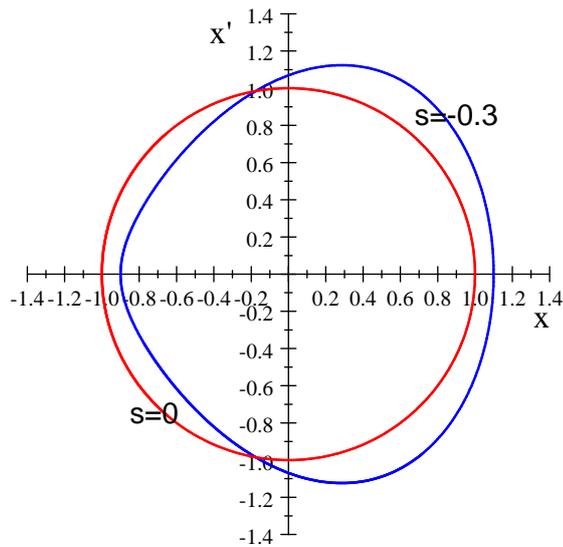


Figure 45: Die  $2\pi$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  von (4.52) im Phasenraum  $(x, x')$ : für  $s = 0$  (rot) und  $s = -0.3$  (blau)

ist

$$x_2 = -\frac{1}{12} \sin t - \frac{1}{12} \sin 3t.$$

(Fig. 45)

Betrachten wir jetzt ein Normalsystem

$$x' = F(x) + sf(t), \quad (4.53)$$

wobei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion der Klasse  $C^{k+1}$  mit  $k \geq 1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige  $T$ -periodische Funktion, und  $s \in \mathbb{R}$  ein Parameter. Sei  $x_0$  eine Ruhelage von  $x' = F(x)$ , d.h. eine Nullstelle von  $F$ . Für  $s = 0$  hat das System (4.53) die konstante Lösung  $x(t) \equiv x_0$ , die trivial periodisch. Wir besprechen die Frage, ob das System (4.53) eine  $T$ -periodische Lösung hat auch für  $s \neq 0$ , mindestens für die kleine Werte von  $s$ . Dafür betrachten wir eine neue unbekannte Funktion  $z$  wie folgt:

$$z = \frac{x - x_0}{s} \Leftrightarrow x = x_0 + sz.$$

Die Ableitung in  $t$  ergibt

$$z' = \frac{1}{s} (F(x) + sf(t)) = \frac{1}{s} F(x_0 + sz) + f(t).$$

Nach Lemma 3.14 (Hadamard-Lemma) haben wir die Identität

$$F(u) - F(v) = \varphi(u, v)(u - v) \quad (4.54)$$

für alle  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $\varphi$  eine stetige Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist und

$$\varphi(u, u) = F'(u).$$

Es folgt aus dem Beweis von Lemma 3.14, dass  $F \in C^{k+1}$  ergibt  $\varphi \in C^k(u, v)$ . Es folgt aus (4.54), dass

$$F(x_0 + sz) - F(x_0) = \varphi(x_0 + sz, x_0) sz.$$

Wegen  $F(x_0) = 0$  erhalten wir

$$\frac{1}{s}F(x_0 + sz) = \varphi(x_0 + sz, x_0) z = Az + g(z, s),$$

wobei

$$A := F'(x_0) \quad \text{und} \quad g(z, s) := \varphi(x_0 + sz, x_0) z - Az.$$

Es folgt daraus, dass

$$g(z, 0) = \varphi(x_0, x_0) z - Az = F'(x_0) z - F'(x_0) z = 0.$$

Somit erfüllt  $z$  die Gleichung

$$z' = Az + f(t) + g(z, s),$$

wobei  $f(t)$   $T$ -periodisch ist,  $g(z, s) \in C^k(z, s)$ ,  $g(z, 0) = 0$  und  $g$  trivial  $T$ -periodisch in  $t$ . Nach Satz 4.7, für hinreichend kleine Werte von  $s$  existiert genau eine  $T$ -periodische Lösung  $z(t, s)$ , und zwar  $z \in C^k(s)$ . Für die DGL (4.53) erhalten wir folgendes.

**Korollar 4.10** *Unter den o.g. Bedingungen setzen wir noch voraus, dass  $T$  nicht-resonant für die Matrix  $A = F'(x_0)$  ist. Dann, für hinreichend klein  $s$ , hat die DGL (4.53) genau eine  $T$ -periodische Lösung  $x(t, s)$ , die stetig in  $(t, s)$  ist und  $x(t, 0) = x_0$ . Darüber hinaus gilt  $x(t, s) \in C^k(s)$ .*

**Bemerkung.** Wie im Satz 4.3 setzen wir

$$\alpha = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ ein Eigenwert von } A \}.$$

Ist die Bedingung  $\alpha < 0$  von Satz 4.3(a) erfüllt, dann ist jedes  $T$  nicht-resonant für  $A$ . In der Tat, für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  gilt  $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha < 0$ , während im Resonanzfall gilt  $\lambda = \frac{2\pi i}{T} k$  und somit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . Deshalb ergibt die Bedingung  $\alpha < 0$  sowohl die asymptotische Stabilität der Ruhelage  $x_0$  der DGL  $x' = F(x)$  als auch die Existenz der periodischen Lösung von (4.53) für hinreichend klein  $s$ .

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL mit Parameter

$$x'' + 5x - x^2 - 4 = 2s \sin t. \tag{4.55}$$

Das entsprechende Normalsystem ist

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - 5x + 4 + 2s \sin t \end{cases}$$

Für  $s = 0$  hat das System zwei Ruhelagen  $(x_1, 0)$  und  $(x_2, 0)$  wobei  $x_1, x_2$  die Nullstellen von  $x^2 - 5x + 4 = 0$  sind, d.h.  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 4$ . Betrachten wir das System

in der Nähe der Ruhelage  $(1, 0)$ . Es ist bequemer direkt mit der Gleichung (4.55) zu arbeiten, indem wir die unbekannte Funktion wechseln wie folgt:

$$z = \frac{x - 1}{s} \Leftrightarrow x = 1 + sz.$$

Dann erhalten wir aus (4.55), dass

$$sz'' + 5(1 + sz) - (1 + sz)^2 - 4 = 2s \sin t$$

und nach Vereinfachen

$$z'' + 3z = 2 \sin t + sz^2.$$

Das ist genau die DGL (4.52), und wir wissen schon, dass die  $2\pi$ -periodische Lösung  $x(t, s)$  für klein  $s$  existiert und die folgende Taylorentwicklung in  $s$  besitzt:

$$z(t, s) = \sin t + \left( \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{6} \right) s - \frac{1}{12} (\sin t + \sin 3t) s^2 + o(s^2)$$

für  $s \rightarrow 0$ . Daraus erhalten wir die  $2\pi$ -periodische Lösung von (4.55) in der Nähe der Ruhelage  $(1, 0)$ :

$$x(t, s) = 1 + (\sin t) s + \left( \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{6} \right) s^2 - \frac{1}{12} (\sin t + \sin 3t) s^3 + o(s^3)$$

(Fig. 46). Für  $s \rightarrow 0$  konvergiert die geschlossene Phasenkurve der periodischen Lösung  $x(t, s)$  gegen die Ruhelage  $(1, 0)$ .

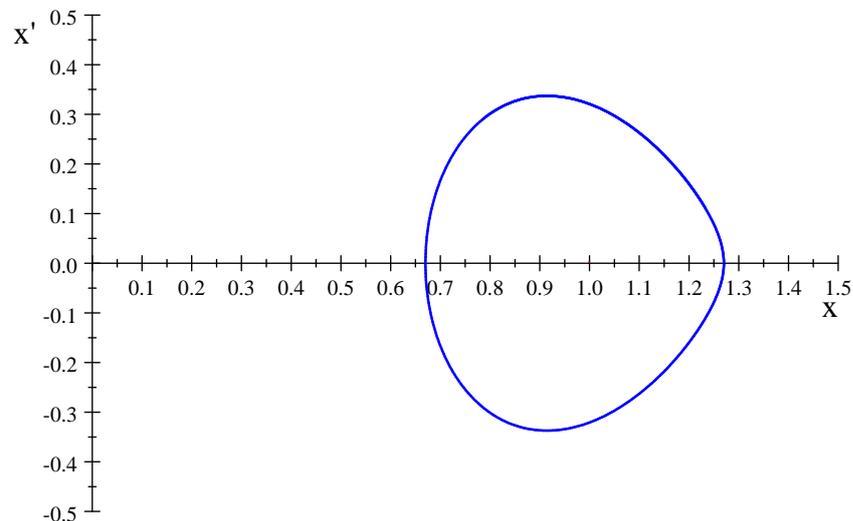


Figure 46: Die  $2\pi$ -periodische Lösung von (4.55) im Phasenraum  $(x, x')$  in der Nähe der Ruhelage  $(1, 0)$

## 5 Nullstellen von Lösungen und Sturm-Liouville-Problem

In diesem Kapitel betrachten wir die skalare lineare DGL 2. Ordnung

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad (5.1)$$

wobei  $p(t)$  und  $q(t)$  stetige Funktion auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind. Wir untersuchen die Nullstellen von nicht-trivialen Lösungen  $x(t)$  (wobei *nicht-trivial* bedeutet  $x(t) \not\equiv 0$ ).

Zum Beispiel, die DGL  $x'' + x = 0$  hat die Lösungen  $\sin t$  und  $\cos t$  die beiden unendlich viele Nullstellen haben, während die ähnliche DGL  $x'' - x = 0$  die Lösungen  $\sinh t$  und  $\cosh t$  hat, die höchstens eine Nullstelle haben.

### 5.1 Satz von Sturm

Wir fangen mit dem folgenden Lemma an.

**Lemma 5.1** *Sei  $x(t)$  eine nicht-triviale Lösung von (5.1). Dann die Menge von Nullstellen von  $x(t)$  auf jedem kompakten Intervall  $J \subset I$  ist endlich. Darüber hinaus ist jede Nullstelle von  $x(t)$  einfach.*

Eine Nullstelle  $t_0$  von  $x(t)$  heißt *einfach* falls  $x'(t_0) \neq 0$ . Im Fall von Polynom  $x(t)$  bedeutet das, dass die Vielfachheit von  $t_0$  gleich 1 ist (vgl. Lemma 2.10). Ist  $t_0$  eine einfache Nullstelle von  $x(t)$ , so wechselt  $x(t)$  das Vorzeichen in der Nähe von  $t_0$ .

**Beweis.** Ist  $t_0$  nicht einfach, so löst  $x(t)$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'' + px' + qx = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = 0 \end{cases},$$

woraus folgt by der Eindeutigkeit der Lösung (Satz von Picard-Lindelöf), dass  $x(t) \equiv 0$ . Somit ist  $t_0$  einfach.

Angenommen, dass die Menge von Nullstellen von  $x(t)$  in  $J$  unendlich ist, so existiert eine Folge  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  von verschiedenen Nullstellen von  $x(t)$  in  $J$ . Nach dem Satz von Weierstrass hat die Folge  $\{t_k\}$  eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $\{t_k\}$  konvergiert. Dann liegt der Grenzwert  $t_0 = \lim t_k$  in  $J$ . Wir haben offensichtlich  $x(t_0) = 0$  aber auch  $x'(t_0) = 0$ , was folgt aus

$$x'(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(t_k) - x(t_0)}{t_k - t_0} = 0.$$

Somit ist die Nullstelle  $t_0$  nicht einfach, was im Widerspruch zum ersten Teil steht.

■

**Satz 5.2 (Hauptsatz)** (Satz of Sturm) *Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  die Lösungen von den folgenden zwei DGLen auf einem Intervall  $I$ :*

$$x'' + p(t)x' + q_1(t)x = 0 \text{ und } y'' + p(t)y' + q_2(t)y = 0, \quad (5.2)$$

wobei  $p \in C^1(I)$ ,  $q_1, q_2 \in C(I)$ . Seien  $a < b$  zwei Nullstellen von  $x$  in  $I$ .

Gilt

$$q_1(t) \leq q_2(t) \quad \forall t \in I, \quad (5.3)$$

so hat  $y(t)$  eine Nullstelle in  $[a, b]$ .

Gilt

$$q_1(t) < q_2(t) \quad \forall t \in I, \quad (5.4)$$

so hat  $y(t)$  eine Nullstelle in  $(a, b)$ .

Man kann kurz sagen, dass zwischen zwei Nullstelle von  $x$  es immer eine Nullstelle von  $y$  gibt, unter (5.3) oder (5.4). Eine Regel zu erinnern: mit größerem  $q(t)$  hat die Lösung häufiger Nullstellen.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGLen

$$x'' + \omega_1^2 x = 0 \quad \text{und} \quad y'' + \omega_2^2 y = 0$$

mit positiven Konstanten  $\omega_1 \leq \omega_2$  (in diesem Fall  $q_1(t) \equiv \omega_1^2$ ,  $q_2(t) \equiv \omega_2^2$  und  $p = 0$ ). Die allgemeinen Lösungen sind

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad y(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Die Nullstellen von  $x(t)$  sind die Elementen einer arithmetischen Folge mit der Differenz  $\frac{\pi}{\omega_1}$ , und die Nullstellen von  $y(t)$  sind die Elementen von einer arithmetischen Folge mit der Differenz  $\frac{\pi}{\omega_2} \leq \frac{\pi}{\omega_1}$ . Es ist klar, dass zwischen zwei Gliedern erster Folge es immer ein Glied zweiter Folge gibt.

**Beispiel.** Seien  $a < b$  zwei Nullstellen einer Lösung  $x(t)$  von

$$x'' + q(t)x = 0. \quad (5.5)$$

Angenommen, dass  $q(t) \leq \omega^2$  mit  $\omega > 0$ , beweisen wir, dass

$$b - a \geq \frac{\pi}{\omega}. \quad (5.6)$$

Dafür vergleichen wir  $x(t)$  mit der Lösung  $y(t)$  von

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

d.h.  $y(t) = C \sin(\omega t - \varphi)$  wobei  $C$  und  $\varphi$  beliebig reell sind. Die Nullstellen von  $y$  sind  $\frac{\pi k + \varphi}{\omega}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Wählen wir  $\varphi$  so dass

$$\frac{\varphi}{\omega} < a < \frac{\pi + \varphi}{\omega}$$

Nach dem Satz 5.2 liegt in  $[a, b]$  eine Nullstelle von  $y(t)$ . Da  $\frac{\pi + \varphi}{\omega}$  die kleinste Nullstelle von  $y(t)$  in  $[a, \infty)$  ist, so liegt sie in  $[a, b]$ , d.h.

$$\frac{\pi + \varphi}{\omega} \leq b,$$

woraus folgt

$$b - a \geq \frac{\pi + \varphi}{\omega} - a = \frac{\pi}{\omega} - \left( a - \frac{\varphi}{\omega} \right).$$

Da  $a - \frac{\varphi}{\omega}$  beliebig klein sein kann, so erhalten wir  $b - a \geq \pi/\omega$ .

Falls  $q(t) \leq 0$  dann gilt  $q(t) \leq \omega^2$  für jedes  $\omega > 0$  und (5.6) zum Widerspruch führt, was bedeutet, dass jede nicht-Null Lösung  $x(t)$  von (5.5) mit  $q \leq 0$  höchstens eine Nullstelle hat.

Analog beweist man, dass im Fall  $q(t) \geq \omega^2$  gilt

$$b - a \leq \frac{\pi}{\omega}.$$

**Beweis von dem Satz 5.2.** Die DGL

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

lässt sich mit dem Wechsel

$$u(t) = x(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int p(t) dt\right),$$

wie folgt transformieren

$$u'' + Q(t)u = 0,$$

wobei

$$Q(t) = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}$$

(siehe Aufgabe 31). Wir benutzen hier  $p \in C^1$ . Da die Nullstellen von  $x(t)$  und  $u(t)$  gleich sind und  $q_1 \leq q_2 \Leftrightarrow Q_1 \leq Q_2$ , so reicht es den Satz im Fall  $p \equiv 0$  zu beweisen. So, wir nehmen weiter  $p \equiv 0$  an.

Da die Menge von Nullstellen von  $x(t)$  in  $[a, b]$  endlich ist, so können wir annehmen, dass  $a$  und  $b$  aufeinanderfolgende Nullstellen von  $x(t)$  sind. Dann  $x(t) \neq 0$  im  $(a, b)$  und wir können annehmen, dass  $x(t) > 0$  in  $(a, b)$ . Zeigen wir, dass

$$x'(a) > 0 \quad \text{und} \quad x'(b) < 0.$$

Es folgt aus  $x(t) > 0$  in  $(a, b)$  dass

$$x'(a) = \lim_{t \rightarrow a, t > a} \frac{x(t) - x(a)}{t - a} \geq 0.$$

Da  $x'(a) = 0$  nach Lemma 5.1 nicht erlaubt ist, so erhalten wir  $x'(a) > 0$ . Der Beweis von  $x'(b) < 0$  ist analog.

Hat  $y(t)$  keine Nullstelle in  $[a, b]$ , so können wir annehmen, dass  $y(t) > 0$  in  $[a, b]$ . Multiplizieren die DGL  $x'' + q_1(t)x = 0$  mit  $y$ , die DGL  $y'' + q_2(t)y = 0$  mit  $x$ , und Subtrahieren ergeben

$$(x'' + q_1(t)x)y - (y'' + q_2(t)y)x = 0,$$

$$x''y - y''x = (q_2 - q_1)xy,$$

woraus folgt

$$(x'y - y'x)' = (q_2 - q_1)xy.$$

Integrieren dieser Identität von  $a$  bis  $b$  und Anwendung von  $x(a) = x(b) = 0$  ergibt

$$x'(b)y(b) - x'(a)y(a) = [x'y - y'x]_a^b = \int_a^b (q_2(t) - q_1(t))x(t)y(t) dt. \quad (5.7)$$

Da  $q_2(t) \geq q_1(t)$  und  $x(t) > 0$ ,  $y(t) > 0$  in  $(a, b)$ , so das Integral in (5.7) nicht-negativ ist. Andererseits ist die linke Seite von (5.7) negativ da

$$y(a), y(b) > 0 \text{ und } x'(b) < 0, x'(a) < 0.$$

Dieser Widerspruch beweist, dass  $y$  in  $[a, b]$  eine Nullstelle hat.

Angenommen jetzt  $q_1 < q_2$ , beweisen wir, dass  $y(t)$  eine Nullstelle in  $(a, b)$  hat. Falls nicht, dann wir annehmen können, dass  $y(t) > 0$  in  $(a, b)$  und somit  $y(a) \geq 0$  und  $y(b) \geq 0$ . Das Integral in (5.7) ist jetzt echt positiv da  $q_2(t) > q_1(t)$  und  $x(t), y(t) > 0$  in  $(a, b)$ , während die linke Seite von (5.7) nicht-positiv ist, da

$$y(a), y(b) \geq 0 \text{ und } x'(b) < 0, x'(a) < 0.$$

■

## 5.2 Sturm-Liouville-Problem

Fixieren wir ein Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und Funktionen  $p, q, w \in C[a, b]$  mit  $w > 0$ . Betrachten auf  $[a, b]$  das folgendes Problem

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x + \lambda wx = 0, \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Die Bedingung  $x(a) = x(b) = 0$  heißen die Randbedingung. Das Parameter  $\lambda$  in (5.8) heißt *spektraler Parameter*. Die Funktion  $x(t)$  und der Wert  $\lambda \in \mathbb{R}$  sind unbekannt (klar, dass  $x(t) \equiv 0$  eine triviale Lösung ist).

**Definition.** Das *Sturm-Liouville-Problem* ist die Aufgabe die Paare  $x(t) \not\equiv 0$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  zu finden, die (5.8) erfüllen.

Wir werden sehen, dass nicht-triviale Lösungen  $x(t)$  nur für bestimmte Werte von  $\lambda$  existieren.

**Definition.** Jede nicht-triviale Lösung  $x(t)$  von (5.8) heißt *Eigenfunktion* von (5.8), und der entsprechende Wert von  $\lambda$  heißt *Eigenwert* von (5.8).

Dieses Problem ist ähnlich zum Eigenwertproblem  $Av = \lambda v$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die Rolle von  $A$  spielt in (5.8) der Differentialoperator mit den Randbedingungen. Wir haben gesehen, dass die Eigenwerte von Matrizen helfen die linearen Normalsysteme zu lösen. Analog helfen die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (5.8) bestimmte *partielle* Differentialgleichungen zu lösen (siehe Unterhalb).

**Lemma 5.3** *Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Eigenfunktionen von (5.8) mit dem gleichen Eigenwert  $\lambda$ , so gilt  $y(t) = Cx(t)$  für eine Konstante  $C$ .*

In anderen Wörtern, jeder Eigenwert von (5.8) hat geometrische Vielfachheit 1.

**Beweis.** Da  $a$  eine Nullstelle von  $x$  ist, so gilt  $x'(a) \neq 0$ . Setzen wir  $C = \frac{y'(a)}{x'(a)}$ . Die Funktion

$$z(t) := y(t) - Cx(t)$$

verschwindet in  $t = a$  und ihre Ableitung  $z'(t)$  auch verschwindet in  $t = a$  nach der Wahl von  $C$ . Somit gilt  $z(t) \equiv 0$  und  $y(t) \equiv Cx(t)$ . ■

**Beispiel.** Betrachten wir das Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ x(0) = x(a) = 0 \end{cases}$$

wobei  $a > 0$ . Im Fall  $\lambda \leq 0$  hat jede nicht-triviale Lösung von  $x'' + \lambda x = 0$  höchstens eine Nullstelle, so dass  $x(0) = x(a) = 0$  unmöglich ist. Weiter nehmen wir an, dass  $\lambda > 0$ . Die allgemeine Lösung von  $x'' + \lambda x = 0$  ist

$$x = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Die Randbedingungen geben

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin(a\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases}$$

woraus folgt

$$\lambda = \frac{\pi^2 k^2}{a^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dieser Eigenwert hat die Eigenfunktion

$$x(t) = \sin(\sqrt{\lambda}t) = \sin \frac{\pi kt}{a}.$$

Insbesondere ist alles einfach im Fall  $a = \pi$ : die Eigenwerte sind

$$\lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

und die Eigenfunktionen sind

$$x(t) = \sin kt.$$

Wir betonen, dass die Menge von Eigenwerten abzählbar ist und die Folge von Eigenwerten gegen  $+\infty$  divergiert.

### 5.3 Satz von Sturm-Liouville

**Satz 5.4 (Hauptsatz)** (Satz von Sturm-Liouville) Seien  $p \in C^1[a, b]$ ,  $q, w \in C[a, b]$  und  $w > 0$  auf  $[a, b]$  und betrachten wir das Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x + \lambda w(t)x = 0 \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

(a) Die Menge von Eigenwerten von (5.9) ist eine Folge  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  von reellen Zahlen mit  $\lambda_k < \lambda_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$  und  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  für  $k \rightarrow \infty$ .

(b) (Oszillationssatz von Sturm) Die Eigenfunktion  $x_k(t)$  von  $\lambda_k$  hat genau  $k-1$  Nullstellen im  $(a, b)$ .

**Beweis.** Wie im Beweise von Satz 5.2, machen wir in (5.9) die Substitution

$$u(t) = x(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int p dt\right),$$

woraus folgt, dass (5.9) äquivalent zu

$$\begin{cases} u'' + Q(t)u + \lambda w(t)u = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}. \quad (5.10)$$

wobei

$$Q = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{p'}{2}.$$

Offensichtlich haben die Probleme (5.9) und (5.10) die gleichen Eigenwerte, und die Nullstelle von den Eigenfunktionen  $x(t)$  und  $u(t)$  stimmen überein. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $p \equiv 0$ , d.h. (5.9) sieht jetzt wie folgt aus:

$$\begin{cases} x'' + q(t)x + \lambda w(t)x = 0 \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir weiter annehmen, dass  $q < 0$ , da (5.11) äquivalent zu

$$\begin{cases} x'' + (q - Cw)x + \mu wx = 0 \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

ist, wobei  $\mu = \lambda + C$  und  $C$  eine positive Konstante ist so dass  $q - Cw < 0$ . Offensichtlich die Eigenfunktionen von (5.11) und (5.12) sind gleich, und die Eigenwerte von (5.11) sind die verschobene Eigenwerte von (5.12).

Weiter nehmen wir an, dass  $q < 0$  on  $[a, b]$ . Es folgt, dass alle Eigenwerte  $\lambda$  von (5.11) positive sind, da im Fall  $q < 0$ ,  $\lambda \leq 0$  gilt  $q + \lambda w \leq 0$  und somit jede nicht-triviale Lösung von  $x'' + q(t)x + \lambda w(t)x = 0$  höchstens eine Nullstelle hat (siehe Beispiel nach dem Satz 5.2).

Setzen wir die Funktionen  $q(t)$ ,  $w(t)$  stetig fort auf alle  $t \in \mathbb{R}$  so dass für große  $|t|$  gilt  $q(t) = 0$  und  $w(t) = 1$ . Somit ist die DGL (5.11) für große  $|t|$  wie folgt:  $x'' + \lambda x = 0$ . Betrachten wir den folgenden Anfangswertproblem auf  $\mathbb{R}$  mit Parameter  $\lambda > 0$ :

$$\begin{cases} x'' + (q(t) + \lambda w(t))x = 0 \\ x(a) = 0 \\ x'(a) = 1 \end{cases}$$

und bezeichnen die maximale Lösung mit  $x(t, \lambda)$ , die unbedingt für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert ist. Der Wert  $\lambda$  ist ein Eigenwert von (5.11) genau dann, wenn

$$x(b, \lambda) = 0,$$

d.h.  $b$  eine Nullstelle der Funktion  $t \mapsto x(t, \lambda)$  ist. Wir sollen alle  $\lambda$  mit dieser Eigenschaft beschreiben. Für jedes Eigenwert  $\lambda$  ist dann  $x(t, \lambda)$  Eigenfunktion.

Für jedes  $\lambda > 0$  betrachten wir die Menge von allen Nullstellen der Funktion  $t \mapsto x(t, \lambda)$  im Intervall  $[a, +\infty)$ . Für großen Werten von  $t$  wird die Gleichung  $x'' + \lambda x = 0$ , und die Nullstellen davon lassen sich als eine arithmetische Folge darstellen. Im beschränkten Intervall in  $t$  ist die Menge von Nullstelle von  $x(t, \lambda)$

endlich (Lemma 5.1). Somit lassen sich die Nullstellen von  $t \mapsto x(t, \lambda)$  im  $[a, +\infty)$  in der steigenden Ordnung nummerieren.

Bezeichnen wir mit  $\{z_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$  die monoton steigende Folge von allen Nullstelle von  $t \mapsto x(t, \lambda)$  im  $[a, \infty)$ ; insbesondere gilt  $z_0(\lambda) = a$  und  $z_k(\lambda) > a$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Die Bedingung  $x(b, \lambda) = 0$  ist äquivalent zu

$$b = z_k(\lambda) \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Man erhält alle Eigenwerte indem man alle diese Gleichungen bezüglich  $\lambda$  löst. Zunächst untersuchen wir Eigenschaft der Funktionen  $z_k(\lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Behauptung 1.** *Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist die Funktion  $z_k(\lambda)$  streng monoton fallend in  $\lambda$ .*

Wir müssen beweisen, dass

$$0 < \lambda < \mu \Rightarrow z_k(\mu) < z_k(\lambda). \quad (5.13)$$

Nach dem Satz 5.2, das Intervall  $(z_{k-1}(\lambda), z_k(\lambda))$  eine Nullstelle von  $x(t, \mu)$  enthält, d.h.

$$z_j(\mu) \in (z_{k-1}(\lambda), z_k(\lambda)) \text{ für ein } j \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Beweisen wir jetzt (5.13) per Induktion nach  $k$ . Induktionsanfang für  $k = 1$ : da

$$z_j(\mu) \in (z_0(\lambda), z_1(\lambda)),$$

so es folgt

$$z_1(\mu) \leq z_j(\mu) < z_1(\lambda).$$

Induktionsschritt von  $k - 1$  nach  $k$ . Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$z_{k-1}(\mu) < z_{k-1}(\lambda).$$

Es folgt aus (5.14), dass  $z_j(\mu) > z_{k-1}(\mu)$  und somit  $j > k - 1$  und  $j \geq k$ . Wir erhalten

$$z_k(\mu) \leq z_j(\mu) < z_k(\lambda),$$

was zu beweisen war.

**Behauptung 2.** *Für jedes  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ist die Funktion  $z_k(\lambda)$  stetig in  $\lambda$ .*

Der Fall  $k = 0$  ist trivial da  $z_k(\lambda) \equiv a$ . Angenommen, dass  $z_{k-1}(\lambda)$  stetig ist, beweisen wir, dass auch  $z_k(\lambda)$  stetig. Fixieren wir einen Wert  $\lambda_0 > 0$  wo wir die Stetigkeit von  $z_k$  beweisen, und schreiben  $\tau_k = z_k(\lambda_0)$ . Wir brauchen folgendes zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ so dass } |\lambda - \lambda_0| < \delta \implies |z_k(\lambda) - \tau_k| < \varepsilon.$$

Wählen wir  $\varepsilon > 0$  so klein, dass die Funktion  $t \mapsto x(t, \lambda_0)$  im Intervall  $(\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon)$  nur eine Nullstelle hat. Dann haben die Werte  $x(t, \lambda_0)$  für  $t = \tau_k \pm \varepsilon$  die verschiedene Vorzeichen. Nach der Stetigkeit von  $x(t, \lambda)$  in  $\lambda$ , gleiches gilt für die Funktion  $x(t, \lambda)$ , vorausgesetzt, dass  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$  mit hinreichend kleinem  $\delta$ . Nach dem Zwischenwertsatz hat die Funktion  $x(t, \lambda)$  mindestens eine Nullstelle in  $(\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon)$ .

Jetzt beweisen wir, dass  $x(t, \lambda)$  im  $(\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon)$  genau eine Nullstelle hat, falls  $\varepsilon$  klein genug ist. Setzen wir

$$M = \sup w.$$

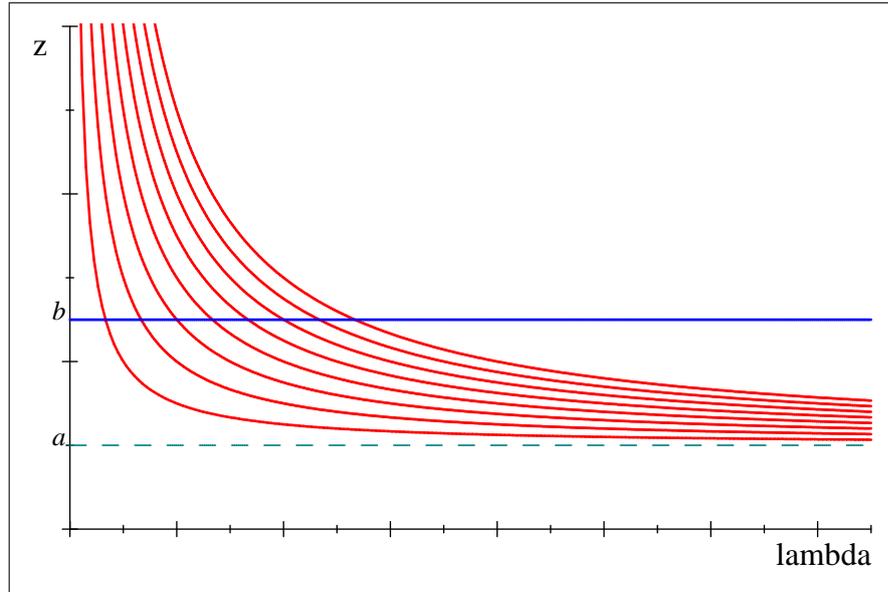


Figure 47: Die Graphen von  $z_k(\lambda)$

Da  $x(t, \lambda)$  eine Lösung der DGL

$$x'' + (q + \lambda w)x = 0$$

ist und  $q + \lambda w \leq \lambda M$ , so ergibt der Satz 5.2, dass der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Nullstellen dieser Gleichung ist mindestens  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}}$ . Wählen wir  $\delta < \lambda_0$  so dass  $\lambda < 2\lambda_0$ . Dann für hinreichend klein  $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0)$  gilt

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}} \geq \frac{\pi}{\sqrt{2\lambda_0 M}} > 2\varepsilon.$$

Es folgt, dass  $x(t, \lambda)$  im  $(\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon)$  höchstens (und somit genau) eine Nullstelle hat.

Wir müssen noch beweisen, dass diese Nullstelle genau  $z_k(\lambda)$  ist (und nicht  $z_j(\lambda)$  mit einem anderen Wert von  $j$ ).

Mit gleichem Argument können wir auch annehmen, dass auch das Intervall  $(\tau_{k-1} - \varepsilon, \tau_{k-1} + \varepsilon)$  genau eine Nullstelle von  $x(t, \lambda)$  enthält. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Funktion  $z_{k-1}(\lambda)$  stetig. Liegt  $\lambda$  nahe genug zu  $\lambda_0$ , so gilt  $|z_{k-1}(\lambda) - \tau_{k-1}| < \varepsilon$ . Somit ist  $z_{k-1}(\lambda)$  die einzige Nullstelle von  $x(t, \lambda)$  im Intervall  $(\tau_{k-1} - \varepsilon, \tau_{k-1} + \varepsilon)$ . Zwischen den Intervallen  $(\tau_{k-1} - \varepsilon, \tau_{k-1} + \varepsilon)$  und  $(\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon)$ , d.h. im Intervall  $[\tau_{k-1} + \varepsilon, \tau_k - \varepsilon]$  hat die Funktion  $x(t, \lambda_0)$  keine Nullstelle und somit hat ein konstante Vorzeichen, z.B. positiv. Nach der Stetigkeit von  $x(t, \lambda)$  in  $(t, \lambda)$  ist die Funktion  $x(t, \lambda)$  auch positiv in diesem Intervall, falls  $\lambda$  nahe genug zu  $\lambda_0$  ist. Somit ist die Nullstelle von  $x(t, \lambda)$  im  $(\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon)$  nächste nach dem  $z_{k-1}(\lambda)$ , d.h.  $z_k(\lambda)$ . Dies beweist, dass  $|z_k(\lambda) - \tau_k| < \varepsilon$  und somit die Stetigkeit von  $z_k(\lambda)$ .

**Claim 3** Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} z_k(\lambda) \rightarrow +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} z_k(\lambda) \rightarrow a. \quad (5.15)$$

Wir haben

$$q(t) + \lambda w(t) \leq \lambda \sup w = \lambda M.$$

Es folgt, dass der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von  $x(t, \lambda)$  mindestens  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}}$  ist, woraus folgt

$$z_1(\lambda) - z_0(\lambda) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}}.$$

Für  $\lambda \rightarrow 0$  erhalten wir  $z_1(\lambda) \rightarrow +\infty$  und somit auch

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} z_k(\lambda) \rightarrow +\infty$$

für jedes  $k \geq 1$ . Analog haben wir

$$q(t) + \lambda w(t) \geq \inf q + \lambda \inf w = Q + \lambda m,$$

wobei  $m = \inf w > 0$  und  $Q = \inf q < 0$ . Sei  $\lambda$  so groß, dass  $Q + \lambda m > 0$ . Es folgt, dass der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Nullstellen von  $x(t, \lambda)$  höchstens  $\frac{\pi}{\sqrt{Q + \lambda m}}$  ist, d.h.

$$z_k(\lambda) - z_{k-1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{Q + \lambda m}},$$

woraus folgt per Induktion, dass

$$z_k(\lambda) \leq a + k \frac{\pi}{\sqrt{Q + \lambda m}}.$$

Da  $z_k(\lambda) > a$  und  $\pi/\sqrt{Q + \lambda m} \rightarrow 0$  für  $\lambda \rightarrow +\infty$ , so erhalten wir

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} z_k(\lambda) \rightarrow a.$$

Sei  $k \geq 1$ . Nach den obigen Behauptungen ist die Funktion  $z_k(\lambda)$  auf  $(0, +\infty)$  stetig, streng monoton fallend, und (5.15) gilt. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt  $z_k(\lambda)$  jeden Wert in  $(a, +\infty)$  genau einmal an. Insbesondere gibt es genau einen Wert von  $\lambda$  mit  $z_k(\lambda) = b$ . Bezeichnen wir diesen Wert mit  $\lambda_k$  so dass  $z_k(\lambda_k) = b$ . Auf dem Bild 47 sieht man die Graphen von  $z_k(\lambda)$  mit zwei waagerechten Geraden auf den Niveaus  $a$  bzw  $b$ . Die Schnitte mit der zweiten Gerade liefern die Folge  $\{\lambda_k\}$ .

Es folgt aus dieser Konstruktion, dass  $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ . In der Tat haben wir für jedes  $k \geq 0$

$$z_{k+1}(\lambda_k) > z_k(\lambda_k) = b = z_{k+1}(\lambda_{k+1}),$$

woraus  $\lambda_k < \lambda_{k+1}$  folgt, da  $z_{k+1}$  monoton fallend ist.

Zeigen wir, dass  $\lambda_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . In der Tat folgt es aus  $z_k(\lambda) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , dass für jedes  $\lambda > 0$  und für hinreichend große Werte von  $k$  gilt

$$z_k(\lambda) > b.$$

Da  $z_k(\lambda_k) = b$ , so folgt es, dass  $\lambda_k > \lambda$ , was  $\lambda_k \rightarrow \infty$  ergibt.

Die Funktion  $x_k(t) := x(t, \lambda_k)$  ist die Eigenfunktion mit dem Eigenwert  $\lambda_k$  nach Konstruktion. Auch nach Konstruktion die Nullstellen von  $x_k(t) = x(t, \lambda_k)$  im

$[a, +\infty)$  sind  $z_j(\lambda_k)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Da  $z_0(\lambda_k) = a$  und  $z_k(\lambda_k) = b$ , so alle Nullstellen von  $x_k(t)$  im  $(a, b)$  sind  $z_j(\lambda_k)$  mit  $j = 1, \dots, k - 1$ . Somit hat die Eigenfunktion  $x_k(t)$  genau  $k - 1$  Nullstellen im  $(a, b)$ , was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Satz von Sturm-Liouville hat noch dritten Punkt (der von Steklov bewiesen wurde) der folgendes besagt: die Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  von den Eigenfunktionen ist vollständig. Dies bedeutet, dass jede Funktion  $f \in C[a, b]$  (und sogar jede Funktion  $f \in L^2(a, b)$ ) sich in der Reihe entwickeln lässt:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k(t), \quad (5.16)$$

mit  $c_k \in \mathbb{R}$ , wobei die Konvergenz in  $L^2$ -norm gilt, d.h.

$$\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei  $f_n$  die partiellen Summen von (5.16) sind. Die Vollständigkeit von  $\{x_k\}$  hat wichtige Folgerungen in partiellen DGLen. Der Beweis davon gehört zu Funktionsanalysis.

## 5.4 \* Eine Anwendung für Wärmeleitungsgleichung

Consider an example showing how the Sturm-Liouville problem occurs in applications. The heat equation is a *partial differential equation* (PDE) für a Funktion  $u = u(t, x)$  of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

One of the problems associated with this PDE is a so called *initial-boundary problem*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t \geq 0, x \in [a, b], & \text{(the heat equation)} \\ u(0, x) = f(x), & x \in [a, b], & \text{(the initial condition)} \\ u(t, a) = u(t, b) = 0, & t \geq 0, & \text{(the boundary condition)} \end{cases} \quad (5.17)$$

where  $f(x)$  is a given Funktion on  $[a, b]$ . Physically this corresponds to finding the temperature  $u(t, x)$  at time  $t$  at point  $x$  provided it is known that the temperature at the boundary points  $x = a$  und  $x = b$  remains constant 0 für alle  $t \geq 0$  while the temperature at the initial time  $t = 0$  was  $f(x)$ .

This problem can be solved by the *method of separation of variables* as follows. Let us first try und find solutions to the heat equation in the form  $u(t) = y(x)z(t)$ . The heat equation becomes

$$z'y = zy''$$

that is

$$\frac{z'}{z}(t) = \frac{y''}{y}(x).$$

Hence, we have the identity of two Funktionen one of them depending on  $t$  und the other – on  $x$ . Of course, this can happen only if both Funktionen are constants. Denote this constant by  $-\lambda$  so that we obtain two separate equations

$$\begin{aligned} z' + \lambda z &= 0 \\ y'' + \lambda y &= 0. \end{aligned}$$

To ensure the boundary conditions für  $u$ , it suffices to require that

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Hence, the Funktion  $y$  must solve the Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

(of course, we are interested only in non-zero solutions  $y$ ). Setting für simplicity  $a = 0$  und  $b = \pi$ , we obtain as above the sequence of the eigenvalues  $\lambda_k = k^2$  und the eigenfunctions

$$y_k(x) = \sin kx,$$

where  $k \in \mathbb{N}$ . For  $\lambda = k^2$ , the ODE  $z' + \lambda z = 0$  has the allgemeine Lösung

$$z_k(t) = C_k e^{-k^2 t}.$$

Hence, we obtain a sequence  $u_k(t, x) = C_k e^{-k^2 t} \sin kx$  of solutions to the heat equation that satisfy the boundary condition.

Note that  $u_k(0, x) = C_k \sin kx$ . Hence, if the initial Funktion  $f(x)$  has the form  $C_k \sin kx$  then the solution to the problem (5.17) is the Funktion  $u_k(t, x)$ . In a more general situation, if

$$f(x) = \sum_{k=1}^N C_k \sin kx \quad (5.18)$$

then the solution to (5.17) is

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^N C_k e^{-k^2 t} \sin kx. \quad (5.19)$$

This is trivial für a finite  $N$  but in certain sense is true also when  $N = \infty$ . This is the most useful case because für  $N = \infty$  the right hand side of (5.18) is a sin-Fourier series. Given a Funktion  $f$  on  $[0, \pi]$  such that  $f(0) = 0 = f(\pi)$  (which are necessary condition für the consistency of (5.17), extend  $f(x)$  oddly to  $[-\pi, 0]$  so that the Fourier series of  $f$  on  $[-\pi, \pi]$  contains only the sin-terms. Then one obtains the solution  $u(t, x)$  also in the form of the Fourier series (5.19). Of course, some justifications are needed here in order to be able to differentiate (5.19) term-by-term, and some additional restrictions should be imposed on  $f$ . However, we do not go into further details of this subject.

This example shows how the Sturm-Liouville problem occurs naturally in PDEs und motivates the further study of the Sturm-Liouville problem.

As we have seen in the example of the heat equation, the representation of the form (5.16) with  $x_k(t) = \sin kt$  was used für the initial Funktion  $f$ . The existence of such a representation leads to the solvability of the initial-boundary value problem für a wide enough class of the initial Funktionen  $f$ . Similar results für other PDEs require the completeness of the sequence of the eigenfunctions of the general Sturm-Liouville problem.

## 5.5 \* Weitere Folgerungen von dem Satz von Sturm

**Beispiel.** Let  $q_1(t) = q_2(t) = q(t)$  und let  $x$  und  $y$  be linearly independent solution to the same ODE  $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ . Then we claim that if  $a < b$  are two consecutive zeros of  $x(t)$  then there is exactly one zero of  $y$  in  $[a, b]$  und this zero belongs to  $(a, b)$ . Indeed, by Satz 5.2,  $y$  has a zero in  $[a, b]$ , say  $y(c) = 0$ . Let us verify that  $c \neq a, b$ . Assuming that  $c = a$  und, hence,  $y(a) = 0$ , we obtain that  $y$  solves the initial value problem

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = 0 \\ y(a) = 0 \\ y'(a) = Cx'(a) \end{cases}$$

where  $C = \frac{y'(a)}{x'(a)}$  (note that  $x'(a) \neq 0$  by Lemma 5.1). Since  $Cx(t)$  solves the same initial value problem, we conclude by the uniqueness theorem that  $y(t) \equiv Cx(t)$ . However, this contradicts to the hypothesis that  $x$  und  $y$  are linearly independent.

Finally, let us show that  $y(t)$  has a unique root in  $[a, b]$ . Indeed, if  $c < d$  are two zeros of  $y$  in  $[a, b]$  then switching  $x$  and  $y$  in the previous argument, we conclude that  $x$  has a zero in  $(c, d) \subset (a, b)$ , which is not possible.

It follows that if  $\{a_k\}_{k=1}^N$  is an increasing sequence of consecutive zeros of  $x(t)$  then in any interval  $(a_k, a_{k+1})$  there is exactly one root  $c_k$  of  $y$  so that the roots of  $x$  and  $y$  intertwine. An obvious example für this case is given by the couple  $x(t) = \sin t$  und  $y(t) = \cos t$ .

Consider the differential operator

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + p(t) \frac{d}{dt} + q(t) \quad (5.20)$$

so that the ODE (5.1) can be shortly written as  $Lx = 0$ . Assume in the sequel that  $p \in C^1(I)$  und  $q \in C(I)$  für some interval  $I$ .

**Definition.** Any  $C^2$  Funktion  $y$  satisfying  $Ly \leq 0$  is called a *supersolution* of the operator  $L$  (or of the ODE  $Lx = 0$ ).

**Korollar 5.5** *If  $L$  has a positive supersolution  $y(t)$  on an interval  $I$  then any non-zero solution  $x(t)$  of  $Lx = 0$  has at most one zero on  $I$ .*

**Beweis.** Indeed, define Funktion  $\tilde{q}(t)$  by the equation

$$y'' + p(t)y' + \tilde{q}(t)y = 0.$$

Comparing with

$$Ly = y'' + p(t)y' + q(t)y \leq 0,$$

we conclude that  $\tilde{q}(t) \geq q(t)$ . Since  $x'' + px' + qx = 0$ , we obtain by Satz 5.2 that between any two distinct zeros of  $x(t)$  there must be a zero of  $y(t)$ . Since  $y(t)$  has no zeros,  $x(t)$  cannot have two distinct zeros. ■

**Beispiel.** If  $q(t) \leq 0$  on some interval  $I$  then Funktion  $y(t) \equiv 1$  is obviously a positive supersolution. Hence, any non-zero solution of  $x'' + q(t)x = 0$  has at most one zero on  $I$ . It follows that, für any solution of the initial value problem,

$$\begin{cases} x'' + q(t)x = 0 \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = a \end{cases}$$

with  $q(t) \leq 0$  und  $a \neq 0$ , we have  $x(t) \neq 0$  für alle  $t \neq t_0$ . In particular, if  $a > 0$  then  $x(t) > 0$  für alle  $t > t_0$ .

**Korollar 5.6** (The comparison principle) *Assume that the operator  $L$  has a positive supersolution  $y$  on an interval  $[a, b]$ . If  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  are two  $C^2$  Funktionen on  $[a, b]$  such that  $Lx_1 = Lx_2$  und  $x_1(t) \leq x_2(t)$  für  $t = a$  und  $t = b$  then  $x_1(t) \leq x_2(t)$  holds für alle  $t \in [a, b]$ .*

**Beweis.** Setting  $x = x_2 - x_1$ , we obtain that  $Lx = 0$  und  $x(t) \geq 0$  at  $t = a$  und  $t = b$ . That is,  $x(t)$  is a solution that has non-negative values at the endpoints  $a$  und  $b$ . We need to prove that  $x(t) \geq 0$  inside  $[a, b]$  as well. Indeed, assume that  $x(c) < 0$  at some point  $c \in (a, b)$ . Then, by the intermediate value theorem,  $x(t)$  has zeros on each interval  $[a, c]$  und  $(c, b]$ . However, since  $L$  has a positive supersolution on  $[a, b]$ ,  $x(t)$  cannot have two zeros on  $[a, b]$  by the previous corollary. ■

Consider the following *boundary value problem* (BVP) für the operator (5.20):

$$\begin{cases} Lx = f(t) \\ x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta \end{cases}$$

where  $f(t)$  is a given Funktion on  $I$ ,  $a, b$  are two given distinct points in  $I$  und  $\alpha, \beta$  are given reals. It follows from the comparison principle that if  $L$  has a positive supersolution on  $[a, b]$  then solution to the BVP is unique. Indeed, if  $x_1$  und  $x_2$  are two solutions then the comparison principle yields  $x_1 \leq x_2$  und  $x_2 \leq x_1$  whence  $x_1 \equiv x_2$ .

The hypothesis that  $L$  has a positive supersolution is essential since in general there is no uniqueness: the BVP  $x'' + x = 0$  with  $x(0) = x(\pi) = 0$  has a whole family of solutions  $x(t) = C \sin t$  für any real  $C$ .

Let us return to the study of the cases with “many” zeros.

**Satz 5.7** Consider ODE  $x'' + q(t)x = 0$  where  $q(t) \geq a > 0$  on  $[t_0, +\infty)$ . Then zeros of any non-zero solution  $x(t)$  on  $[t_0, +\infty)$  form a sequence  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  that can be numbered so that  $t_{k+1} > t_k$ , und  $t_k \rightarrow +\infty$ . Furthermore, if

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = b$$

then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (t_{k+1} - t_k) = \frac{\pi}{\sqrt{b}}. \quad (5.21)$$

**Beweis.** By Lemma 5.1, the number of zeros of  $x(t)$  on any bounded interval  $[t_0, T]$  is finite, which implies that the set of zeros in  $[t_0, +\infty)$  is at most countable und that all zeros can be numbered in the increasing order.

Consider the ODE  $y'' + ay = 0$  that has solution  $y(t) = \sin \sqrt{a}t$ . By Satz 5.2,  $x(t)$  has a zero between any two zeros of  $y(t)$ , that is, in any interval  $\left[\frac{\pi k}{\sqrt{a}}, \frac{\pi(k+1)}{\sqrt{a}}\right] \subset [t_0, +\infty)$ . This implies that  $x(t)$  has in  $[t_0, +\infty)$  infinitely many zeros. Hence, the set of zeros of  $x(t)$  is countable und forms an increasing sequence  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ . The fact that any bounded interval contains finitely many terms of this sequence implies that  $t_k \rightarrow +\infty$ .

To prove the second claim, fix some  $T > t_0$  und set

$$m = m(T) = \inf_{t \in [T, +\infty)} q(t).$$

Consider the ODE  $y'' + my = 0$ . Since  $m \leq q(t)$  in  $[T, +\infty)$ , between any two zeros of  $y(t)$  in  $[T, +\infty)$  there is a zero of  $x(t)$ . Consider a zero  $t_k$  of  $x(t)$  that is contained in  $[T, +\infty)$  und prove that

$$t_{k+1} - t_k \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}. \quad (5.22)$$

Assume from the contrary that that  $t_{k+1} - t_k > \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ . Consider a solution

$$y(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{\sqrt{m}} + \varphi\right),$$

whose zeros form an arithmetic sequence  $\{s_j\}$  with difference  $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ , that is, für alle  $j$ ,

$$s_{j+1} - s_j = \frac{\pi}{\sqrt{m}} < t_{k+1} - t_k.$$

Choosing the phase  $\varphi$  appropriately, we can achieve so that, für some  $j$ ,

$$[s_j, s_{j+1}] \subset (t_k, t_{k+1}).$$

However, this means that between zeros  $s_j, s_{j+1}$  of  $y$  there is no zero of  $x$ . This contradiction proves (5.22).

If  $b = +\infty$  then by letting  $T \rightarrow \infty$  we obtain  $m \rightarrow \infty$  und, hence,  $t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ , which proves (5.21) in this case.

Consider the case when  $b$  is finite. Then setting

$$M = M(T) = \sup_{t \in [T, +\infty)} q(t),$$

we obtain in the same way that

$$t_{k+1} - t_k \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}.$$

When  $T \rightarrow \infty$ , both  $m(T)$  und  $M(T)$  tend to  $b$ , which implies that

$$t_{k+1} - t_k \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{b}}.$$

■

## 5.6 \* Besselsche Gleichung

The *Bessel equation* is the ODE

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \alpha^2)x = 0 \tag{5.23}$$

where  $t > 0$  is an independent variable,  $x = x(t)$  is the unknown Funktion,  $\alpha \in \mathbb{R}$  is a given parameter<sup>15</sup>. The *Bessel Funktionen*<sup>16</sup> are certain particular solutions of this equation. The value of  $\alpha$  is called the order of the Bessel equation.

<sup>15</sup>In general, one can let  $\alpha$  to be a complex number as well but here we restrict ourselves to the real case.

<sup>16</sup>The Bessel function of the first kind is defined by

$$J_\alpha(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m + \alpha}.$$

It is possible to prove that  $J_\alpha(t)$  solves (5.23). If  $\alpha$  is non-integer then  $J_\alpha$  and  $J_{-\alpha}$  are linearly independent solutions to (5.23). If  $\alpha = n$  is an integer then the independent solutions are  $J_n$  and  $Y_n$  where

$$Y_n(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{J_\alpha(t) \cos \alpha\pi - J_{-\alpha}(t)}{\sin \alpha\pi}$$

is the Bessel function of the second kind.

**Satz 5.8** *Let  $x(t)$  be a non-zero solution to the Bessel equation on  $(0, +\infty)$ . Then the zeros of  $x(t)$  form an infinite sequence  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  such that  $t_k < t_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $t_{k+1} - t_k \rightarrow \pi$  as  $k \rightarrow \infty$ .*

**Beweis.** Write the Bessel equation in the form

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right)x = 0, \quad (5.24)$$

set  $p(t) = \frac{1}{t}$  und  $q(t) = \left(1 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right)$ . Then the change

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int p(t) dt\right) \\ &= x(t) \exp\left(\frac{1}{2} \ln t\right) = x(t) \sqrt{t} \end{aligned}$$

brings the ODE to the form

$$u'' + Q(t)u = 0$$

where

$$Q(t) = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{t^2} + \frac{1}{4t^2}. \quad (5.25)$$

Note the roots of  $x(t)$  are the same as those of  $u(t)$ . Observe also that  $Q(t) \rightarrow 1$  as  $t \rightarrow \infty$  und, in particular,  $Q(t) \geq \frac{1}{2}$  für  $t \geq T$  für large enough  $T$ . Satz 5.7 yields that the roots of  $x(t)$  in  $[T, +\infty)$  form an increasing sequence  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$  such that  $t_{k+1} - t_k \rightarrow \pi$  as  $k \rightarrow \infty$ .

Now we need to prove that the number of zeros of  $x(t)$  in  $(0, T]$  is finite. Lemma 5.1 says that the number of zeros is finite in any interval  $[\tau, T]$  where  $\tau > 0$ , but cannot be applied to the interval  $(0, T]$  because the ODE in question is not defined at 0. Let us show that, für small enough  $\tau > 0$ , the interval  $(0, \tau)$  contains no zeros of  $x(t)$ . Consider the following Funktion on  $(0, \tau)$

$$z(t) = \ln \frac{1}{t} - \sin t$$

which is positive in  $(0, \tau)$  provided  $\tau$  is small enough (clearly,  $z(t) \rightarrow +\infty$  as  $t \rightarrow 0$ ). For this Funktion we have

$$z' = -\frac{1}{t} - \cos t \quad \text{und} \quad z'' = \frac{1}{t^2} + \sin t$$

whence

$$z'' + \frac{1}{t}z' + z = \ln \frac{1}{t} - \frac{\cos t}{t}.$$

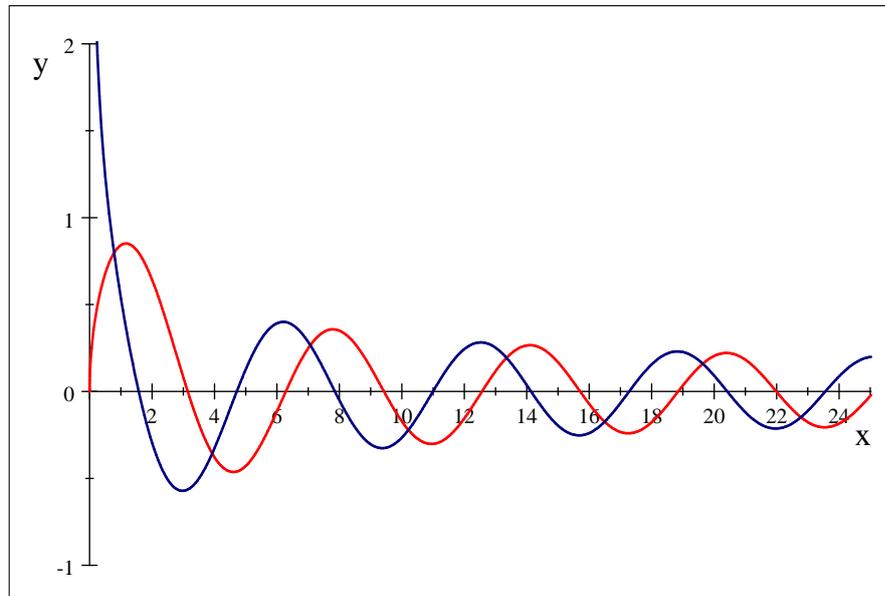
Since  $\frac{\cos t}{t} \sim \frac{1}{t}$  und  $\ln \frac{1}{t} = o\left(\frac{1}{t}\right)$  as  $t \rightarrow 0$ , we see that the right hand side here is negative in  $(0, \tau)$  provided  $\tau$  is small enough. It follows that

$$z'' + \frac{1}{t}z' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{t^2}\right)z < 0, \quad (5.26)$$

so that  $z(t)$  is a positive supersolution of the Bessel equation in  $(0, \tau)$ . By Corollary of Satz 5.2,  $x(t)$  has at most one zero in  $(0, \tau)$ . By further reducing  $\tau$ , we obtain that  $x(t)$  has no zeros on  $(0, \tau)$ , which finishes the proof. ■

**Beispiel.** In the case  $\alpha = \frac{1}{2}$  we obtain from (5.25)  $Q(t) \equiv 1$  und the ODE für  $u(t)$  becomes  $u'' + u = 0$ . Using the solutions  $u(t) = \cos t$  und  $u(t) = \sin t$  und the relation  $x(t) = t^{-1/2}u(t)$ , we obtain the independent solutions of the Bessel equation:  $x(t) = t^{-1/2} \sin t$  und  $x(t) = t^{-1/2} \cos t$ . Clearly, in this case we have exactly  $t_{k+1} - t_k = \pi$ .

The Funktionen  $t^{-1/2} \sin t$  und  $t^{-1/2} \cos t$  show the typical behavior of solutions to the Bessel equation: oscillations with decaying amplitude as  $t \rightarrow \infty$ :



**Bemerkung.** In (5.26) we have used that  $\alpha^2 \geq 0$  which is the case für real  $\alpha$ . For imaginary  $\alpha$  one may have  $\alpha^2 < 0$  und the above argument does not work. In this case a solution to the Bessel equation can actually have a sequence of zeros accumulating at 0.

## 5.7 \* Orthogonalität

Bemerkten wir, dass die DGL

$$x'' + px' + qx + \lambda wx = 0 \quad (5.27)$$

sich wie folgt umschreiben lässt:

$$(Px')' + Qx + \lambda Wx = 0. \quad (5.28)$$

In der Tat, Vergleichen von (5.27) und (5.28) ergibt die folgenden Gleichungen

$$p = \frac{P'}{P}, \quad q = \frac{Q}{P} \quad \text{und} \quad w = \frac{W}{p},$$

woraus folgt

$$P(t) = \exp\left(\int p(t) dt\right), \quad Q = Pq, \quad W = wp.$$

Sind  $p, q, w$  stetig, so ist  $P$  stetig differenzierbar und  $Q, W$  stetig. Die Funktion  $P$  ist immer echt positive. Ist  $w$  positive so ist  $W$  auch positive. In den nächsten Satz benutzen wir die Form (5.28)

**Satz 5.9** Consider the Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} (px')' + qx + \lambda wx = 0 \\ x(a) = x(b) = 0, \end{cases} \quad (5.29)$$

where  $q, w \in C[a, b]$ ,  $p \in C^1[a, b]$  and  $p, w > 0$ .

(a) If  $\lambda$  is the eigenvalue of (5.29) with the eigenfunction  $x(t)$  then

$$\lambda = \frac{\int_a^b (p(x')^2 - qx^2) dt}{\int_a^b wx^2 dt}. \quad (5.30)$$

(b) (The orthogonality relations) If  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  are the eigenfunctions of (5.29) with the distinct eigenvalues then

$$\int_a^b x_1(t) x_2(t) w(t) dt = 0. \quad (5.31)$$

**Bemerkung.** Given a continuous positive Funktion  $w$  on  $[a, b]$ , the expression

$$(f, g) := \int_a^b f(t) g(t) w(t) dt$$

can be interpreted as an *inner product* in the linear space  $C[a, b]$ . Indeed, the functional  $f, g \mapsto (f, g)$  is obviously symmetric, bilinear und positive definite, that is,  $(f, f) \geq 0$  und  $(f, f) = 0$  if und only if  $f = 0$ . Hence,  $(f, g)$  satisfies the definition of an inner product. Using the inner product, one can introduce the 2-norm of a Funktion  $f \in C[a, b]$  by

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Two functions  $f$  und  $g$  are called orthogonal if  $(f, g) = 0$ .

Hence, part (b) of Satz 5.9 means that the eigenfunctions of different eigenvalues are orthogonal with respect to the chosen inner product<sup>17</sup>.

**Proof of Theorem 5.9.** Let  $\lambda_i$  be the eigenvalue of the eigenfunction  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Multiplying the ODE

$$(px_1')' + qx_1 + \lambda_1 wx_1 = 0$$

<sup>17</sup>This is similar to the fact that the eigenvectors with different eigenvalues of any real symmetric  $n \times n$  matrix  $A$  are automatically orthogonal with respect to the canonical inner product in  $\mathbb{R}^n$ . Indeed, if  $x_1$  und  $x_2$  are the eigenvectors with the eigenvalues  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  then  $Ax_1 = \lambda_1 x_1$  implies  $(Ax_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)$  und  $Ax_2 = \lambda_2 x_2$  implies  $(x_1, Ax_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$ . By the symmetry of  $A$ , we have  $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$  whence  $\lambda_1 (x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$  und  $(x_1, x_2) = 0$ .

Part (a) of Theorem 5.9 is analogous to the identity  $\lambda = \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}$  for an eigenvector  $x$  with the eigenvalue  $\lambda$ , which trivially follows from  $Ax = \lambda x$  by taking the inner product with  $x$ .

by  $x_2$  und integrating over  $[a, b]$ , we obtain

$$\int_a^b (px_1')' x_2 dt + \int_a^b qx_1 x_2 dt + \lambda_1 \int_a^b wx_1 x_2 dt = 0.$$

Integrating by parts in the first integral, we obtain that it is equal to

$$[p_1 x_1' x_2]_a^b - \int_a^b p x_1' x_2' dt.$$

By the boundary condition  $x_2(a) = x_2(b) = 0$ , we see that the first term vanishes, und we obtain the identity

$$\int_a^b p x_1' x_2' = \int_a^b qx_1 x_2 dt + \lambda_1 \int_a^b wx_1 x_2 dt. \quad (5.32)$$

(a) If  $x_1 = x_2 = x$  und  $\lambda_1 = \lambda$  then (5.32) implies

$$\int_a^b p (x')^2 dt = \int_a^b qx^2 dt + \lambda \int_a^b wx^2 dt$$

whence (5.30) follows.

(b) Switching the indices 1 und 2 in (5.32) und noticing that all das Integrals are symmetric with respect to the indices 1 und 2, we obtain

$$\int_a^b p x_1' x_2' = \int_a^b qx_1 x_2 dt + \lambda_2 \int_a^b wx_1 x_2 dt. \quad (5.33)$$

Since  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , the two identities (5.32) und (5.33) can be simultaneously satisfied only if

$$\int_a^b wx_1 x_2 dt = 0$$

which was to be proved. ■

**Beispiel.** Recall that the Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$$

has the eigenfunctions  $\sin kt$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Hence, the orthogonality relation (5.31) becomes

$$\int_0^\pi \sin k_1 t \sin k_2 t dt = 0 \text{ für alle } k_1 \neq k_2,$$

which is, of course, obvious without Satz 5.9. A version of this relation on the interval  $[-\pi, \pi]$  is used in the theory of Fourier series.

Let us briefly discuss some interesting examples. It follows from the proof of Satz 5.9(b) that the orthogonality relation remains true in a more general situation when the given ODE is defined in an *open* interval  $(a, b)$  und the following conditions are satisfied:

(i) das Integral  $\int_a^b x_1 x_2 w dt$  converges as improper;

(ii)  $[px'_1 x_2]_a^b = [px_1 x'_2]_a^b = 0$  where the values at  $a$  und  $b$  are understood in the sense of limit.

**Beispiel.** *The Legendre polynomials* are the eigenfunctions of the following problem on  $(-1, 1)$ :

$$\begin{cases} (1-t^2)x'' - 2tx' + \lambda x = 0 \\ x(\pm 1) \text{ finite.} \end{cases}$$

The ODE can be written in the Sturm-Liouville form as

$$((1-t^2)x')' + \lambda x = 0.$$

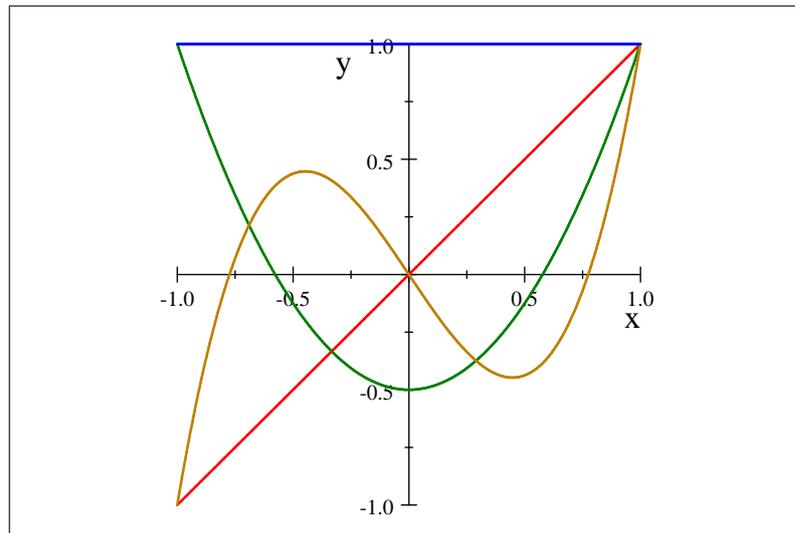
The eigenvalues are  $\lambda_n = n(n+1)$ , where  $n$  is non-negative integer. The eigenfunction of  $\lambda_n$  is

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n]$$

which is obviously a polynomial of degree  $n$  (the coefficient  $\frac{1}{2^n n!}$  is chosen für normalization purposes). Since  $p(t) = 1 - t^2$  vanishes at  $\pm 1$ , the above conditions (i) und (ii) are satisfied, und we obtain that the sequence  $\{P_n\}$  is orthogonal in  $[-1, 1]$  with the weight Funktion  $w = 1$ .

Here are the first few Legendre polynomial und their graphs:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad \dots$$



**Beispiel.** *The Chebyshev polynomials* are the eigenfunctions of the following problem on  $(-1, 1)$ :

$$\begin{cases} (1-t^2)x'' - tx' + \lambda x = 0 \\ x(\pm 1) \text{ finite.} \end{cases}$$

The ODE can be rewritten in the Sturm-Liouville form

$$\left(\sqrt{1-t^2}x'\right)' + \frac{\lambda x}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

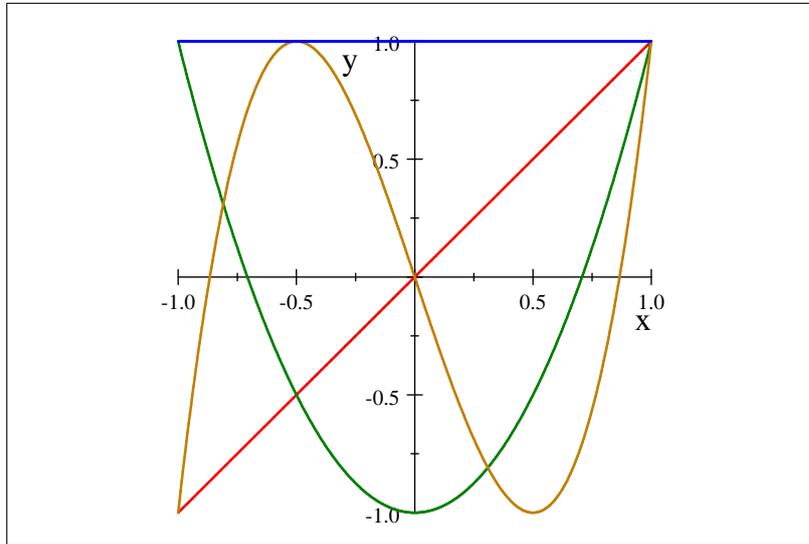
so that  $p = \sqrt{1-t^2}$  and  $w = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ . The eigenvalues are  $\lambda = n^2$  where  $n$  is a non-negative integer, and the eigenfunction of  $\lambda_n$  is

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t),$$

which is a polynomial of the degree  $n$ . Since  $p(\pm 1) = 0$  and  $\int_{-1}^1 w(t) dt < \infty$ , the conditions (i) and (ii) are satisfied so that  $\{T_n\}$  are orthogonal with the weight  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ .

Here are the first few Chebyshev polynomials und their graphs:

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_2(t) = 2t^2 - 1, \quad T_3(t) = 4t^3 - 3t, \quad \dots$$



**Beispiel.** The Hermite polynomials are the eigenfunctions of the problem on  $(-\infty, +\infty)$

$$\begin{cases} x'' - tx' + \lambda x = 0 \\ x(t) = o(t^N) \text{ as } t \rightarrow \pm\infty. \end{cases}$$

The ODE can be rewritten in the Sturm-Liouville form

$$\left(x'e^{-t^2/2}\right)' + \lambda e^{-t^2/2}x = 0,$$

so that  $p = w = e^{-t^2/2}$ . The eigenvalues are  $\lambda_n = n$ ,  $n$  is a non-negative integer, und the eigenfunction of  $\lambda_n$  is

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2/2},$$

which is a polynomial of degree  $n$ . Since  $p(t)$  decays fast enough as  $t \rightarrow \infty$ , the conditions (i) und (ii) are satisfied und we obtain that  $\{H_n\}$  is orthogonal on  $(-\infty, +\infty)$  with the weight  $e^{-t^2/2}$ . Here are the first few Hermite polynomials:  $H_0(t) = 1$ ,  $H_1(t) = t$ ,  $H_2(t) = t^2 - 1$ ,  $H_3(t) = t^3 - 6t$  (see the diagram below für their graphs).

