

# 1 Einführung

## 1.1 Was ist eine DGL

Eine gewöhnliche Differentialgleichung (abgekürzt mit *DGL*) hat die Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

wobei  $x$  eine unabhängige reelle Variable ist,  $y = y(x)$  eine gesuchte Funktion (und  $y^{(k)}$  die  $k$ -te Ableitung von  $y$ ), und  $F$  eine gegebene Funktion von  $n + 2$  Variablen. Die Zahl  $n$ , die die maximale Ordnung der Ableitung  $y^{(k)}$  in (1.1) ist, heißt die *Ordnung* von der DGL. Man sagt auch, dass (1.1) eine DGL  $n$ -ter Ordnung ist.

Die Gleichung (1.1) heißt "*differential*", weil sie die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält. Eigentlich stellt die Gleichung (1.1) eine Beziehung zwischen verschiedenen Ableitungen von  $y(x)$  dar. Die Differentialgleichung (1.1) heißt "*gewöhnlich*", weil die Ableitungen  $y^{(k)}$  gewöhnlich sind, im Gegensatz zu partiellen Ableitungen. Es gibt auch die partiellen Differentialgleichungen, wo die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und deshalb die partiellen Ableitungen benutzt werden müssen, aber in diesem Kurs betrachten wir nur gewöhnliche DGLen.

Gewöhnliche DGLen entstehen in verschiedenen Gebieten von Mathematik, als auch in Wissenschaften und Technik, da viele Naturgesetze mittels Differentialgleichungen formuliert werden können. In meisten Anwendungen braucht man eine Lösung  $y(x)$  von (1.1) (mit gegebenen Randbedingungen) analytisch oder numerisch zu bestimmen. Allerdings gibt es nur wenige Typen von DGLen, die sich explizit analytisch lösen lassen. Für ziemlich generellen Typen von DGLen kann man verschiedene Eigenschaften von Lösungen beweisen ohne sie explizit zu berechnen, z.B. die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, Differenzierbarkeit, usw. In diesem Kurs werden wir am meistens mit diesen Eigenschaften beschäftigt sein.

Am Anfang besprechen wir verschiedene Beispiele von DGLen 1er und 2er Ordnung, die sich explizit lösen lassen.

## 1.2 DGLen erster Ordnung

Eine allgemeine DGL 1er Ordnung hat die Form  $F(x, y, y') = 0$ . Häufig kann diese Gleichung bezüglich  $y'$  gelöst werden, und man erhält die DGL in der *expliziten* Form:

$$y' = f(x, y), \quad (1.2)$$

wobei  $y = y(x)$  eine gesuchte reelle Funktion einer reellen Variablen  $x$ , und  $f(x, y)$  eine gegebene Funktion von zwei reellen Variablen. Wir betrachten das Paar  $(x, y)$  als ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$ . Der Definitionsbereich von  $f$  ist dann eine Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^2$ . Die Menge  $D$  heißt auch der Definitionsbereich von DGL (1.2).

**Definition.** Sei  $y(x)$  eine reelle Funktion, die auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert ist. Die Funktion  $y(x)$  heißt eine (*spezielle*) Lösung von (1.2) genau dann, wenn

1.  $y(x)$  an jeder Stelle  $x \in I$  differenzierbar ist;

2. für jedes  $x \in I$ , der Punkt  $(x, y(x))$  ein Element von  $D$  ist;
3. für jedes  $x \in I$ , die Gleichung  $y'(x) = f(x, y(x))$  erfüllt ist.

Die Gesamtheit von allen speziellen Lösungen von (1.2) heißt die *allgemeine* Lösung.

**Bemerkung.** Hier und im Folgenden ein Intervall bedeutet jede Menge der Form

$$\begin{aligned}
 (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall} \\
 [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{geschlossenes Intervall} \\
 [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{halboffenes Intervall} \\
 (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{halboffenes Intervall}
 \end{aligned}$$

wobei  $a, b$  reelle oder  $\pm\infty$  sind und  $a < b$ .

Die Lösungen von (1.2) lassen sich eine graphische Darstellung wie folgt. Der Graph einer speziellen Lösung heißt eine *Integralkurve* der Gleichung. Offensichtlich ist jede Integral-Kurve im Definitionsbereich enthalten. Dass die Lösung  $y(x)$  die Gleichung  $y' = f(x, y)$  erfüllt bedeutet, dass die Tangente zur Integralkurve an jeder Stelle  $(x, y)$  die Steigung  $f(x, y)$  hat. Offensichtlich, man kann die Steigung an jeder Stelle  $(x, y) \in D$  bestimmen ohne die DGL zu lösen. Jeder Stelle  $(x, y) \in D$  entspricht eine *Richtung*: eine Gerade durch  $(x, y)$  mit der Steigung  $f(x, y)$ . Die Gesamtheit von allen Richtungen heißt das *Richtungsfeld* der DGL. Es ist klar, dass die Tangente zu jeder Integralkurve an jeder Stelle ein Element des Richtungsfeldes ist. Lösen von (1.2) hat die folgende graphische Bedeutung: man verbindet die Elemente des Richtungsfeldes durch eine Integralkurve (Fig. 1).

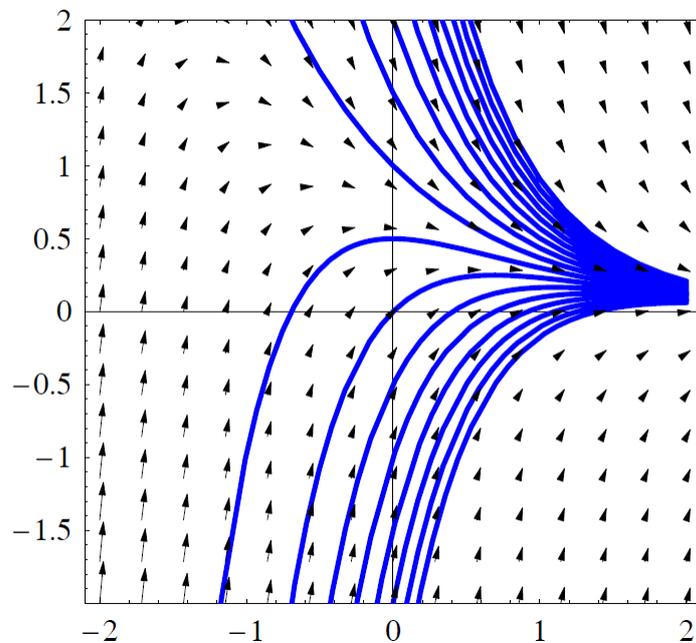


Figure 1: Integralkurven eines Richtungsfeldes

In der Regel lassen sich die allgemeinen DGLen nicht explizit analytisch lösen. Wir zeigen hier einige Klassen von Funktionen  $f(x, y)$ , bei denen die allgemeine Lösung von (1.2) in Form einer unbestimmten Integration gefunden werden kann.

**Beispiel.** Angenommen, die Funktion  $f$  hängt nicht von  $y$ , so dass (1.2) wird  $y' = f(x)$ . Offensichtlich muss  $y$  eine Stammfunktion von  $f$  sein. Unter der Voraussetzung, dass  $f$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $I$  ist, erhalten wir die allgemeine Lösung auf  $I$  durch die unbestimmte Integration:

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C,$$

wobei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  auf  $I$  ist und  $C$  eine beliebige Konstante ist.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y' = y$$

und ermitteln erst alle positive Lösungen. Angenommen  $y(x) > 0$  auf einem Intervall  $I$ , können wir mit  $y$  dividieren. Da

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)',$$

erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$(\ln y)' = 1.$$

Daraus folgt, dass

$$\ln y = \int dx = x + C,$$

also

$$y = e^C e^x = C_1 e^x,$$

wobei  $C_1 = e^C$ . Da  $C \in \mathbb{R}$  beliebig reell ist, ist  $C_1 = e^C$  beliebig positive. Daher sind alle positiven Lösungen  $y(x)$  auf  $I$  wie folgt:

$$y = C_1 e^x, \quad C_1 > 0.$$

Angenommen,  $y(x) < 0$  für alle  $x \in I$ , erhalten wir ebenso

$$\frac{y'}{y} = (\ln(-y))'$$

und

$$y = -C_1 e^x,$$

wobei  $C_1 > 0$ . So, jede Lösung  $y(x)$ , die immer entweder positive oder negative auf  $I$  bleibt, hat die Form

$$y(x) = C e^x,$$

wobei  $C > 0$  oder  $C < 0$ . Es ist klar, dass  $C = 0$  auch eine Lösung  $y \equiv 0$  ergibt. Die Integralkurven der Lösungen  $y = C e^x$  sind auf Fig. 2 gezeichnet worden. Jedoch bleibt die Frage, ob alle Lösungen bestimmt worden sind.

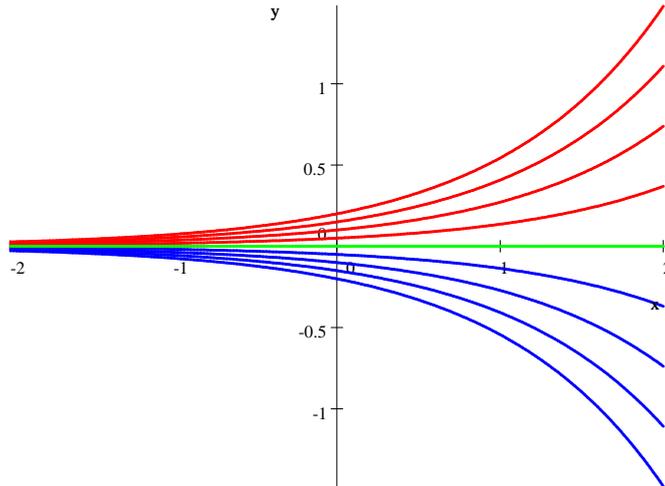


Figure 2: Die Integralkurven von  $y' = y$

**Behauptung.** Die Gesamtheit von Lösungen  $y = Ce^x$ , wobei  $C \in \mathbb{R}$ , ist die allgemeine Lösung von  $y' = y$ .

**Beweis.** Sei  $y(x)$  eine Lösung auf einem offenen Intervall  $I$ . Wir müssen zeigen, dass auf diesem Intervall gilt  $y = Ce^x$  für eine Konstante  $C$ . Ist  $y \equiv 0$  auf  $I$ , alles ist trivial. Angenommen,  $y(x) > 0$  mindestens an einer Stelle  $x \in I$ , bezeichnen wir mit  $(a, b)$  ein maximales offenes Intervall, wo  $y(x) > 0$ . Dann entweder einer von den Punkten  $a, b$  gehört zu  $I$  oder  $(a, b) = I$ . In dem ersten Fall, nehmen wir an, dass  $a \in I$  (der Fall  $b \in I$  ist ähnlich), was ergibt  $y(a) = 0$ . Da  $y(x)$  auf dem Intervall  $(a, b)$  positive ist, wie wissen schon, dass auf diesem Intervall  $y(x) = Ce^x$  gilt mit  $C > 0$ . Da  $e^x \neq 0$ , verschwindet die Lösung  $y(x)$  an der Stelle  $x = a$  nicht, was im Widerspruch zur obigen Bemerkung ist. Wir beschliessen, dass  $(a, b) = I$ , woraus folgt, dass  $y(x) = Ce^x$  auf  $I$ .

Mit dem gleichen Argument betrachtet man den Fall wenn  $y(x) < 0$  an einer Stelle  $x \in I$ . ■

### 1.3 Trennbare DGLen

Eine *trennbare* DGL ist eine DGL in der Form

$$y' = f(x)g(y), \quad (1.3)$$

wobei  $f$  und  $g$  stetige Funktionen sind, auf offenen Intervallen  $I$  and  $J$  jeweils. Damit ist der Definitionsbereich von (1.3)  $I \times J$ .

Jede trennbare DGL kann mit Hilfe von dem folgenden Satz gelöst werden.

**Satz 1.1** (Trennung der Variablen) Angenommen,  $g(y) \neq 0$  auf  $J$ . Sei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  auf  $I$  und  $G(y)$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g(y)}$  auf  $J$ . Eine Funktion  $y : I' \rightarrow J$ , wobei  $I'$  ein Teilintervall von  $I$  ist, löst (1.3) genau dann, wenn

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad (1.4)$$

für alle  $x \in I'$ , wobei  $C$  eine beliebige Konstante ist.

Z.B., betrachten wir noch mal die DGL  $y' = y$  im Bereich  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ . Dann  $f(x) = 1$  and  $g(y) = y \neq 0$  so dass Satz 1.1 ist anwendbar. Wir haben

$$F(x) = \int f(x) dx = \int dx = x$$

und

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dy}{y} = \ln y$$

(wir schreiben hier keine Integrationskonstante  $C$ , weil wir nur eine Stammfunktion brauchen). Die Identität (1.4) wird

$$\ln y = x + C,$$

woraus  $y = C_1 e^x$  folgt wie zuvor.

**Beweis.** Sei  $y(x)$  eine Lösung von (1.3). Da  $g(y) \neq 0$ , wir können (1.3) mit  $g(y)$  dividieren und erhalten

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x). \quad (1.5)$$

Da  $f(x) = F'(x)$  und  $\frac{1}{g(y)} = G'(y)$ , wir erhalten durch die Kettenregel, dass

$$\frac{y'}{g(y)} = G'(y) y' = (G(y(x)))'.$$

Daher ist die DGL (1.3) äquivalent zu

$$G(y(x))' = F'(x), \quad (1.6)$$

woraus (1.4) folgt durch Integration.

Umgekehrt, erfüllt die Funktion  $y$  (1.4) und ist außerdem differenzierbar auf  $I'$ , können wir die Identität (1.4) ableiten und deshalb (1.6) erhalten, woraus (1.3) auch folgt. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $y(x)$  differenzierbar ist. Da die Funktion  $g(y)$  verschwindet nicht, ist  $g(y)$  entweder positive oder negative auf ganzem Intervall  $J$ . Dann die Stammfunktion  $G(y)$  von  $\frac{1}{g(y)}$  ist entweder strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend auf  $J$ . In den beiden Fällen, ist die Umkehrfunktion  $G^{-1}$  definiert und differenzierbar. Insbesondere kann man die Gleichung (1.4) umkehren und damit erhalten, dass

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C). \quad (1.7)$$

Daraus folgt, dass  $y(x)$  differenzierbar ist als Verkettung von zwei differenzierbaren Funktionen. ■

**Korollar 1.2** *Unter den Bedingungen von Satz 1.1, für jedes  $x_0 \in I$  und  $y_0 \in J$ , existiert eindeutiger Wert von der Konstante  $C$ , derart, dass die Lösung (1.7) von (1.3) die Bedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt.*

Die Bedingung  $y(x_0) = y_0$  heißt die *Anfangsbedingung*. Dieser Begriff ist mit dem Begriff von *Anfangswertproblem* verbunden. Letzteres ist eine Aufgabe die Funktion  $y(x)$  zu bestimmen, die die folgenden Bedingungen erfüllt

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

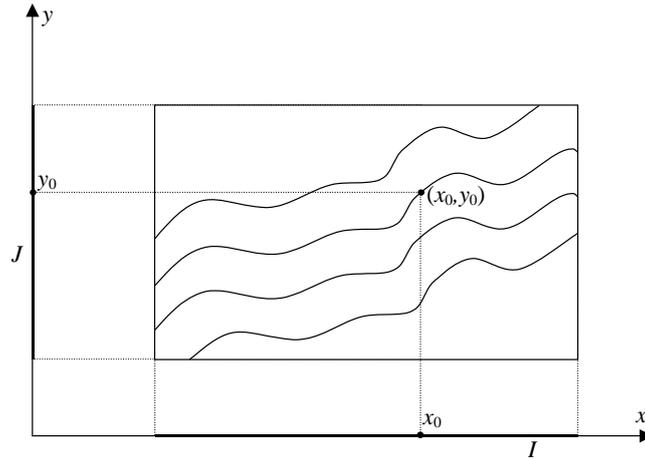


Figure 3: Jeder Punkt  $(x_0, y_0)$  hat genau eine Integalkurve, die durch  $(x_0, y_0)$  geht.

wobei  $(x_0, y_0)$  ein gegebener Punkt im Definitionsbereich  $D$  von  $f(x, y)$  ist. Das Korollar 1.2 bedeutet, dass das Anfangswertproblem für die trennbare DGL (1.4) unter der Bedingung  $g \neq 0$  eindeutige Lösung für alle  $(x_0, y_0) \in I \times J$  hat. D.h., für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  existiert genau eine Integalkurve der DGL, die durch diesen Punkt geht (Fig. 3). Wie wir es später sehen, das gilt auch für bestimmte allgemeinere DGLen, aber nicht für alle DGLen.

**Beweis.** An den Stellen  $x = x_0$  and  $y = y_0$ , ergibt (1.4)  $C = G(y_0) - F(x_0)$ , woraus die Eindeutigkeit von  $C$  folgt. Jetzt zeigen wir, dass dieser Wert von  $C$  immer eine Lösung  $y(x)$  liefert. Wir müssen nur noch überprüfen, dass die Funktion  $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$  auf einem offenen Intervall um  $x_0$  definiert ist (a priori es konnte sein, dass der Definitionsbereich der Verkettung von zwei Funktionen leer ist). Für  $x = x_0$  erhalten wir

$$G^{-1}(F(x_0) + C) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0,$$

so dass die Funktion  $y(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  definiert ist. Da die beiden Funktionen  $G^{-1}$  and  $F + C$  stetig sind und auf offenen Intervallen definiert, ist ihre Verkettung auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}$  definiert. Da diese Teilmenge  $x_0$  enthält, muss sie auch ein Intervall um  $x_0$  enthalten, was zu beweisen war. ■

In Anwendungen von dem Satz 1.1 muss man die Funktionen  $F$  und  $G$  bestimmen. Es ist bequem die Auswertung von  $F$  und  $G$  mit anderen Berechnungen zu kombinieren, wie folgt. Der erste Schritt ist immer dividieren (1.3) mit  $g$  um (1.5) zu erhalten. Danach integriert man die beiden Seiten bezüglich  $x$  und erhält

$$\int \frac{y' dx}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (1.8)$$

Der nächste Schritt ist die Integrals auszuwerten. Man findet eine Stammfunktion  $F(x)$  von  $f$  so dass

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.9)$$

Auf der linken Seite von (1.8) macht man die Substitution  $y = y(x)$  (die Funktion  $y(x)$  wird durch eine unabhängige Variable  $y$  ersetzt). Da  $y' dx = dy$ , erhalten wir die Identität

$$\int \frac{y' dx}{g(y)} = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + C,$$

die zusammen mit (1.3) und (1.9) ergibt (1.4).

Die Funktion  $g(y)$  in der DGL (1.3) kann generell die Nullstellen haben. Ist  $s$  eine Nullstelle von  $g$ , löst die konstante Funktion  $y(x) \equiv s$  die DGL (1.3). Für allgemeine Funktion  $g$  gilt folgendes.

**Korollar 1.3** Sei  $f$  und  $g$  beliebige stetige Funktionen wie im Satz 1.1, aber ohne die Voraussetzung  $g \neq 0$ . Dann für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times J$  existiert eine Lösung von (1.3), die durch  $(x_0, y_0)$  geht (also, das Anfangswertproblem ist immer lösbar).

**Beweis.** Ist  $y_0$  eine Nullstelle von  $g$ , die gewünschte Lösung ist  $y(x) \equiv y_0$ . Ist  $y_0$  keine Nullstelle von  $g$ , betrachten wir ein offenes Intervall  $J_0 \subset J$  das  $y_0$  enthält aber keine Nullstelle von  $g$  enthält. Dann erhalten wir die gewünschte Lösung, indem wir das Anfangswertproblem im Bereich  $I \times J_0$  mit Hilfe von Korollar 1.2 lösen. ■

Im Gegenteil, gilt die Eindeutigkeit im Anfangswertproblem nicht immer, wie wir in weiteren Beispielen sehen.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$y' - xy^2 = 2xy, \quad (1.10)$$

im Bereich  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Umschreiben sie in der Form

$$y' = x(y^2 + 2y)$$

und bemerken, dass die DGL trennbar ist. Die Funktion  $g(y) = y^2 + 2y$  hat zwei Nullstellen  $y = 0$  and  $y = -2$ . Daher erhalten wir zwei konstanten Lösungen  $y \equiv 0$  and  $y \equiv -2$ . Betrachten jetzt die DGL in den Bereichen wo  $g(y) \neq 0$ :

$$\mathbb{R} \times (-\infty, -2), \quad \mathbb{R} \times (-2, 0), \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty). \quad (1.11)$$

In jedem von diesen Bereichen benutzen wir Trennung der Variablen und erhalten

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{y+2} \right| = \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Potenzieren ergibt dann

$$\frac{y}{y+2} = C_1 e^{x^2},$$

wobei  $C_1 = \pm e^{2C}$ . Es ist klar, dass  $C_1$  alle reellen Werte annehmen kann, außer 0. Da  $y \equiv 0$  auch eine Lösung ist, kann  $C_1$  auch 0 sein.. Umbenennen wir  $C_1$  in  $C$  so dass

$$\frac{y}{y+2} = C e^{x^2},$$

wobei  $C$  alle reellen Werte annimmt. Daher erhalten wir die folgenden Lösungen:

$$y = \frac{2C e^{x^2}}{1 - C e^{x^2}} \quad \text{und} \quad y \equiv -2. \quad (1.12)$$

Die Integralkurven von (1.12) sind auf Fig. 4 gezeichnet worden.

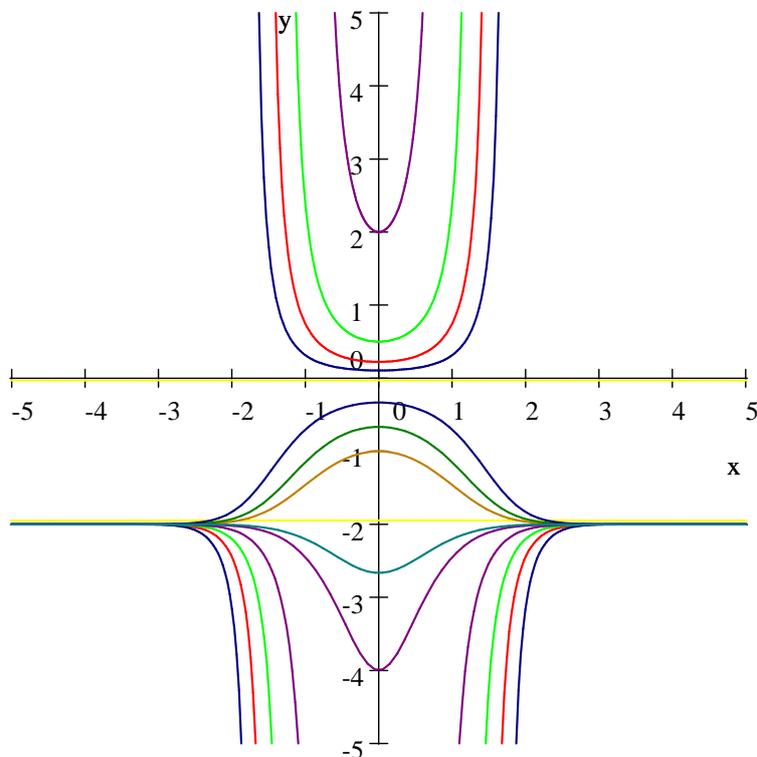


Figure 4: Die Integralkurven von (1.12)

Wir behaupten, dass die Integralkurven von Lösungen (1.12) nie schneiden einander. In der Tat nimmt jede Lösung

$$y = \frac{2C e^{x^2}}{1 - C e^{x^2}}, \quad C \neq 0, \quad (1.13)$$

die Werte 0 und  $-2$  nicht an, so dass diese Lösung und die Lösungen  $y \equiv 0$  und  $y \equiv -2$  nie schneiden einander. Insbesondere bleibt jede Lösung (1.13) immer in einem von Bereichen (1.11). Zwei Lösungen (1.13), die in verschiedenen Bereichen liegen, schneiden

einander offensichtlich nicht. Zwei Lösungen (1.13) mit verschiedenen Werten von  $C$ , die in einem Bereich liegen, schneiden einander auch nicht, nach Korollar 1.2. Mit dem gleichen Argument, wie im obigen Beispiel mit  $y' = y$ , zeigt man, dass (1.12) die allgemeine Lösung ist. Daraus folgt, dass das Anfangswertproblem für (1.10) eindeutig lösbar ist.

Jetzt zeigen wir, wie man ein Anfangswertproblem für (1.10) lösen kann, z.B. mit Anfangsbedingung  $y(0) = -4$ . Einsetzen  $x = 0$  und  $y = -4$  in (1.12) ergibt eine Gleichung für  $C$ :

$$\frac{2C}{1-C} = -4,$$

woraus  $C = 2$  folgt. Daher erhalten wir die folgende Lösung:

$$y = \frac{4e^{x^2}}{1 - 2e^{x^2}}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$y' = \sqrt{|y|},$$

im Bereich  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Diese DGL ist trennbar mit Funktionen  $f(x) = 1$  und  $g(y) = \sqrt{|y|}$ . Die Funktion  $g(y)$  hat eine Nullstelle  $y = 0$ , so dass die konstante Funktion  $y \equiv 0$  eine Lösung ist. In den Bereichen  $y > 0$  und  $y < 0$  lösen wir die DGL mit Hilfe von Trennung der Variablen. Im Bereich  $y > 0$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx,$$

$$2\sqrt{y} = x + C,$$

und

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x > -C, \tag{1.14}$$

wobei die Beschränkung  $x > -C$  aus der vorherigen Gleichung kommt. Ebenso, im Bereich  $y < 0$  erhalten wir

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-y}} = \int dx,$$

$$-2\sqrt{-y} = x + C,$$

und

$$y = -\frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x < -C. \tag{1.15}$$

Die Integralkurven der Lösungen (1.14) und (1.15) sind auf Fig. 5 gezeichnet worden. Wir sehen, dass die Integralkurven aus den Bereichen  $y > 0$  and  $y < 0$  schneiden die Linie  $y = 0$ , die auch eine Lösung ist. Das ermöglicht Erstellung von mehreren Lösungen wie folgt: für jedes Paar von reellen Zahlen  $a < b$ , betrachten wir die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x - a)^2, & x < a, \\ 0, & a \leq x \leq b, \\ \frac{1}{4}(x - b)^2, & x > b, \end{cases} \tag{1.16}$$

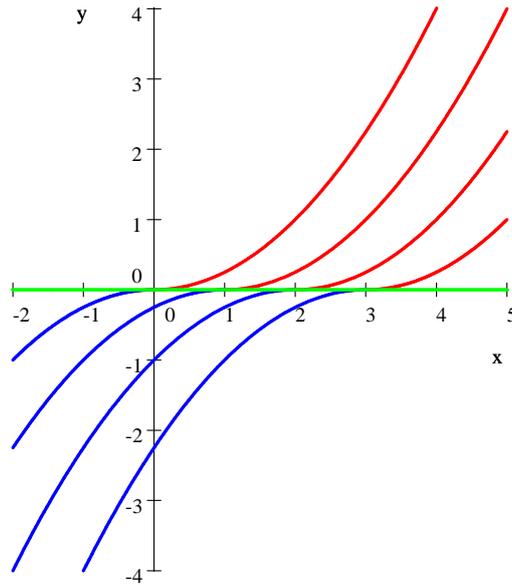


Figure 5: Die Integralkurven von  $y' = \sqrt{|y|}$

die durch Verkleben von drei anderen Lösungen gewonnen wird und offensichtlich eine Lösung für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist. Erlauben wir  $a$  zu sein  $-\infty$  oder  $b$  zu sein  $+\infty$ , mit der offensichtlichen Bedeutung von (1.16) in diesen Fällen, stellt (1.16) die allgemeine Lösung von  $y' = \sqrt{|y|}$  dar. Es ist jetzt klar, dass durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  unendliche viele Integralkurven der DGL gehen, und die Eindeutigkeit im Anfangswertproblem gilt nicht.

## 1.4 Lineare DGLen 1er Ordnung

Eine *lineare* DGL erster Ordnung hat die Form

$$y' + a(x)y = b(x), \quad (1.17)$$

wobei  $a(x)$  und  $b(x)$  gegebene Funktionen sind, die auf einem Intervall  $I$  definiert sind. Die Gleichung ist "linear" genannt, weil sie von  $y$  und  $y'$  linear abhängt.

Jede lineare DGL kann gelöst werden wie folgt.

**Satz 1.4** (Variation der Konstanten) *Seien  $a(x)$  und  $b(x)$  stetige Funktionen auf dem Intervall  $I$ . Dann hat die allgemeine Lösung von (1.17) die folgende Form:*

$$y(x) = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx, \quad (1.18)$$

wobei  $A(x)$  eine Stammfunktion von  $a(x)$  auf  $I$  ist.

Wir betonen, dass die Funktion  $y(x)$  auf dem ganzen Intervall  $I$  definiert ist und auch eine Lösung auf  $I$  ist.

**Beweis.** Betrachten wir eine neue unbekannte Funktion  $u(x) = y(x) e^{A(x)}$ , also

$$y(x) = u(x) e^{-A(x)}. \quad (1.19)$$

Einsetzen (1.19) in die Gleichung (1.17) ergibt folgendes:

$$\begin{aligned}(ue^{-A})' + aue^{-A} &= b, \\ u'e^{-A} - ue^{-A}A' + aue^{-A} &= b.\end{aligned}$$

Da  $A' = a$ , fallen die zwei Terme auf der linken Seite weg, und wir erhalten eine sehr einfache Gleichung für  $u(x)$ :

$$u'e^{-A} = b.$$

Daraus folgt, dass  $u' = be^A$  und

$$u = \int be^A dx,$$

das zusammen mit (1.19) ergibt (1.18). ■

**Korollar 1.5** *Unter der Bedingungen von Satz 1.4, für jedes  $x_0 \in I$  and  $y_0 \in \mathbb{R}$ , existiert genau eine Lösung  $y(x)$  von (1.17), die auf dem Intervall  $I$  definiert ist und die Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  erfüllt (also, durch jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$  geht genau eine Integralkurve der DGL).*

**Beweis.** Sei  $B(x)$  eine Stammfunktion von  $be^{-A}$ . Dann kann die Lösung (1.18) in der folgenden Form umgeschrieben werden:

$$y = e^{-A(x)} (B(x) + C), \quad (1.20)$$

wobei  $C$  eine beliebige reelle Konstante ist. Offensichtlich ist diese Lösung auf  $I$  definiert. Einsetzen der Bedingung  $y(x_0) = y_0$  in (1.20) ergibt eindeutigen Wert der Konstante  $C$  wie folgt:

$$C = y_0 e^{A(x_0)} - B(x_0).$$

Offensichtlich, die Lösung (1.20) mit diesem Wert von  $C$  erfüllt die Anfangsbedingung. ■

Erklären wir jetzt die Motivation für die Substitution (1.19). Sei erst  $b(x) \equiv 0$ . In diesem Fall, die DGL (1.17) wird

$$y' + a(x)y = 0.$$

Solche lineare DGLen sind *homogen* genannt. Offensichtlich, ist eine lineare homogene DGL trennbar. In den Bereichen  $y > 0$  und  $y < 0$  erhalten wir

$$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

und

$$\ln |y| = \int \frac{dy}{y} = - \int a(x) dx = -A(x) + C.$$

Daraus folgt, dass

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \quad (1.21)$$

wobei  $C$  alle reellen Werte annehmen kann (inklusive  $C = 0$  das entspricht der Lösung  $y \equiv 0$ ).

Für die allgemeine lineare DGL (1.17), ersetzt man die Konstante  $C$  in (1.21) durch eine neue unbekannte Funktion  $C(x)$ , die im Beweis wurde  $u(x)$  bezeichnet. Da die Konstante durch eine Variable ersetzt wurde, ist dieses Verfahren "Variation der Konstanten" genannt. Es gilt auch für die linearen DGLen höherer Ordnung.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2} \quad (1.22)$$

im Bereich  $x > 0$ . Berechnen von Stammfunktion von  $a(x)$  ergibt

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

(wir schreiben hier keine Konstante  $C$ , da wir nur eine Stammfunktion brauchen). Durch (1.18) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{x} \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2x} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2x} (e^{x^2} + C),$$

wobei  $C$  eine beliebige reelle Konstante ist.

Alternativ kann man zunächst die homogene DGL

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

lösen, z.B. im Bereich  $x > 0, y > 0$ . Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x} \\ (\ln y)' &= -(\ln x)' \\ \ln y &= -\ln x + C_1 \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Dann sucht man die Lösung von (1.22) in der Form  $y = \frac{C(x)}{x}$ . Einsetzen in (1.22) ergibt

$$\begin{aligned} \left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x} \frac{C}{x} &= e^{x^2}, \\ \frac{C'x - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} &= e^{x^2}, \\ \frac{C'}{x} &= e^{x^2}, \\ C' &= e^{x^2} x, \\ C(x) &= \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} (e^{x^2} + C_0). \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{2x} (e^{x^2} + C_0),$$

wobei  $C_0$  ist eine beliebige reelle Konstante. Die Integralkurven sind auf Fig. 6 gezeichnet worden.

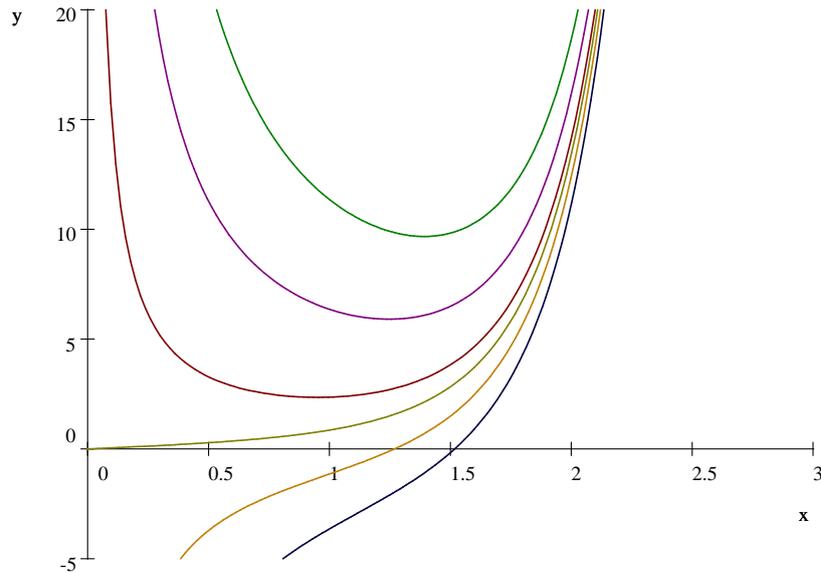


Figure 6: Die Integralkurven von (1.22)

## 1.5 Quasilineare DGLen und Differentialformen

Sei  $F(x, y)$  eine reelle Funktion, die auf einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  definiert ist. Erinnern wir die Definition des Differential der Funktion  $F$ . Die Funktion  $F$  ist differenzierbar an einer Stelle  $(x, y) \in \Omega$ , wenn reelle Zahlen  $a, b$  existieren, derart, dass

$$F(x + dx, y + dy) - F(x, y) = adx + bdy + o(|dx| + |dy|),$$

für  $dx, dy \rightarrow 0$ . Die Inkremente  $dx$  und  $dy$  jeweils von  $x$  und  $y$  werden als die neuen unabhängigen Variablen betrachtet. Sie sind die Differentiale der Variablen  $x$  und  $y$  genannt. Die lineare Funktion

$$dx, dy \mapsto adx + bdy$$

heißt totales *Differential* von  $F$  an der Stelle  $(x, y)$  und ist mit  $dF$  oder  $dF(x, y)$  bezeichnet; also

$$dF = adx + bdy. \quad (1.23)$$

Im Allgemeinen sind  $a$  und  $b$  die Funktionen von  $(x, y)$ .

Die folgenden Beziehungen bestehen zwischen die Begriffe von Differential und partielle Ableitungen:

1. Ist  $F$  differenzierbar an einer Stelle  $(x, y)$  und (1.23) gilt, so existieren die partiellen Ableitungen  $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$  und  $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$  an  $(x, y)$ , und es gilt

$$F_x = a, \quad F_y = b.$$

2. Ist  $F$  stetig differenzierbar in  $\Omega$  (also die partielle Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  existieren an jeder Stelle in  $\Omega$  und sind stetig in  $\Omega$ ), so ist  $F$  differenzierbar an jeder Stelle  $(x, y) \in \Omega$  und

$$dF = F_x dx + F_y dy. \quad (1.24)$$

**Definition.** Gegeben seien zwei Funktionen  $a(x, y)$  und  $b(x, y)$  auf  $\Omega$ , eine *Differentialform* ist die Funktion

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy,$$

wobei die unabhängige Variablen sind  $x, y, dx, dy$ . Die Differentialform ist genannt *exakt* in  $\Omega$  wenn existiert eine differenzierbare Funktion  $F$  auf  $\Omega$ , derart, dass

$$dF = adx + bdy. \quad (1.25)$$

Ist die Differentialform exakt, heißt die Funktion  $F$  von (1.25) ein *Integral* (oder eine *Potentialfunktion*) der Form.

Die folgende Behauptung stellt eine notwendige Bedingung dar, um die Form exakt zu sein.

**Lemma 1.6** *Seien  $a, b$  stetig differenzierbare Funktionen auf  $\Omega$ . Ist die Form  $adx + bdy$  exakt, gilt die folgende Identität in  $\Omega$ :*

$$a_y = b_x. \quad (1.26)$$

**Beweis.** In der Tat ergibt (1.25)  $F_x = a$  und  $F_y = b$ . Daraus folgt, dass die Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$  stetig differenzierbar sind. Nach dem Satz von Schwarz, es gilt  $F_{xy} = F_{yx}$  woraus  $a_y = b_x$  folgt. ■

**Definition.** Die Differentialform  $adx + bdy$  heißt *geschlossen* in  $\Omega$  wenn die Gleichung  $a_y = b_x$  gilt in  $\Omega$ .

Deshalb besagt Lemma 1.6 dass jede exakte Form geschlossen ist. Im Allgemeinen, eine geschlossene Form muss nicht unbedingt exakt sein, wie wir später sehen können. Da die Geschlossenheit ist einfacher zu überprüfen als die Exaktheit, es wäre sehr nützlich zu wissen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen die Geschlossenheit ergibt die Exaktheit. Wir werden solche Behauptung später beweisen, aber zuerst betrachten wir die Beispiele und besprechen die Motivation.

**Beispiel.** Die Form  $ydx - xdy$  ist nicht geschlossen weil  $a_y = 1$  und  $b_x = -1$ . Dann ist sie auch nicht exakt.

Die Form  $ydx + xdy$  ist exakt weil sie ein Integral  $F(x, y) = xy$  hat, also

$$d(xy) = ydx + xdy.$$

Daher ist sie auch geschlossen, das auch aus (1.26) folgt.

Die Form  $2xydx + (x^2 + y^2) dy$  ist exakt, weil sie ein Integral  $F(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{3}$  besitzt. Wir erklären es später, wie man dieses Integral ermitteln kann. Aber wenn man  $F(x, y)$  schon weiß, kann man (1.23) benutzen, um zu überprüfen, dass  $F$  wirklich ein Integral ist. In diesem Beispiel haben wir

$$F_x = 2xy \quad \text{und} \quad F_y = x^2 + y^2,$$

woraus folgt, dass

$$dF = 2xydx + (x^2 + y^2) dy.$$

Unsere Interesse an die Differentialformen liegt daran, dass sich die folgende DGL

$$a(x, y) + b(x, y) y' = 0 \quad (1.27)$$

lösen lässt mit Hilfe von dem Integral der Differentialform  $adx + bdy$ . Die DGL (1.27) heißt *quasilinear*, da sie linear bezüglich  $y'$  aber nicht unbedingt linear bezüglich  $y$ . Natürlich kann die DGL (1.27) in der allgemeinen Form  $y' = f(x, y)$  umgeschrieben werden, wobei  $f = -a/b$ , aber das hilft nicht. Wir benutzen  $y' = \frac{dy}{dx}$  und schreiben die DGL (1.27) wie folgt um:

$$a(x, y) dx + b(x, y) dy = 0. \quad (1.28)$$

Man sieht in der linken Seite die Differentialform  $adx + bdy$ . Die DGL (1.27) (und (1.28)) heißt exakt (bzw geschlossen) genau dann, wenn die Differentialform  $adx + bdy$  exakt ist (bzw geschlossen).

**Satz 1.7** Seien  $a, b$  stetige Funktionen auf  $\Omega$ , derart, dass die Form  $adx + bdy$  exakt ist, und sei  $F$  ein Integral dieser Form. Sei  $y(x)$  eine differenzierbare Funktion, die auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definiert, derart, dass der Graph von  $y$  in  $\Omega$  enthalten ist. Dann löst die Funktion  $y$  die DGL (1.27) genau dann, wenn

$$F(x, y(x)) = \text{const auf } I \quad (1.29)$$

(d.h. wenn Funktion  $F$  eine Konstante auf dem Graph von  $y$  ist).

Die Identität (1.29) kann betrachtet werden als eine allgemeine Lösung von (1.27). Die Funktion  $F$  heißt auch *erstes Integral* der DGL (1.27).

**Beweis.** Da der Graph von  $y(x)$  in  $\Omega$  enthalten wird, ist die Verkettung  $F(x, y(x))$  auf  $I$  definiert. Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = F_x + F_y y' = a + by'.$$

Daher ist die Gleichung  $a + by' = 0$  äquivalent zu  $\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = 0$  auf  $I$ , und letzteres äquivalent zu  $F(x, y(x)) = \text{const auf } I$ . ■

**Beispiel.** Die DGL  $y + xy' = 0$  ist exakt mit Integral  $F = xy$ . Daher ist die allgemeine Lösung mit  $xy = C$  gegeben. In diesem Fall erhält man das gleiche auch mit Hilfe von Trennung der Variablen.

Die DGL  $2xy + (x^2 + y^2) y' = 0$  ist exakt mit Integral  $F = x^2 y + \frac{y^3}{3}$ . Daher ist die allgemeine Lösung wie folgt:

$$x^2 y + \frac{y^3}{3} = C. \quad (1.30)$$

Die Integralkurven dieser DGL sind auf Fig. 7 gezeichnet worden.

Eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist *Rechteck* genannt wenn sie die Form  $I \times J$  hat, wobei  $I$  und  $J$  Intervalle sind. Das Rechteck ist offen, wenn die beiden Intervalle  $I$  und  $J$  offen sind. Der folgende Satz antwortet auf die Frage, wie die Exaktheit der Differentialform in einem Rechteck bestimmt werden kann.

**Satz 1.8** (Lemma von Poincaré) Seien  $\Omega$  ein offenes Rechteck und  $a, b$  stetig differenzierbare Funktionen auf  $\Omega$ . Ist die Differentialform  $adx + bdy$  geschlossen in  $\Omega$  (also  $a_y \equiv b_x$  gilt in  $\Omega$ ), ist sie auch exakt in  $\Omega$ .

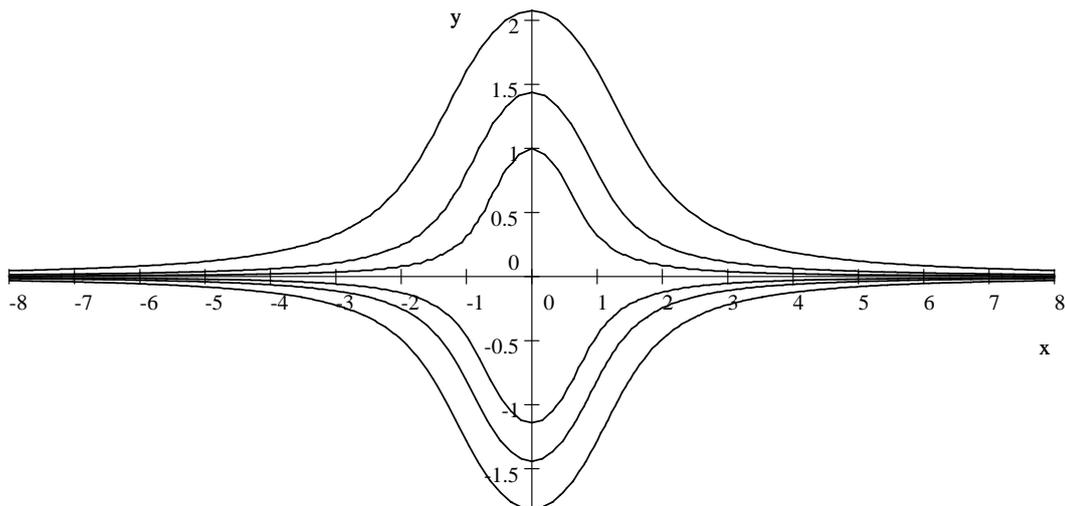


Figure 7: Die Integralkurven von (1.30)

Nach Lemma 1.6, eine exakte Form ist immer geschlossen. Deshalb bedeutet Satz 1.8, dass die Form  $adx + bdy$  in einem Rechteck exakt ist genau dann, wenn sie geschlossen ist. In allgemeinen Teilmengen  $\Omega$  gilt diese Äquivalenz nicht, wie wir es später sehen können.

**Beweis.** Erst versuchen wir eine explizite Formel für das Integral  $F$  zu bestimmen, angenommen, dass  $F$  existiert. Dann benutzen wir diese Formel um die Existenz des Integrales zu beweisen. Wählen wir einen Referenzpunkt  $(x_0, y_0) \in \Omega$  und nehmen wir an, dass  $F(x_0, y_0) = 0$  (ist  $F$  ein Integral, ist auch  $F + C$  ein Integral, für jede Konstante  $C$ ; indem wir eine geeignete Konstante wählen, kann die Gleichung  $F(x_0, y_0)$  erfüllt werden). Da  $\Omega$  ein Rechteck ist, für jede Stelle  $(x, y) \in \Omega$  ist auch die Stelle  $(x, y_0)$  zu  $\Omega$  gehört. Darüber hinaus, sind die beiden Intervalle  $[(x_0, y_0), (x, y_0)]$  und  $[(x, y_0), (x, y)]$  in  $\Omega$  enthalten (Fig. 8).

Da  $F_x = a$  und  $F_y = b$  gelten, erhalten wir nach dem Fundamentalsatz der Analysis, dass

$$F(x, y) = F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x F_x(s, y_0) ds = \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds,$$

$$F(x, y) - F(x, y_0) = \int_{y_0}^y F_y(x, t) dt = \int_{y_0}^y b(x, t) dt,$$

und somit

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y b(x, t) dt. \quad (1.31)$$

Jetzt fangen wir den Beweis von neuem an. Angenommen, dass die Differentialform  $adx + bdy$  geschlossen ist, definieren wir eine Funktion  $F$  durch die Identität (1.31). Wir müssen zeigen, dass  $F$  ein Integral von  $adx + bdy$  ist. Da  $a$  und  $b$  stetig differenzierbar sind, es reicht zu überprüfen, dass

$$F_x = a \quad \text{und} \quad F_y = b.$$

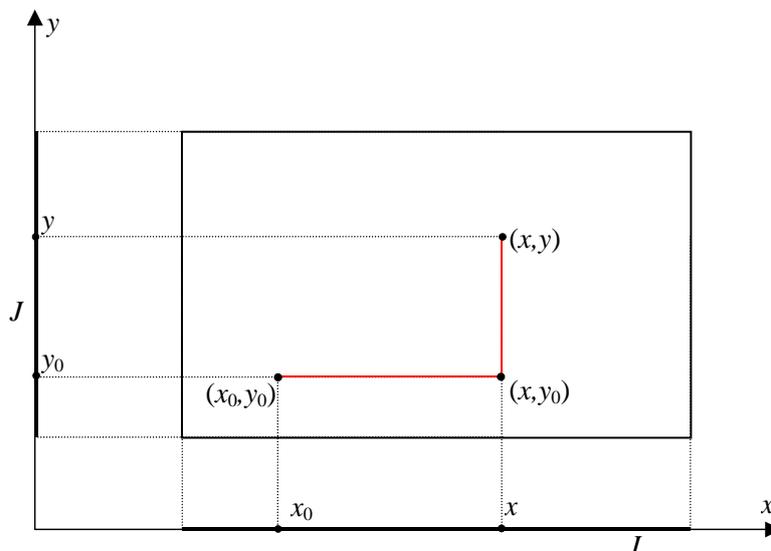


Figure 8: Die Stellen  $(x_0, y_0)$  und  $(x, y)$  im Rechteck  $\Omega$

Ableiten der Identität (1.31) in  $y$  ergibt

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y b(x, t) dt = b(x, y).$$

Ableiten (1.31) in  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y b(x, t) dt \\ &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} b(x, t) dt, \end{aligned} \quad (1.32)$$

wobei in (1.32) das Integralzeichen und die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x}$  vertauscht worden sind. Dieser Vertausch wird unterhalb in Lemma 1.10 begründet. Einsetzen  $b_x = a_y$  in (1.32) ergibt

$$\begin{aligned} F_x &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y a_y(x, t) dt \\ &= a(x, y_0) + (a(x, y) - a(x, y_0)) \\ &= a(x, y), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

**Korollar 1.9** *Unter der Bedingungen von Satz 1.8, kann das Intergal  $F$  von  $adx + bdy$  durch folgende Identität bestimmt werden:*

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x a(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y b(x, t) dt, \quad (1.33)$$

wobei  $(x_0, y_0) \in \Omega$  eine beliebige Stelle ist.

Jetzt beweisen wir eine Behauptung, die (1.32) begründet.

**Lemma 1.10** *Sei  $g(x, t)$  eine stetige Funktion auf Rechteck  $I \times J$  wobei  $I$  und  $J$  zwei beschränkten geschlossenen Intervalle sind. Angenommen, die partielle Ableitung  $\frac{\partial g}{\partial x}$  existiert und ist stetig auf  $I \times J$ . Dann ist die Funktion  $x \mapsto \int_J g(x, t) dt$  stetig differenzierbar auf  $I$  und es gilt für alle  $x \in I$*

$$\frac{d}{dx} \int_J g(x, t) dt = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt. \quad (1.34)$$

Damit Integration bezüglich  $t$  und Ableitung nach  $x$  dürfen vertauscht werden.

**Proof of Lemma 1.10.** Die Ableitung auf der linken Seite von (1.34) ist gleich

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\int_J g(y, t) dt - \int_J g(x, t) dt}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \int_J \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} dt.$$

Daher müssen wir beweisen, dass für alle  $x \in I$

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_J \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} dt = \int_J g_x(x, t) dt.$$

Nach der Definition von partiellen Ableitungen haben wir für alle  $t \in J$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} = g_x(x, t). \quad (1.35)$$

Betrachten wir den Ausdruck  $\frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x}$  als eine Funktion von  $t$ , wobei  $x$  eine feste Konstante ist und  $y$  ein Parameter. Dann haben wir eine Folge von Funktionen von  $t$ , die durch  $y$  parametrisiert ist und gegen  $g_x(x, t)$  konvergiert für  $y \rightarrow x$ . Wir möchten daraus folgern, dass auch die Integrale von diesen Funktionen bezüglich  $t$  konvergieren. Nach einem Satz aus Analysis II, kommutieren bei der Konvergenz Integration und Grenzwertbildung, vorausgesetzt, dass das Intervall  $J$  von Integration beschränkt ist und die Konvergenz gleichmässig ist. In unserem Fall bedeutet letzteres, dass

$$\sup_{t \in J} \left| \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} - g_x(x, t) \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow x. \quad (1.36)$$

Also, es bleibt (1.36) zu zeigen. Nach dem Mittelwertsatz, für jedes  $t \in J$  existiert  $\xi \in [x, y]$ , derart, dass

$$\frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} = g_x(\xi, t). \quad (1.37)$$

Wir betonen, dass  $\xi$  von  $x, y, t$  abhängt. Nach dem Satz von Heine, jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge ist gleichmäßig stetig. Insbesondere ist die Funktion  $g_x(x, t)$  gleichmäßig stetig auf dem Rechteck  $I \times J$ , da dieses Rechteck beschränkt und geschlossen, deshalb kompakt, ist. Also, für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$ , derart, dass

$$x, x' \in I, |x - x'| < \delta \text{ und } t, t' \in J, |t - t'| < \delta \Rightarrow |g_x(x, t) - g_x(x', t')| < \varepsilon. \quad (1.38)$$

Wenn  $|x - y| < \delta$ , dann gilt auch  $|x - \xi| < \delta$  und somit nach (1.38)

$$|g_x(\xi, t) - g_x(x, t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in J. \quad (1.39)$$

Durch eine Kombination von (1.37) und (1.39) erhalten wir, dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \sup_{t \in J} \left| \frac{g(y, t) - g(x, t)}{y - x} - g_x(x, t) \right| \leq \varepsilon,$$

woraus (1.36) folgt. ■

Wir zeigen jetzt einige Beispiele zum Satz 1.8.

**Beispiel.** Betrachten noch ein mal die Differentialform

$$adx + bdy = 2xydx + (x^2 + y^2) dy$$

in  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Da

$$a_y = (2xy)_y = 2x = (x^2 + y^2)_x = b_x,$$

ist diese Form geschlossen. Nach Satz 1.8 ist diese Form auch exakt. Das Integral  $F$  der Form kann nach (1.33) berechnet werden wie folgt: mit  $x_0 = y_0 = 0$  erhalten wir

$$F(x, y) = \int_0^x 2s \cdot 0 ds + \int_0^y (x^2 + t^2) dt = x^2 y + \frac{y^3}{3},$$

wie war schon früher ausgesagt worden.

**Beispiel.** Betrachten die Differentialform

$$adx + bdy = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \tag{1.40}$$

in  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Diese Form ist geschlossen, weil

$$a_y = - \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right)_y = - \frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$b_x = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Nach Satz 1.8 ist diese Form exakt in jedem in  $\Omega$  enthaltenen Rechteck ist. Jedoch ist  $\Omega$  selbst kein Rechteck, und deshalb kann man nicht behaupten, dass diese Form auch in  $\Omega$  exakt ist. In der Tat zeigen wir, dass die (1.40) Form nicht exakt in  $\Omega$  ist, also diese Form in  $\Omega$  kein Integral hat.

Erst betrachten wir den Rechteck  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$  (Halbebene) mit  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ . Nach (1.33) erhalten wir in der Halbebene ein Integral der Form (1.40):

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{x_0}^x \frac{-y_0}{s^2 + y_0^2} ds + \int_{y_0}^y \frac{x}{x^2 + t^2} dt \\ &= 0 + \int_0^y \frac{d(t/x)}{1 + (t/x)^2} \\ &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Also,  $F(x, y)$  ist nicht anders als der Polarwinkel von  $(x, y)$ . Bezeichnen wir mit  $(r, \theta)$  die Polarkoordinaten in der Ebene  $(x, y)$ , wobei  $r$  der Polarradius ist und  $\theta$  der Polarwinkel. Es gilt immer in  $\Omega$ , dass

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r},$$

aber  $\theta$  als eine reelle Zahl ist generell nicht eindeutig definiert, nämlich nur bis zum  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . In der Halbebene  $\{x > 0\}$  kann man die Werte von  $\theta$  auf das Intervall  $(-\pi/2, \pi/2)$  beschränken. Da  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  und die Umkehrfunktion  $\arctan$  die Werte in  $(-\pi/2, \pi/2)$  annimmt (Fig. 9), erhalten wir, dass in der Halbebene  $\{x > 0\}$  gilt

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = F(x, y),$$

wie besagt.

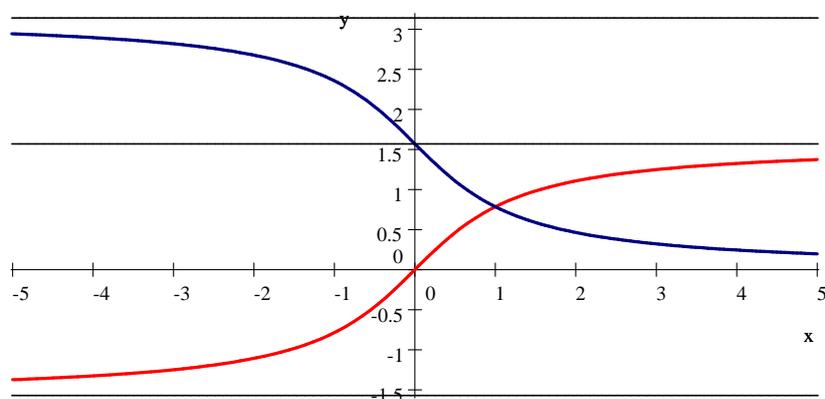


Figure 9: Die Funktionen  $\arctan$  und  $\operatorname{arccot}$

Betrachten wir jetzt den kleineren Bereich

$$\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\},$$

wo der Wert von  $\theta$  eindeutig als Element von dem offenen Intervall  $(-\pi, \pi)$  definiert werden kann. Wir behaupten, dass die Funktion  $\theta = \theta(x, y)$  ein Integral von  $adx + bdy$  in  $\Omega'$  ist, also es gilt in  $\Omega'$

$$d\theta = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}. \quad (1.41)$$

In der Halbebene  $\{x > 0\}$  haben wir es schon bewiesen. Da  $\Omega'$  eine Vereinigung von drei Halbebenen  $\{x > 0\}$ ,  $\{y > 0\}$ ,  $\{y < 0\}$  ist, es reicht die Identität (1.41) in den Bereichen  $\{y > 0\}$  und  $\{y < 0\}$  zu überprüfen.

In der Halbebene  $\{y > 0\}$  haben wir  $\theta \in (0, \pi)$ . Da  $\cot \theta = \frac{x}{y}$  und die Umkehrfunktion  $\operatorname{arccot}$  die Werte in  $(0, \pi)$  annimmt (Fig. 9), erhalten wir

$$\theta = \operatorname{arccot} \frac{x}{y}.$$

Durch Ableitung von  $\theta$  erhalten wir

$$d\theta = -\frac{1}{1 + (x/y)^2} d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

so dass (1.41) gilt. In der Halbebene  $\{y < 0\}$  haben wir analog  $\theta \in (-\pi, 0)$  und  $\cot(-\theta) = -\frac{x}{y}$ , und somit

$$\theta = -\operatorname{arccot}\left(-\frac{x}{y}\right).$$

Durch Ableitung von  $\theta$  erhalten wir (1.41) auch in diesem Fall. Damit haben wir bewiesen, dass die Differentialform (1.40) exakt in  $\Omega'$  ist.

Jetzt können zeigen wir, dass die Form (1.40) nicht exakt in  $\Omega$  ist. Nehmen wir zunächst das Gegenteil an, dass die Form exakt in  $\Omega$  ist. Sei  $F$  ein Integral der Form in  $\Omega$ . Dann ist  $F$  auch ein Integral in  $\Omega'$ , und somit gilt  $dF = d\theta$  in  $\Omega'$ . Daraus folgt, dass  $d(F - \theta) = 0$  in  $\Omega'$ . Da die Menge  $\Omega'$  zusammenhängend ist, erhalten wir, dass  $F - \theta = \text{const}$  in  $\Omega'$ . Insbesondere lässt sich  $\theta$  als eine stetige Funktion von  $\Omega'$  nach  $\Omega$  fortsetzen. Jedoch ist es falsch, da die Grenzwerte von  $\theta(x, y)$  für  $(x, y) \rightarrow (-1, 0)$  unterschiedlich sind, je nach  $y < 0$  oder  $y > 0$ : im ersten Fall ist der Grenzwert  $\pi$  und im zweiten Fall  $-\pi$ .

Dieses Beispiel zeigt, dass Satz 1.8 für alle offenen Mengen  $\Omega$  nicht gilt. Es ist möglich zu beweisen, dass Satz 1.8 genau dann richtig ist, wenn die Menge  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist, also sich jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Offensichtlich ist jedes Rechteck einfach zusammenhängend (sowohl als die Menge  $\Omega'$ ), während ist die Menge  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  nicht einfach zusammenhängend.

## 1.6 Integrierender Faktor

Betrachten wir wieder eine quasilineare DGL

$$a(x, y) + b(x, y) y' = 0 \quad (1.42)$$

in einer offenen Teilmenge  $\Omega$  und nehmen wir an, dass (1.42) nicht exakt ist.

Schreiben wir (1.42) in der Form um:

$$adx + bdy = 0$$

und multiplizieren mit einer Funktion  $M(x, y)$  auf  $\Omega$ , so dass

$$Madx + Mbdy = 0.$$

Verschwindet  $M$  nicht in  $\Omega$ , sind die beiden Gleichungen offensichtlich äquivalent.

**Definition.** Eine Funktion  $M(x, y)$  auf  $\Omega$  heißt *integrierender Faktor* für die DGL (1.42) genau dann, wenn  $M(x, y) \neq 0$  in  $\Omega$  und die Form  $Madx + Mbdy$  exakt in  $\Omega$  ist.

Findet man integrierenden Faktor, so kann man die Differentialgleichung (1.42) mittels Satzes 1.7 lösen.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$y' = \frac{y}{4x^2y + x},$$

im Bereich  $\Omega = \{x > 0, y > 0\}$  und schreiben sie in der Form um:

$$ydx - (4x^2y + x) dy = 0.$$

Offensichtlich ist diese Gleichung nicht exakt, da sie nicht geschlossen ist. Jedoch ergibt dividieren durch  $x^2$  eine DGL

$$\frac{y}{x^2} dx - \left(4y + \frac{1}{x}\right) dy = 0, \quad (1.43)$$

die geschlossen ist, weil

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)_y = \frac{1}{x^2} = -\left(4y + \frac{1}{x}\right)_x.$$

Nach Satz 1.8 ist die Differentialgleichung (1.43) exakt in  $\Omega$  und somit ist die Funktion  $\frac{1}{x^2}$  integrierender Faktor. Bestimmen das Integral der DGL (1.43) mittels (1.33) mit  $x_0 = y_0 = 1$  ergibt

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_1^x a(s, 1) ds + \int_1^y b(x, t) dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{s^2} ds - \int_1^y \left(4t + \frac{1}{x}\right) dt \\ &= 3 - 2y^2 - \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.7 ist die allgemeine Lösung wie folgt:

$$2y^2 + \frac{y}{x} = C.$$

Es gibt keine allgemeine Methode um integrierender Faktor zu bestimmen.

## 1.7 Die DGLen 2er Ordnung

Für DGLen höherer Ordnung benutzen wir die anderen Bezeichnungen: ein unabhängige Variable wird mit  $t$  bezeichnet und die gesuchte Funktion mit  $x(t)$ . Dann sieht eine explizite DGL 2er Ordnung wie folgt aus:

$$x'' = f(t, x, x'),$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von drei Variablen ist. Wir besprechen hier einige Probleme, die sich auf DGLen 2er Ordnung zurückführen lassen.

### 1.7.1 Zweites Newtonsches Gesetz (das Aktionsprinzip)

Wir betrachten eine 1-dimensionale Bewegung eines Teilchens. Sei  $x(t)$  die Koordinate des Teilchens um Zeit  $t$ . Die Geschwindigkeit des Teilchens ist  $v(t) = x'(t)$  und die Beschleunigung ist  $a(t) = x''(t)$ . Das Aktionsprinzip besagt, dass

$$mx'' = F, \tag{1.44}$$

wobei  $m$  die Masse von Teilchen ist und  $F$  die bewegende Kraft. Im Allgemeinen ist  $F$  ein Funktion von  $t, x, x'$ , also  $F = F(t, x, x')$  so dass (1.44) eine DGL 2er Ordnung bezüglich  $x(t)$  ist. Ist die Kraft  $F$  als eine Funktion von  $t, x, x'$  bekannt, so kann man versuchen die DGL (1.44) bezüglich  $x(t)$  zu lösen.

Die Kraft  $F$  heißt *konservativ* wenn  $F$  nur von der Koordinate  $x$  abhängt. Z.B., sind die folgenden Kräfte konservativ: Gravitationskraft, elastische Kräfte, elektrostatische Kraft, u.a. Im Gegensatz sind die Reibung, Strömungswiderstand, und ähnliche Kräfte nicht konservative, da sie von Geschwindigkeit  $x'$  abhängen.

Ist  $F$  eine konservative Kraft, so lässt sich die DGL (1.44) zu einer DGL 1er Ordnung reduzieren, wie folgt. Angenommen  $F = F(x)$ , bezeichnen wir mit  $U(x)$  eine Stammfunktion von  $-F(x)$ . Die Funktion  $U$  heißt eine *Potentialfunktion* der Kraft  $F$ . Multiplizieren die DGL (1.44) mit  $x'$  und integrieren bezüglich  $t$  ergibt

$$\begin{aligned} m \int x'' x' dt &= \int F(x) x' dt, \\ \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} (x')^2 dt &= \int F(x) dx, \\ \frac{m(x')^2}{2} &= -U(x) + C \end{aligned} \tag{1.45}$$

und somit

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = C.$$

Die Summe  $\frac{mv^2}{2} + U(x)$  heißt die gesamte mechanische Energie des Teilchens, wobei  $\frac{mv^2}{2}$  die *kinetische* Energie ist und  $U(x)$  *potentielle* Energie. Deshalb haben wir den Energieerhaltungssatz bewiesen: unter konservativer Kraft bleibt die Gesamtenergie konstant.

Andererseits kann die Identität (1.45) als eine DGL 1er Ordnung betrachtet werden, die eine Folge von (1.44) ist. Ist  $x(t)$  eine Lösung von (1.45) und verschwindet  $x'(t)$  nicht, so erfüllt  $x(t)$  auch (1.44). In der Tat ableiten von (1.45) ergibt

$$mx''x' = F(x)x',$$

woraus (1.44) folgt. Wir sehen, dass unter der Bedingung  $x' \neq 0$  die beiden DGLen (1.44) und (1.45) äquivalent sind. In diesem Fall lässt sich die DGL 2er Ordnung (1.44) auf DGL 1er Ordnung (1.45) zurückführen. Die DGL (1.45) lässt sich mit Hilfe von Trennung der Variablen lösen.

### 1.7.2 Elektrische Schaltung

Betrachten wir einen so genannten *RLC*-Stromkreis, d.h. eine Reihenschaltung mit folgenden Bauelementen: ein Widerstand mit dem Widerstandswert  $R$ , eine Spule mit der Induktivität  $L$ , ein Kondensator mit der Kapazität  $C$ , und eine Stromquelle mit der Spannung  $V(t)$ , die von Zeit  $t$  abhängt (Fig. 10).

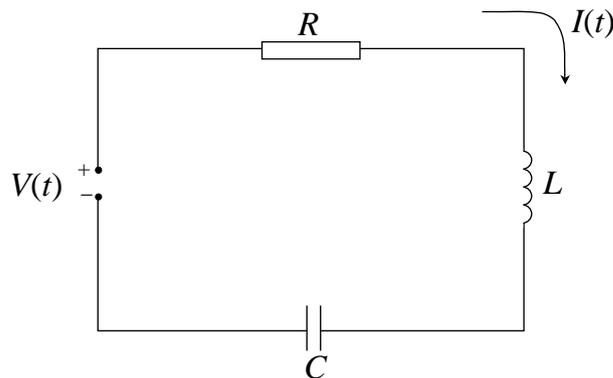


Figure 10: RLC-Stromkreis

Sei  $I(t)$  der Strom im Stromkreis um Zeit  $t$ . Wir betrachten  $I(t)$  als eine gesuchte Funktion und möchten eine DGL für  $I(t)$  gewinnen. Nach dem Ohmschen Gesetz ist der Spannungsabfall  $v_R$  auf dem Widerstand gleich

$$v_R = RI.$$

Nach dem Induktionsgesetz von Faraday ist der Spannungsabfall  $v_L$  auf der Spule gleich

$$v_L = LI',$$

wobei  $I' = \frac{dI}{dt}$ . Letztlich ist der Spannungsabfall  $v_C$  auf dem Kondensator gleich

$$v_C = \frac{Q}{C},$$

wobei  $Q = Q(t)$  die Ladung des Kondensators ist; es gilt auch  $Q' = I$ . Nach 2. Kirchhoffsches Gesetz erhalten wir

$$v_R + v_L + v_C = V(t)$$

und somit

$$RI + LI' + \frac{Q}{C} = V(t).$$

Ableiten nach  $t$  ergibt

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = V', \quad (1.46)$$

die eine DGL 2er Ordnung bezüglich unbekannte Funktion  $I(t)$  ist. Wir betonen, dass die DGL (1.46) linear ist, weil die linke Seite von der Funktion  $I$  und ihren Ableitungen linear abhängt. Wir kehren zur diesen Gleichung zurück, nachdem wir eine Theorie von linearen DGLen entwickelt haben.

## 1.8 Systeme von DGLen und die DGLen höherer Ordnung

Betrachten wir eine Vektorfunktion  $x(t)$  einer reellen Variablen  $t$ , also  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $I$  ein Intervall ist. Sei  $x_k$  die Komponenten von  $x$ , so dass

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Ableitung  $x'(t)$  wird komponentenweise definiert, so dass

$$x' = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Die folgende Gleichung heißt *Vektor-DGL* 1er Ordnung:

$$x' = f(t, x), \quad (1.47)$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von  $n + 1$  Variablen mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  ist. Nämlich,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $\Omega$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, und das Paar  $(t, x)$  wird mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wie folgt:

$$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n).$$

Eine Lösung von (1.47) ist eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (wobei  $I$  ein Intervall ist) mit folgenden Eigenschaften:

1.  $x(t)$  ist differenzierbar an allen Stellen  $t \in I$ ;
2.  $(t, x(t)) \in \Omega$  für alle  $t \in I$ ;
3.  $x'(t) = f(t, x(t))$  für alle  $t \in I$ .

Die Vektor-DGL (1.47) ist offensichtlich äquivalent zum folgenden System von  $n$  skalaren Gleichungen:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_k = f_k(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.48)$$

wobei  $f_k$  die Komponenten von  $f$  sind. Die Vektor-DGL (1.47) sowie das System (1.48) heißen *Normalsystem*.

Betrachten wir jetzt eine allgemeine explizite DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.49)$$

wobei  $t$  eine unabhängige Variable ist und  $y(t)$  eine gesuchte Funktion. Diese DGL lässt sich immer auf ein Normalsystem zurückführen. In der Tat entspricht jeder skalaren Funktion  $y(t)$  eine Vector-Funktion

$$x = (y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ . Offensichtlich haben wir  $x' = (y', y'', \dots, y^{(n)})$ , und (1.49) ergibt ein System

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = F(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.50)$$

Das System (1.50) kann als eine Vektor-DGL (1.47) geschrieben werden, mit der Funktion  $f$  wie folgt:

$$f(t, x) = (x_2, x_3, \dots, x_n, F(t, x_1, \dots, x_n)). \quad (1.51)$$

Umgekehrt, (1.50) ergibt

$$x_1^{(n)} = x'_n = F(t, x_1, \dots, x_n) = F(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(n-1)})$$

so dass die Funktion  $y = x_1$  eine Lösung von (1.49) ist. Deshalb ist die skalare DGL (1.49) äquivalent zum Normalsystem (1.47) mit Funktion (1.51).

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL 2er Ordnung

$$y'' = F(t, y, y'). \quad (1.52)$$

Mit Hilfe von Substitution  $x = (y, y')$  erhalten wir  $x' = (y', y'')$  und

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = F(t, x_1, x_2) \end{cases}$$

Deshalb ist (1.52) äquivalent zum Normalsystem (1.47) mit Funktion

$$f(t, x) = (x_2, F(t, x_1, x_2)).$$

In der Fall von DGLen 1er Ordnung haben wir gesehen, dass das Anfangswertproblem oft eine eindeutige Lösung hat. Analog definiert man das Anfangswertproblem (AWP) für ein Normalsystem:

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $(t_0, x_0) \in \Omega$  ein gegebener Punkt ist. Hier ist  $x_0$  ein gegebener Vektor von  $\mathbb{R}^n$ , der man *Anfangswert* von  $x(t)$  nennt, und  $t_0 \in \mathbb{R}$  heißt *Anfangszeit*.

Offensichtlich bedeutet die Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  für die DGL (1.49), dass

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

wobei  $y_0, \dots, y_{n-1}$  die Komponenten von  $x_0$  sind, also die gegebenen Werte. Deshalb formuliert man das AWP für (1.49) wie folgt:

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

**Beispiel.** Für DGL (1.52) 2er Ordnung ist das AWP wie folgt:

$$\begin{cases} y'' = F(t, y, y') \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Ist (1.52) von dem Aktionsprinzip gewonnen worden, so bedeuten die Anfangsbedingungen, dass die Position und die Geschwindigkeit um die Anfangszeit gegeben sind.

## 1.9 Einige Fakten aus Analysis von $\mathbb{R}^n$

Hier holen wir einige Fakten aus Analysis von  $\mathbb{R}^n$  wieder, die für das nächste Thema notwendig sind.

### 1.9.1 Die Normen in $\mathbb{R}^n$

Eine *Norm* in  $\mathbb{R}^n$  ist eine Funktion  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $N(x) = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .
2.  $N(cx) = |c| N(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$  (absolute Homogenität).
3.  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  (Dreiecksungleichung).

Erfüllt  $N(x)$  die Eigenschaften 2 und 3 aber nicht unbedingt 1, so heißt  $N(x)$  *Halbnorm*.

Z.B. ist die Funktion  $|x|$  eine Norm in  $\mathbb{R}$ .

Normalerweise bezeichnen wir eine Norm mit  $\|x\|$  statt  $N(x)$ .

**Beispiel.** Für jedes  $p \geq 1$  definiert man die *p-Norm* in  $\mathbb{R}^n$  wie folgt:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}. \quad (1.53)$$

Insbesondere für  $p = 1$  gilt

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|,$$

und für  $p = 2$

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Für  $p = \infty$  definieren wir die  $\infty$ -Norm (=Maximalnorm) wie folgt:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Es ist bekannt, dass  $p$ -Norm für jedes  $p \in [1, \infty]$  eine Norm ist (damit ist die Terminologie begründet).

Man kann zeigen, dass alle Normen in  $\mathbb{R}$  proportional zu  $|x|$  sind (also, für jede Norm  $\|\cdot\|$  in  $\mathbb{R}$  gilt  $\|x\| = c|x|$  mit einer positiven Konstante  $c$ ). In  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gibt es eine Vielfältigkeit von nicht-proportional Normen. Jedoch sind alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent im folgenden Sinn.

**Satz.** Seien  $N_1(x)$  und  $N_2(x)$  zwei Normen in  $\mathbb{R}^n$ , dann existieren zwei positive Konstante  $c$  und  $C$ , derart, dass

$$c \leq \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq C \text{ für alle } x \neq 0. \quad (1.54)$$

Z.B., für die Normen  $\|x\|_p$  und  $\|x\|_\infty$  hat man

$$1 \leq \frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} \leq n^{1/p},$$

weil

$$\max |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n \max |x_k|^p.$$

Für die meisten Anwendungen kann eine Norm durch eine andere äquivalente Norm ersetzt werden. In diesem Fall bedeutet (1.54), dass die Wahl der Norm in solchen Anwendungen unwichtig ist. Z.B. ist es der Fall wenn man die Topologie in  $\mathbb{R}^n$  durch die Norm definiert. Dann ergibt (1.54), dass alle Norm-Topologien in  $\mathbb{R}^n$  gleich sind.

Wählen wir eine Norm  $\|x\|$  in  $\mathbb{R}^n$  und definieren für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$  eine offene Kugel

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\},$$

und eine geschlossene Kugel

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}.$$

Z.B. in  $\mathbb{R}$  mit  $\|x\| = |x|$  haben wir  $B(x, r) = (x - r, x + r)$  und  $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$ . Auf Fig. 11, 12, 13, 14 sind die Skizzen von Kugeln der verschiedenen Normen in  $\mathbb{R}^2$  gezeichnet worden.

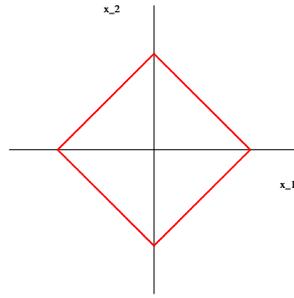


Figure 11: Kugel von 1-Norm (Diamant-Kugel)

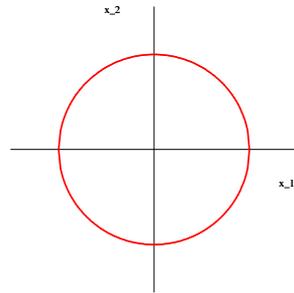


Figure 12: Kugel von 2-Norm (runde Kugel)

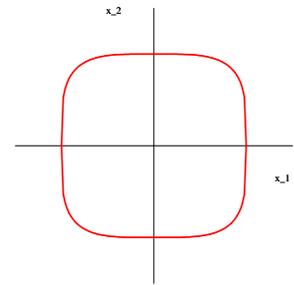


Figure 13: Kugel von 4-Norm

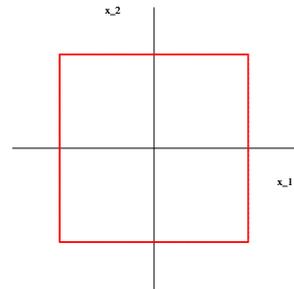


Figure 14: Kugel von  $\infty$ -Norm (Quadrat-Kugel)

### 1.9.2 Stetige Abbildungen

Seien  $S$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f$  eine Abbildung von  $S$  nach  $\mathbb{R}^m$ . Die Abbildung  $f$  heißt stetig in  $x \in S$  wenn  $f(y) \rightarrow f(x)$  für  $y \rightarrow x$ , also

$$\|f(y) - f(x)\| \rightarrow 0 \text{ wie } \|y - x\| \rightarrow 0.$$

Im Ausdruck  $\|y - x\|$  benutzen wir eine Norm in  $\mathbb{R}^n$ , während im Ausdruck  $\|f(y) - f(x)\|$  benutzen wir eine Norm in  $\mathbb{R}^m$ . Die beiden Normen sind beliebig, aber fest. Da alle Normen in den Euklidischen Räumen äquivalent sind, ist die Definition von Stetigkeit unabhängig von der Wahl der Normen.

Wir betonen, dass jede Norm  $N(x)$  in  $\mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion ist, weil nach Dreiecksungleichung

$$|N(y) - N(x)| \leq N(y - x) \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x.$$

Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^n$  heißt:

- offen, wenn für jedes  $x \in S$  existiert  $r > 0$ , derart, dass  $B(x, r) \subset S$ ;
- abgeschlossen, wenn das Komplement  $S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$  offen ist;
- kompakt, wenn  $S$  beschränkt und abgeschlossen ist<sup>1</sup>.

In Analysis II beweist man den folgenden Satz.

**Satz.** *Seien  $S$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetige Abbildung. Dann ist das Bild  $f(S)$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$ . Insbesondere wenn  $m = 1$ , dann ist  $f$  beschränkt und nimmt auf  $S$  den maximalen (und minimalen) Wert an.*

### 1.9.3 Lineare Operatoren und Operatornorm

Eine Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt (*linearer*) *Operator* wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $A(x + y) = Ax + Ay$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  (wir schreiben  $Ax = A(x)$ ).
2.  $A(cx) = cAx$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Die Menge von allen Operatoren von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  wird mit  $\mathbb{R}^{m \times n}$  oder  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  bezeichnet. Jeder Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kann mit Hilfe von einer  $m \times n$  Matrix  $(a_{ij})$  dargestellt werden, wobei  $i = 1, \dots, m$  der Index von Zeilen ist und  $j = 1, \dots, n$  der Index von Spalten. Nämlich, für jeden Spaltenvektor  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$Ax = (a_{ij})x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>Eigentlich ist die allgemeine Definition von kompakten Mengen anders, aber für Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ist die Kompaktheit äquivalent zu Beschränktheit und Abgeschlossenheit.

Man kann auch schreiben, dass für jedes  $i = 1, \dots, m$  gilt

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Man definiert die Addition von Operatoren aus  $\mathbb{R}^{m \times n}$  und die Multiplikation mit einer Konstante  $c \in \mathbb{R}$  wie folgt

1.  $(A + B)(x) = Ax + Bx,$
2.  $(cA)(x) = c(Ax).$

Offensichtlich ist  $\mathbb{R}^{m \times n}$  mit diesen Operationen ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Da jede  $m \times n$  Matrix genau  $mn$  Komponenten hat, gilt es  $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$ . Insbesondere sind  $\mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbb{R}^{mn}$  linear isomorph, also  $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$ .

Für jeden Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definiert man die *Operatornorm* von  $A$  wie folgt:

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad (1.55)$$

wobei  $\|x\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^n$  ist und  $\|Ax\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^m$ .

**Behauptung.** *Es gilt immer  $\|A\| < \infty$ .*

**Beweis.** Da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, es reicht es zu zeigen in der Fall, wenn die Norm in  $\mathbb{R}^n$  1-Norm ist und die Norm in  $\mathbb{R}^m$   $\infty$ -Norm ist. Mit Hilfe von der Matrixdarstellung von  $A$  wie oben, erhalten wir

$$\|Ax\|_\infty = \max_i |(Ax)_i| \leq \max_{i,j} |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j| = a \|x\|_1,$$

wobei  $a = \max_{i,j} |a_{ij}|$ . Daraus folgt, dass  $\|A\| \leq a < \infty$ . ■

Deshalb kann  $\|A\|$  definiert werden als die minimale reelle Zahl mit folgender Eigenschaft:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.56)$$

Daraus folgt, dass jeder Operator  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  stetig ist, weil

$$\|Ay - Ax\| = \|A(y - x)\| \leq \|A\| \|y - x\| \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow x.$$

**Behauptung.** *Die Operatornorm ist eine Norm im Vektorraum  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .*

**Beweis.** Nach (1.55) haben wir  $\|A\| \geq 0$ ; außerdem, wenn  $A \neq 0$  dann existiert  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Ax \neq 0$ , und wir erhalten  $\|Ax\| > 0$  und

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} > 0.$$

Die Dreiecksungleichung und die Homogenität folgen aus (1.55) wie folgt:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_x \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_x \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_x \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &= \|A\| + \|B\|, \end{aligned}$$

und

$$\|cA\| = \sup_x \frac{\|(cA)x\|}{\|x\|} = \sup_x \frac{|c| \|Ax\|}{\|x\|} = |c| \|A\|.$$

■

In der Fall  $n = m$  kann man zusätzlich auch die Multiplikation von Operatoren definieren. Für jede zwei Operatoren  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , definieren wir das Produkt  $AB$  als die Verkettung von  $A$  und  $B$ , also

$$(AB)x := A(Bx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Offensichtlich  $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Behauptung.** Die Operatornorm in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist submultiplikativ, also

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (1.57)$$

**Beweis.** In der Tat ergibt Anwendung von (1.56)

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|,$$

woraus (1.57) folgt. ■

Analog definiert man die Normen in  $\mathbb{C}^n$ , den Vektorraum von linearen Operatoren  $\mathbb{C}^{m \times n}$  und die Operatornorm in  $\mathbb{C}^{m \times n}$ . Alle Eigenschaften von Normen im Fall von komplexen Räumen können mit gleichen Argument bewiesen werden, wie im Fall von reellen Räumen, oder direkt aus dem reellen Fall gewonnen werden mit Hilfe von Isomorphismus  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ .

## 2 Lineare DGLen und Systeme von DGLen

In diesem Kapitel betrachten wir ein lineares Normalsystem von DGLen, das die folgende Form hat:

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.1)$$

wobei  $A(t)$  und  $B(t)$  die gegebenen Funktionen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit Werten jeweils in  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbb{R}^n$  sind, und  $x = x(t)$  eine unbekannte Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ .

Insbesondere ist  $A(t)x$  ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$  für jedes  $t \in I$ , wie die anderen Terme in (2.1). Koordinatensweise lautet (2.1) wie folgt:

$$x'_i = \sum_{l=1}^n A_{il}(t)x_l + B_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $A_{ij}$  und  $B_i$  die Komponenten jeweils von  $A$  und  $B$  sind. Wir nehmen immer an, dass die Abbildungen  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig auf  $I$  sind, also alle Komponenten  $A_{ij}(t)$  und  $B_i(t)$  stetige Funktionen von  $t \in I$  sind.

Wir betonen, dass der Definitionsbereich von (2.1) ist  $I \times \mathbb{R}^n$ , so dass jede Lösung von (2.1) muss auf einem Teilintervall von  $I$  definiert sein.

## 2.1 Existenz von Lösungen linearer Normalsysteme

Der folgende Satz ist einer von den Hauptsätzen dieser Vorlesung.

**Satz 2.1** Sei  $A(t)$  und  $B(t)$  stetig auf  $I$ .

(a) (Existenz) Für alle  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existiert eine Lösung  $x(t)$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

die auf dem Intervall  $I$  definiert ist.

(b) (Eindeutigkeit) Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (2.2) auf einem Teilintervall  $I' \subset I$ , so gilt es  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .

Für den Beweis brauchen wir folgendes Lemma.

**Lemma 2.2** (Grönwall-Lemma) Sei  $z(t)$  eine nicht-negative stetige Funktion auf einem Intervall  $[a, b]$  und  $t_0 \in [a, b]$ . Angenommen, die folgende Ungleichung gilt für alle  $t \in [a, b]$

$$z(t) \leq C + L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|, \quad (2.3)$$

mit einigen Konstanten  $C, L \geq 0$ . Dann gilt für alle  $t \in [a, b]$  die Ungleichung

$$z(t) \leq Ce^{L|t-t_0|}. \quad (2.4)$$

**Bemerkung.** Normalerweise formuliert man Grönwall-Lemma für den Fall  $t_0 = a$ . In diesem Fall entfallen die Betragzeichen in (2.3) und (2.4), weil  $t \geq t_0$ .

**Beweis.** Es reicht die Behauptung im Fall  $C > 0$  zu beweisen, da der Fall  $C = 0$  daraus folgt. In der Tat, ist (2.3) mit  $C = 0$  erfüllt, so ist (2.3) auch mit jedem  $C > 0$  erfüllt. Es folgt, dass (2.4) mit jedem  $C > 0$  erfüllt ist, und das ergibt (2.4) mit  $C = 0$ .

Also, nehmen wir an, dass  $C > 0$  und definieren eine Funktion  $F$  auf dem Intervall  $[t_0, b]$  wie folgt

$$F(t) = C + L \int_{t_0}^t z(s) ds.$$

Bemerken wir, dass die Funktion  $F$  echt positive und differenzierbar ist, und  $F' = Lz$  gilt. Die Bedingung (2.3) ergibt für  $t \in [t_0, b]$  dass  $z \leq F$  und somit

$$F' = Lz \leq LF.$$

Diese Differentialungleichung kann gelöst werden genau so, wie trennbare DGLen. Dividieren durch  $F$  ergibt

$$\frac{F'}{F} \leq L,$$

und durch Integration über  $[t_0, t]$  erhalten wir, dass

$$\ln \frac{F(t)}{F(t_0)} = \int_{t_0}^t \frac{F'(s)}{F(s)} ds \leq \int_{t_0}^t L ds = L(t - t_0),$$

für alle  $t \in [t_0, b]$ . Daraus folgt

$$F(t) \leq F(t_0) e^{L(t-t_0)} = C e^{L(t-t_0)}.$$

Da  $z \leq F$ , erhalten wir (2.4) für alle  $t \in [t_0, b]$ .

Auf dem Intervall  $[a, t_0]$  betrachten wir analog die Funktion

$$F(t) = C + L \int_t^{t_0} z(s) ds,$$

die positive und differenzierbar ist. Da  $F' = -Lz$  und nach (2.3)  $z \leq F$ , erhalten wir die Differentialungleichung

$$F' \geq -LF,$$

die ergibt für  $t \in [a, t_0]$

$$\ln \frac{F(t_0)}{F(t)} = \int_t^{t_0} \frac{F'(s)}{F(s)} ds \geq - \int_t^{t_0} L ds = -L(t_0 - t) = -L|t - t_0|$$

und

$$z(t) \leq F(t) \leq F(t_0) e^{L|t-t_0|} = C e^{L|t-t_0|}.$$

■

**Beweis von Satz 2.1.** Wählen wir ein beschränktes geschlossenes Intervall  $[\alpha, \beta] \subset I$ , derart, dass  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . Wir beweisen die folgenden zwei Behauptungen:

1. die Eindeutigkeit der Lösung auf  $[\alpha, \beta]$ , sowie auf jedem Teilintervall  $I' \subset I$ ;
2. die Existenz einer Lösung auf  $[\alpha, \beta]$ , sowie auf dem ganzen Intervall  $I$ .

Bemerken wir, dass für jede Lösung  $x(t)$  von (2.2) auf  $[a, \beta]$  und für alle  $t \in [\alpha, \beta]$  gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t x'(s) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sei  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (2.2) auf the interval  $[a, \beta]$ , dann die beiden Funktionen erfüllen die Integralgleichung (2.5). Daraus folgt, dass

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^t A(s)(x(s) - y(s)) ds,$$

für alle  $t \in [\alpha, \beta]$ . Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Wir benutzen die Ungleichung

$$\left\| \int_{t_0}^t f(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s)\| ds \right|, \tag{2.6}$$

die für jede stetige Funktion  $f(s)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  gilt. Mit Hilfe von (2.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(x(s) - y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|(x(s) - y(s))\| ds \right| \\ &\leq a \left| \int_{t_0}^t \|(x(s) - y(s))\| ds \right|, \end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei

$$L = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} \|A(s)\|. \quad (2.8)$$

Da die Verkettung  $s \mapsto A(s) \mapsto \|A(s)\|$  stetig ist, ist die Funktion  $\|A(s)\|$  beschränkt auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$ , so dass  $L < \infty$ . Nach (2.7) gilt für die Funktion

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\|$$

die folgende Ungleichung:

$$z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|.$$

Lemma 2.2 mit  $C = 0$  ergibt  $z(t) \leq 0$  und somit  $z(t) = 0$ ,  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $[\alpha, \beta]$ .

Sei  $x(t), y(t)$  zwei Lösungen von (2.2) auf einem Intervall  $I' \subset I$ . Für jedes Intervall  $[\alpha, \beta] \subset I'$  mit  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  haben wir  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $[\alpha, \beta]$ . Da jedes Intervall als eine Vereinigung von beschränkten geschlossenen Intervallen dargestellt werden kann, gewinnen wir die Identität  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .

Jetzt beweisen wir die Existenz einer Lösung von (2.2) auf  $[\alpha, \beta]$  mit Hilfe von Annäherung durch eine Funktionenfolge  $\{x_k(t)\}_{k=0}^\infty$  auf  $[\alpha, \beta]$ . Die Näherungslösungen werden induktiv definiert wie folgt:

$$x_0(t) \equiv x_0$$

und

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-1}(s) + B(s)) ds, \quad k \geq 1. \quad (2.9)$$

Es ist klar, dass alle Funktionen  $x_k(t)$  stetig auf  $[\alpha, \beta]$  sind. Wir beweisen, dass die Folge  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  auf  $[\alpha, \beta]$  gegen eine Lösung von (2.2) konvergiert für  $k \rightarrow \infty$ . Mit Hilfe von (2.9) und

$$x_{k-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-2}(s) + B(s)) ds$$

erhalten wir, für jedes  $k \geq 2$  und  $t \in [\alpha, \beta]$ ,

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)\| ds \right|, \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei  $L$  wie früher nach (2.8) definiert ist. Bezeichnen wir

$$z_k(t) = \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|,$$

und schreiben (2.10) in der folgenden Form um:

$$z_k(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z_{k-1}(s) ds \right|. \quad (2.11)$$

Erst schätzen wir die Funktion  $z_1(t) = \|x_1(t) - x_0(t)\|$  für  $t \in [t_0, \beta]$  ab, wie folgt:

$$z_1(t) = \left\| \int_{t_0}^t (A(s)x_0 + B(s)) ds \right\| \leq M(t - t_0),$$

wobei

$$M = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} \|A(s)x_0 + B(s)\| < \infty.$$

Es folgt aus (2.11), dass für  $t \in [t_0, \beta]$

$$\begin{aligned} z_2(t) &\leq LM \int_{t_0}^t (s - t_0) ds = LM \frac{(t - t_0)^2}{2}, \\ z_3(t) &\leq L^2 M \int_{t_0}^t \frac{(s - t_0)^2}{2} ds = L^2 M \frac{(t - t_0)^3}{2 \cdot 3}, \\ &\dots \\ z_k(t) &\leq L^{k-1} M \frac{(t - t_0)^k}{k!} \leq \frac{(c(t - t_0))^k}{k!}, \end{aligned}$$

wobei  $c = \max(L, M)$ .

Mit dem gleichen Argument behandeln wir den Fall  $t \in [\alpha, t_0]$  und gewinnen die folgende Ungleichung

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{(c|t - t_0|)^k}{k!},$$

für alle  $t \in [\alpha, \beta]$ . Da die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c|t - t_0|)^k}{k!}$$

konvergiert für alle reellen  $t$ , und zwar gleichmässig auf jedem beschränkten Intervall von  $t$ , auch die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|$$

konvergiert gleichmässig auf  $[\alpha, \beta]$ . Daraus folgt, dass die Funktionenreihe mit Vektorwerten

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k(t) - x_{k-1}(t))$$

konvergiert gleichmässig auf  $[\alpha, \beta]$ .<sup>2</sup> Da die Partialsummen dieser Reihe gleich  $x_k(t) - x_0$  sind, gewinnen wir, dass die Funktionenfolge  $\{x_k(t)\}$  gleichmässig auf  $[\alpha, \beta]$  konvergiert. Bezeichnen wir

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t).$$

Die Funktion  $x(t)$  ist stetig auf  $[\alpha, \beta]$  als der Limes von einer gleichmässig konvergierten Funktionenfolge von stetigen Funktionen. Lassen wir in der Identität (2.9), also

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x_{k-1}(s) + B(s)) ds,$$

$k$  gegen unendlich streben, und erhalten, dass der Grenzwert  $x(t)$  die folgende Integralgleichung erfüllt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds. \quad (2.12)$$

---

<sup>2</sup>Wir benutzen hier den folgenden Satz aus Analysis II (eine Version von Weierstraß-Satz). Sei  $\{f_k(t)\}$  eine Funktionenfolge auf einem Intervall  $[\alpha, \beta]$  mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ . Konvergiert die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k(t)\|$$

gleichmässig auf  $[\alpha, \beta]$ , so konvergiert auch die Funktionenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t),$$

auch gleichmässig auf  $[\alpha, \beta]$ .

Wir behaupten, dass  $x(t)$  auch das Anfangswertproblem (2.2) auf  $[\alpha, \beta]$  löst. Da die rechte Seite von (2.12) eine differenzierbare Funktion von  $t$  ist, so ist  $x(t)$  auch differenzierbar, und

$$x' = \frac{d}{dt} \left( x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + B(s)) ds \right) = A(t)x(t) + B(t).$$

Schließlich, es ist klar von (2.12), dass  $x(t_0) = x_0$ . Deshalb löst  $x(t)$  das Anfangswertproblem (2.2) auf  $[\alpha, \beta]$ .

Jetzt definieren wir eine Lösung auf ganzem Intervall  $I$ . Es gibt eine wachsende Folge von beschränkten geschlossenen Intervallen  $\{[\alpha_i, \beta_i]\}_{i=1}^{\infty}$ , derart, dass ihre Vereinigung gleich  $I$  ist; wir nehmen auch an, dass  $t_0 \in [\alpha_i, \beta_i]$  für alle  $i$ . Bezeichnen mit  $x_i(t)$  eine Lösung von (2.2) auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ . Dann ist  $x_{i+1}(t)$  auch eine Lösung von (2.2) auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ , und nach Eindeutigkeit des 1. Teils gewinnen wir, dass  $x_{i+1}(t) = x_i(t)$  auf  $[\alpha_i, \beta_i]$ ; also, in der Folge  $\{x_i(t)\}$  ist jede Funktion eine Fortsetzung der vorangehenden Funktion. Daraus folgt, dass die Funktion

$$x(t) := x_i(t) \text{ für } t \in [\alpha_i, \beta_i]$$

wohl definiert für alle  $t \in I$  ist, und deshalb  $x(t)$  eine Lösung von Anfangswertproblem (2.2) auf  $I$  ist. ■

## 2.2 Skalare lineare DGLen $n$ -ter Ordnung

### 2.2.1 Existenz und Eindeutigkeit

Wir betrachten jetzt eine *skalare lineare* DGL  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t), \quad (2.13)$$

wobei  $a_k(t), b(t)$  stetige Funktionen auf einem nicht-trivialen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind. Das entsprechende Anfangsbedingung ist wie folgt:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (2.14)$$

wobei  $t_0 \in I$  und  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  gegeben sind.

**Satz 2.3** Sei alle Funktionen  $a_k(t), b(t)$  in (2.13) stetig auf  $I$ .

(a) (Existenz) Für jedes  $t_0 \in I$  und für jeden Vektor  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  existiert eine Lösung  $x(t)$  des AWP (2.13)-(2.14), die auf  $I$  definiert ist.

(b) (Eindeutigkeit) Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen des AWP (2.13)-(2.14) auf einem Teilintervall  $I' \subset I$ , so gilt es  $x(t) \equiv y(t)$  auf  $I'$ .

**Beweis.** Bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}(t)$  (Fettdruck  $\mathbf{x}$ ) die Vektorfunktion

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T, \quad (2.15)$$

deren Werte immer als Spaltenvektoren betrachtet werden. Als wir es schon gesehen haben, ist die DGL (2.13) äquivalent zum Normalsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}'_2 &= \mathbf{x}_3 \\ &\dots \\ \mathbf{x}'_{n-1} &= \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}'_n &= -a_1\mathbf{x}_n - a_2\mathbf{x}_{n-1} - \dots - a_n\mathbf{x}_1 + b, \end{aligned}$$

das auch in der Vektorform dargestellt werden kann:

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + B(t), \quad (2.16)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Das Anfangswertproblem (2.13)-(2.14) ist offensichtlich äquivalent zum

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

wobei  $\mathbf{x}_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Anwendung des Satzes 2.1 zum Normalsystem (2.18) ergibt die Behauptungen (a) und (b). ■

## 2.2.2 Der Raum von Lösungen homogener DGLen

Wir betrachten jetzt eine *homogene* DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0, \quad (2.19)$$

wobei  $a_j(t)$  sind wie zuvor. Sei  $L$  die Menge von allen Lösungen von (2.19) auf  $I$ .

Offensichtlich, falls  $x, y \in L$ , dann auch die Summe  $x + y$  ist ein Element von  $L$ , sowie  $cx \in L$  für jede Konstante  $c$ . Das bedeutet, dass  $L$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist. Das Nullelement von  $L$  ist die konstante Funktion 0.

**Satz 2.4**  $\dim L = n$ . Somit ist die allgemeine Lösung von (2.19) durch die folgende Identität gegeben

$$x(t) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t), \quad (2.20)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.19) sind und  $C_1, \dots, C_n$  beliebige Konstanten.

**Beweis.** Wählen wir eine Stelle  $t_0 \in I$  und bemerken, dass die Lösung  $x \in L$  durch die Werte

$$x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x'(t_0), \quad \dots, \quad x_{n-1} = x^{(n-1)}(t_0)$$

eindeutig definiert ist, nach Satz 2.3. D.h., die Abbildung

$$x(t) \in L \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

ist bijektiv und offensichtlich linear. Daraus folgt, dass  $L$  und  $\mathbb{R}^n$  linear isomorph sind, und deshalb  $\dim L = n$ .

Seien  $x_1, \dots, x_n$  unabhängige Lösungen. Da die Anzahl von diesen Lösungen genau  $\dim L$  ist, stellt die Folge  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis in  $L$  dar. Daraus folgt, dass alle Elementen von  $L$  die Form (2.20) haben. ■

**Bemerkung.** Sofern haben wir angenommen, dass alle gegebenen und gesuchten Funktionen reellwertig sind. Das Gleiche gilt für komplexwertige Funktionen. Nämlich, die Sätze 2.1, 2.3, 2.4 gelten für komplexwertige Koeffizienten und Lösungen, mit gleichen Beweisen. Wenn die Koeffizienten  $a_j(t)$  in (2.19) komplex sind, betrachtet man die Menge  $L$  von allen komplexen Lösungen als ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , und  $\dim L = n$  gilt auch in diesem Fall.

### 2.2.3 Lösungsmethoden für homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

Jetzt betrachten wir die lineare DGL

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (2.21)$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$ , die reell ode komplex sind. Wir zeigen hier, wie man  $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.21) bestimmen kann, die danach die allgemeine Lösung liefern.

Allgemein bestimmen wir erst die komplexwertigen Lösungen von (2.21) und danach extrahieren die reellwertigen Lösungen, falls die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  reell sind. Die Hauptidee ist sehr einfach. Wir benutzen folgenden Ansatz zur Lösung:  $x(t) = e^{\lambda t}$  wobei  $\lambda$  eine komplexe Konstante ist, die bestimmt werden muss. Einsetzen dieser Funktion in (2.21) und Anwendung der Identität  $x^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$  ergibt die folgende Gleichung für  $\lambda$ :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (2.22)$$

wobei alle Terme  $e^{\lambda t}$  wegfallen. Die Gleichung (2.22) hängt nicht mehr von  $t$  ab, und nur die Unbekannte  $\lambda$  bleibt. Die Gleichung (2.22) heißt *charakteristische Gleichung* von (2.21), und das Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

heißt *charakteristisches Polynom* von (2.21). Also, wir haben die folgende Behauptung bewiesen.

**Behauptung.** Die Funktion  $x(t) = e^{\lambda t}$  stellt eine Lösung von (2.21) genau dann dar, wenn  $\lambda$  ist eine Nullstelle von dem charakteristischen Polynom.

Besitzt das charakteristische Polynom genügend Nullstellen, so bestimmt man die allgemeine Lösung von (2.21) wie folgt.

**Satz 2.5** Hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  (2.21)  $n$  verschiedene komplexe Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so stellen die folgenden  $n$  Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \quad (2.23)$$

linear unabhängige, komplexwertige Lösungen von (2.21) dar. Somit ist die allgemeine komplexe Lösung von (2.21) durch die Identität

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (2.24)$$

gegeben, wobei  $C_j$  beliebige komplexe Konstanten sind.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle von  $P$ , so ist die konjugiert komplexe Zahl  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  auch eine Nullstelle von  $P$ , und die Funktionen  $e^{\lambda t}$ ,  $e^{\bar{\lambda} t}$  in der Folge (2.23) können durch die reellwertigen Funktionen  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  ersetzt werden. Nach Ersetzung von allen Paaren  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$  mit nicht-reellen Nullstellen  $\lambda$  erhält man  $n$  reellwertige, linear unabhängige Lösungen von (2.21). Somit wird die allgemeine reelle Lösung von (2.21) durch die Linearkombination dieser Lösungen mit reellen Koeffizienten dargestellt.

Wir beweisen diesen Satz später.

**Bemerkung.** Die Nullstellen von einem quadratischen Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$  können immer mit Hilfe der Formel

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

bestimmt werden. Polynome höheren Grades versucht man in ein Produkt von Polynomen 1er und 2er Grades zerlegen und somit alle Nullstellen zu bestimmen.

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist  $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ , und dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$ . Deshalb sind die unabhängigen Lösungen  $x_1(t) = e^t$  und  $x_2(t) = e^{2t}$ , und die allgemeine Lösung ist  $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$ . Nämlich, für reelle Konstanten  $C_1, C_2$  erhalten wir die allgemeine reelle Lösung, und für komplexe  $C_1, C_2$  – die komplexe Lösung.

**Beispiel.** Die DGL  $x'' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$ . Damit erhalten wir zwei komplexwertige unabhängige Lösungen  $e^{it}$  und  $e^{-it}$ . Die allgemeine komplexwertige Lösung ist deshalb  $C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$ . Da  $\lambda = 0 + 1i$ , erhalten wir nach Satz 2.5 zwei unabhängige reellwertige Lösungen  $\cos t$  und  $\sin t$ , und die reellwertige allgemeine Lösung ist  $C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Alternativ kann man diese Lösungen als Linearkombinationen von  $e^{it}$  und  $e^{-it}$  erhalten:

$$\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t \quad \text{und} \quad \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t,$$

und das entspricht einem Basiswechsel im Vektorraum der Lösungen.

**Beispiel.** Die DGL  $x''' - x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1),$$

dessen Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Nach Satz 2.5 erhalten wir drei linear unabhängige reellwertige Lösungen

$$e^t, \quad e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

und damit die allgemeine reellwertige Lösung

$$C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall, wenn das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  weniger als  $n$  verschiedene Nullstellen besitzt. In diesem Fall ist Satz 2.5 nicht verwendbar. Nach Fundamentalsatz der Algebra, hat jedes Polynom  $P(\lambda)$  vom Grad  $n$  mit komplexen Koeffizienten genau  $n$  komplexe Nullstellen, wenn sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden. Für jedes  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  definiert man die Vielfachheit  $m$  von  $\lambda_0$  bezüglich  $P(\lambda)$  als der maximale Wert ganzer Zahl  $m$ , derart, dass  $P(\lambda)$  durch  $(\lambda - \lambda_0)^m$  teilbar ist. Letzteres bedeutet, dass es ein Polynom  $Q(\lambda)$  gibt, derart, dass die folgende Identität gilt:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Es ist klar, dass immer  $m \geq 0$  und  $m \geq 1$  genau dann, wenn  $\lambda_0$  eine Nullstelle von  $P$  ist. Dass  $m$  maximal ist bedeutet, dass  $\lambda_0$  keine Nullstelle von  $Q$  ist.

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alle verschiedene komplexwertige Nullstellen von  $P(\lambda)$ ; sei  $m_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$ . Nach Fundamentalsatz der Algebra gilt

$$m_1 + \dots + m_r = n.$$

Daraus folgt, dass sich charakteristisches Polynom  $P(\lambda)$  in ein Product

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

zerlegen lässt.

Um  $n$  unabhängige Lösungen der DGL (2.21) erhalten zu können, muss jede Nullstelle  $\lambda_j$  genau  $m_j$  unabhängige Lösungen ergeben. Der folgende Satz zeigt, wie genau erhält man diese Lösungen.

**Satz 2.6** *Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  alle verschiedene komplexwertige Nullstellen von charakteristischen Polynom  $P(\lambda)$ , und sei  $m_j$  die Vielfachheit von  $\lambda_j$ . Dann stellen die folgenden  $n$  Funktionen linear unabhängige Lösungen von (2.21) dar:*

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 0, \dots, m_j - 1 \quad (2.25)$$

(also jede Nullstelle  $\lambda_j$  liefert  $m_j$  Lösungen  $e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \dots, t^{m_j-1} e^{\lambda_j t}$ ). Somit ist die allgemeine Lösung von (2.21) wie folgt

$$x(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{kj} t^k e^{\lambda_j t}, \quad (2.26)$$

wobei  $C_{kj}$  beliebige komplexe Konstanten sind.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle von  $P(\lambda)$  mit der Vielfachheit  $m$ , so ist auch  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  eine Nullstelle mit gleicher Vielfachheit  $m$ , und die Funktionen  $t^k e^{\lambda t}, t^k e^{\bar{\lambda} t}$  in der Folge (2.25) können durch die reellwertigen Funktionen  $t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$  ersetzt werden, für jedes  $k = 0, \dots, m - 1$ . Mit Hilfe von dieser Methode erhält man  $n$  unabhängige reellwertige Lösungen von (2.21).

Wir beweisen diesen Satz später.

**Bemerkung.** Bezeichnen wir

$$P_j(t) = \sum_{k=1}^{m_j-1} C_{jk} t^k,$$

und erhalten aus (2.26)

$$x(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t}. \quad (2.27)$$

D.h., die allgemeine Lösung von (2.21) kann durch die Identität (2.27) gegeben werden, wobei  $P_j(t)$  ein beliebiges Polynom vom Grad  $\leq m_j - 1$  ist.

**Beispiel.** Die DGL  $x'' - 2x' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

dass nur eine Nullstelle  $\lambda = 1$  hat, mit der Vielfachheit  $m = 2$ . Nach Satz 2.6 stellen die Funktionen  $e^t$  und  $te^t$  zwei unabhängige Lösungen dar, und die allgemeine Lösung ist durch die Identität

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t$$

gegeben.

**Beispiel.** Die DGL  $x^V + x^{IV} - 2x''' - 2x'' + x' + x = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^3.$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_1 = 1$  mit Vielfachheit  $m_1 = 2$  und  $\lambda_2 = -1$  mit  $m_2 = 3$ . Nach Satz 2.6 erhalten wir 5 unabhängige Lösungen

$$e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}, t^2 e^{-t},$$

und die allgemeine Lösung

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t + (C_3 + C_4 t + C_5 t^2) e^{-t}.$$

**Beispiel.** Die DGL  $x^V + 2x''' + x' = 0$  hat das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)^2 = \lambda(\lambda + i)^2(\lambda - i)^2.$$

Die Nullstellen sind  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = i$  und  $\lambda_3 = -i$ , und die Vielfachheiten sind  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = m_3 = 2$ . Die unabhängigen Lösungen sind

$$1, e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}, \quad (2.28)$$

und die allgemeine komplexe Lösung ist

$$x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) e^{it} + (C_4 + C_5 t) e^{-it}.$$

Ersetzen in der Folge (2.28) die Funktionen  $e^{it}, e^{-it}$  durch  $\cos t, \sin t$  und die Funktionen  $te^{it}, te^{-it}$  durch  $t \cos t, t \sin t$  ergibt die folgenden unabhängigen reellen Lösungen:

$$1, \cos t, t \cos t, \sin t, t \sin t.$$

Dann ist die allgemeine reelle Lösung wie folgt:

$$x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) \cos t + (C_4 + C_5 t) \sin t.$$

### 2.2.4 Beweise von Sätze 2.5 und 2.6

**Beweis von Satz 2.5.** Da wir schon wissen, dass jede Funktion  $e^{\lambda_k t}$  eine Lösung von (2.21) darstellt, es reicht zu beweisen, dass die Funktionen  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  linear unabhängig sind. Das Faktum, dass die allgemeine Lösung durch (2.24) gegeben ist, folgt dann aus Satz 2.4.

Wir beweisen durch Induktion nach  $n$ , dass die Funktionen  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  linear unabhängig sind, wenn  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  verschiedene komplexe Zahlen sind.

Der Induktionsanfang für  $n = 1$  ist trivial, weil die Exponentialfunktion nicht identisch 0 ist.

Der Induktionsschritt von  $n - 1$  zu  $n$ . Angenommen, dass die Identität

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = 0 \quad (2.29)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt, beweisen wir dass  $C_1 = \dots = C_n = 0$ . Dividieren (2.29) durch  $e^{\lambda_n t}$  und bezeichnen  $\lambda_j - \lambda_n =: \mu_j$  ergibt

$$C_1 e^{\mu_1 t} + \dots + C_{n-1} e^{\mu_{n-1} t} + C_n = 0.$$

Durch Ableitung nach  $t$  erhalten wir

$$C_1 \mu_1 e^{\mu_1 t} + \dots + C_{n-1} \mu_{n-1} e^{\mu_{n-1} t} = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung beschließen wir dass  $C_j \mu_j = 0$  und somit  $C_j = 0$ , da  $\mu_j \neq 0$ . Das gilt für alle  $j = 1, \dots, n - 1$ , und einsetzen in (2.29) ergibt auch  $C_n = 0$ .

Jetzt betrachten wir den Fall wenn  $a_1, \dots, a_n$  reell sind. Da die Komplexkonjugation mit Addition und Multiplikation vertauschbar ist, es gilt die Identität

$$\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda}), \quad (2.30)$$

wobei die Voraussetzung  $\bar{a}_k = a_k$  benutzt wird. Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$ , es folgt aus (2.30), dass auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle von  $P$  ist. Deshalb enthält die Folge (2.23) die beiden Funktionen  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$ . Nach Eulerformel haben wir

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \quad \text{und} \quad e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \quad (2.31)$$

so dass  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$  sind Linearkombinationen von  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  und  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ . Umgekehrt, es gilt auch

$$e^{\alpha t} \cos \beta t = \frac{1}{2} (e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}) \quad \text{und} \quad e^{\alpha t} \sin \beta t = \frac{1}{2i} (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}), \quad (2.32)$$

so dass  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  und  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  sind Linearkombinationen von  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$ . Die Ersetzung von den Funktionen  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$  in (2.23) durch  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  und  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  entspricht einem Basiswechsel im Vektorraum  $L$  von Lösungen. Nachdem alle Paaren  $e^{\lambda t}$  und  $e^{\bar{\lambda} t}$  in (2.23) durch die reellwertigen Funktionen ersetzt worden sind, erhält man eine Basis in  $L$  von reellwertigen Lösungen. ■

Für den Beweis von Satz 2.6 machen wir erst eine Vorbereitung. Jedem Polynom

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

mit komplexen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  entspricht ein Differentialoperator

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right) &= a_0\left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \dots + a_n \\ &= a_0\frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n, \end{aligned}$$

wobei die Potenz  $\left(\frac{d}{dt}\right)^k$  die  $k$ -fache Selbstverkettung von der Ableitung bedeutet. D.h. auf jede  $n$ -fach differenzierbare Funktion  $x(t)$  wirkt die Operator  $P\left(\frac{d}{dt}\right)$  nach der Regel

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) f = a_0 f^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x.$$

Deshalb kann die DGL

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0 \quad (2.33)$$

kurz in der Form

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) x = 0$$

geschrieben werden, wobei  $P(\lambda)$  das charakteristische Polynom von (2.33) ist.

**Behauptung.** Für jedes Polynom gilt die Identität

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t}. \quad (2.34)$$

**Beweis.** Es reicht diese Identität für das einfachste Polynom  $P(\lambda) = \lambda^k$  zu beweisen; dann gilt (2.34) für alle Polynomen nach der Linearität von den beiden Seiten. Für  $P(\lambda) = \lambda^k$  haben wir

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} = \frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t},$$

was zu beweisen war. ■

Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$ , so ergibt (2.34), dass  $e^{\lambda t}$  eine Lösung von (2.21) ist, wie wir es schon wissen.

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung der Identität (2.34).

**Lemma 2.7** Seien  $f(t), g(t)$   $n$ -fach differenzierbare Funktionen auf einem Intervall  $I$ . Dann gilt für jedes Polynom  $P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$  von Grad  $\leq n$  die folgende Identität:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) (fg) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) g. \quad (2.35)$$

In der Tat kann man die Summe auf alle  $j \geq 0$  erweitern, da für  $j > n$  die Ableitung  $P^{(j)}$  identisch 0 ist.

**Beispiel.** Für das Polynom  $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$  haben wir  $P'(\lambda) = 2\lambda + 1$ ,  $P'' = 2$ , und (2.35) ergibt

$$\begin{aligned} (fg)'' + (fg)' + fg &= fP\left(\frac{d}{dt}\right)g + f'P'\left(\frac{d}{dt}\right)g + \frac{1}{2}f''P''\left(\frac{d}{dt}\right)g \\ &= f(g'' + g' + g) + f'(2g' + g) + f''g. \end{aligned}$$

Es ist einfach diese Identität direkt mit Hilfe von der Produktregel zu beweisen.

**Beispiel.** Im Fall  $f(t) = e^{\lambda t}$  und  $g(t) \equiv 1$  erhalten wir aus (2.35)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (e^{\lambda t})^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) 1 \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \lambda^j e^{\lambda t} P^{(j)}(0) = P(\lambda) e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

was beweist noch einmal (2.34).

**Beweis.** Da die beiden Seiten von (2.35) linear in  $P$  sind, ist es genügend die Identität (2.35) für dem Fall  $P(\lambda) = \lambda^k$ ,  $k \leq n$  zu beweisen. In diesem Fall haben wir

$$P^{(j)} = k(k-1) \dots (k-j+1) \lambda^{k-j}$$

für  $j \leq k$ , und  $P^{(j)} \equiv 0$  für  $j > k$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) &= k(k-1) \dots (k-j+1) \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-j}, \quad j \leq k, \\ P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) &= 0, \quad j > k, \end{aligned}$$

und die Identität (2.35) wird

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \frac{k(k-1) \dots (k-j+1)}{j!} f^{(j)} g^{(k-j)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}, \quad (2.36)$$

wobei  $\binom{k}{j}$  Binomialkoeffizienten sind. Diese Identität ist von Analysis bekannt und wird *Leibnizformel* (*Leibnizsche Regel*) genannt. Für  $k = 1$  führt (2.36) zurück auf Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Für  $k > 1$  beweist man (2.36) durch Induktion nach  $k$ . ■

**Lemma 2.8** *Eine komplexe Zahl  $\lambda$  ist eine Nullstelle mit Vielfachheit  $m$  eines Polynoms  $P$  genau dann, wenn*

$$P^{(k)}(\lambda) = 0 \text{ für alle } k = 0, \dots, m-1 \text{ und } P^{(m)}(\lambda) \neq 0. \quad (2.37)$$

*D.h.  $m$  ist die kleinste positive ganze Zahl derart, dass  $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$ .*

**Beweis.** Ist  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $m$ , so gilt die Identität

$$P(z) = (z - \lambda)^m Q(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

wobei  $Q$  ein Polynom ist, so dass  $Q(\lambda) \neq 0$ . Für jede natürliche Zahl  $k$  we haben nach Leibnizformel

$$P^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} ((z - \lambda)^m)^{(j)} Q^{(k-j)}(z)$$

(jetzt lassen wir  $z$  in  $\mathbb{R}$  verändern). Im Fall  $k < m$  gilt immer  $j < m$  und somit

$$((z - \lambda)^m)^{(j)} = \text{const} (z - \lambda)^{m-j},$$

und diese Funktion verschwindet an  $z = \lambda$ . Deshalb für  $k < m$  haben wir  $P^{(k)}(\lambda) = 0$ .

Im Fall  $k = m$  erhalten wir noch mal, dass alle Ableitungen  $((z - \lambda)^m)^{(j)}$  verschwinden an  $z = \lambda$  für  $j < k$ , während für  $j = k$  erhalten wir

$$((z - \lambda)^m)^{(k)} = ((z - \lambda)^m)^{(m)} = m! \neq 0$$

und somit

$$P^{(m)}(\lambda) = ((z - \lambda)^m)^{(m)} Q(\lambda) \neq 0.$$

Damit ist (2.37) bewiesen.

Umgekehrt, gilt (2.37), so ergibt die Taylorformel für Polynomen

$$\begin{aligned} P(z) &= P(\lambda) + \frac{P'(\lambda)}{1!} (z - \lambda) + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^n \\ &= \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} (z - \lambda)^m + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^n \\ &= (z - \lambda)^m Q(z) \end{aligned}$$

wobei

$$Q(z) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} + \frac{P^{(m+1)}(\lambda)}{(m+1)!} (z - \lambda) + \dots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!} (z - \lambda)^{n-m}.$$

Offensichtlich  $Q(\lambda) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!} \neq 0$ , woraus folgt, dass  $\lambda$  eine Nullstelle von Vielfachheit  $m$  ist. ■

**Lemma 2.9** Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  verschiedene komplexe Zahlen, wobei  $r \geq 1$ . Gilt für Polynomen  $P_j(t)$  über  $\mathbb{C}$  die Identität

$$\sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t} = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (2.38)$$

dann sind alle Polynomen  $P_j(t)$  identisch Null.

**Beweis.** Wir benutzen die Induktion nach  $r$ . Der Induktionsanfang  $r = 1$  ist trivial. Den Induktionsschritt von  $r - 1$  zu  $r$  führen wir wie im Beweis von Satz 2.5 durch. Dividieren (2.38) durch  $e^{\lambda_r t}$  und bezeichnen  $\lambda_j - \lambda_r =: \mu_j$  ergibt

$$\sum_{j=1}^{r-1} P_j(t) e^{\mu_j t} + P_r(t) = 0. \quad (2.39)$$

Wählen wir eine ganze Zahl  $k > \deg P_r$ , wobei  $\deg P$  der Grad von  $P$  ist. Die  $k$ -fache Ableitung von (2.39) ergibt

$$\sum_{j=1}^{r-1} (P_j(t) e^{\mu_j t})^{(k)} = 0. \quad (2.40)$$

Wir müssen daraus gewinnen, dass alle  $P_j$  Nullpolynom sind. Sei  $P(t)$  ein Polynom, aber kein Nullpolynom. Dann der Grad von  $P$  ist nicht-negative ganze Zahl<sup>3</sup>  $m$ , und es gilt

$$P(t) = c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m, \quad (2.41)$$

wobei  $c_j$  die komplexen Koeffizienten sind und  $c_0 \neq 0$ .

**Behauptung.** Seien  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $P$  ein Polynom von Grad  $m \geq 0$ . Dann gilt für alle  $k = 0, 1, \dots$

$$(P(t) e^{\mu t})^{(k)} = Q(t) e^{\mu t} \quad (2.42)$$

wobei  $Q$  auch ein Polynom von Grad  $m$  ist.

Wir haben

$$(t^m e^{\mu t})' = \mu t^m e^{\mu t} + m t^{m-1} t^{\mu t},$$

und gilt somit für das Polynom (2.41)

$$\begin{aligned} (P(t) e^{\mu t})' &= ((c_0 \mu) t^m + \tilde{c}_1 t^{m-1} + \dots + \tilde{c}_m) e^{\mu t} \\ &= Q(t) e^{\mu t}, \end{aligned}$$

wobei  $Q(t) = (c_0 \mu) t^m + \dots$  auch ein Polynom von Grad  $m$  ist, da  $c_0 \mu \neq 0$ . Die Identität (2.42) für jedes  $k$  folgt dann durch Induktion nach  $k$ .

In der Identität (2.40) können wir auf alle Nullpolynomen  $P_j$  verzichten und somit voraussetzen, dass  $P_j$  kein Nullpolynom für jedes  $j = 1, \dots, r-1$  ist. Nach der Behauptung haben wir

$$(P_j(t) e^{\mu_j t})^{(k)} = Q_j(t) e^{\mu_j t}$$

wobei  $Q_j$  auch kein Nullpolynom ist. Andererseits haben wir nach (2.40)

$$\sum_{j=1}^{r-1} Q_j(t) e^{\mu_j t} = 0.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung beschließen wir, dass  $Q_j \equiv 0$ . Dieser Widerspruch beweist, dass  $P_j \equiv 0$  für alle  $j = 1, \dots, r-1$ . Einsetzen in (2.39) ergibt auch  $P_r \equiv 0$ . ■

**Beweis von Satz 2.6.** Seien  $P$  das charakteristische Polynom von (2.33) und  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  von Vielfachheit  $m$ . Wir beweisen erst, dass die Funktion  $x(t) = t^k e^{\lambda t}$  die DGL (2.33) für jedes  $k = 0, \dots, m-1$  löst, also

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) = 0.$$

Nach Lemma 2.7 und (2.34) haben wir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (t^k)^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\lambda t} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} (t^k)^{(j)} P^{(j)}(\lambda) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Nach Definition ist der Grad von Nullpolynom  $-\infty$ .

Falls  $j > k$  dann  $(t^k)^{(j)} \equiv 0$ . Falls  $j \leq k$  dann  $j < m$  und somit nach Voraussetzung  $P^{(j)}(\lambda) = 0$ . Deshalb verschwinden alle Terme in der obigen Summe, was ergibt

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^k e^{\lambda t}) = 0,$$

also die Funktion  $x(t) = t^k e^{\lambda t}$  löst (2.33).

Jetzt zeigen wir, dass die  $n$  Funktionen in der Folge

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 0, \dots, m_j - 1, \quad (2.43)$$

linear unabhängig sind. Betrachten wir eine Linearkombination von diesen Funktionen, die dargestellt werden kann wie folgt:

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{jk} t^k e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^r P_j(t) e^{\lambda_j t} \quad (2.44)$$

wobei  $P_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1} C_{jk} t^k$  Polynomen sind. Nach Lemma 2.9 kann die Linearkombination (2.44) nur dann identisch Null sein, wenn  $P_j \equiv 0$ , woraus folgt dass alle  $C_{jk} = 0$  und somit die Funktionen (2.43) linear unabhängig sind.

Seien  $a_1, \dots, a_n$  reell. Sei  $\lambda = \alpha + i\beta$  eine nicht-reelle Nullstelle der Vielfachheit  $m$ . Nach Lemma 2.8 erfüllt  $\lambda$  die Gleichungen (2.37). Konjugieren diese Gleichungen ergibt die ähnlichen Gleichungen für  $\bar{\lambda}$ , da  $\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda})$  (vgl. (2.30)). Daraus folgt, dass  $\bar{\lambda}$  auch eine Nullstelle der Vielfachheit  $m$  ist.

Die letzte Behauptung, dass jedes Paar

$$t^k e^{\lambda t}, \quad t^k e^{\bar{\lambda} t}$$

in (2.43) durch das Paar

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$$

ersetzt werden kann, folgt aus der Beobachtung, dass diese Paare auseinander durch Lineartransformationen entstehen, wie im Beweis von Satz 2.5. ■

## 2.2.5 Lösungsmethoden für inhomogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

Betrachten wir noch einmal eine lineare DGL  $n$ -te Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (2.45)$$

wobei  $a_k(t)$  und  $f(t)$  gegebene stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Wir nehmen immer an, dass die Lösungen  $x(t)$  auch auf  $I$  definiert sind. Die Funktion  $f$  auf der rechten Seite heißt *Störfunktion*. Ist die Störfunktion nicht identisch 0, so nennt man die DGL (2.45) *inhomogen*.

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}(t)$  den Differentialoperator auf der rechten Seite von (2.45), also

$$\mathcal{A}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_1(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{d}{dt} + a_n(t),$$

so dass die Differentialgleichung (2.45) kann kurz in der Form  $\mathcal{A}(t)x = f(t)$  geschrieben werden. Wir betonen, dass  $\mathcal{A}(t)$  ein *linear* Operator ist, der auf  $n$ -fach differenzierbare Funktionen wirkt.

Im folgenden Lemma versammeln wir die Eigenschaften der Lösungen, die von der Linearität von  $\mathcal{A}(t)$  abhängen.

**Lemma 2.10** (a) Seien  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen von (2.45) mit Störfunktionen  $f_1$  bzw  $f_2$  und seien  $c_1, c_2$  zwei Konstanten. Dann ist die Funktion  $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  eine Lösung von (2.45) mit der Störfunktion  $f = c_1f_1 + c_2f_2$ .

(b) Seien  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung der DGL (2.45) und  $x_h(t)$  eine allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0. \quad (2.46)$$

Dann ist die allgemeine Lösung von (2.45) durch

$$x(t) = x_0(t) + x_h(t) \quad (2.47)$$

gegeben.

(c) Seien  $x_1(t), \dots, x_n(t)$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.46), dann ist die allgemeine Lösung von (2.45) durch die Identität

$$x(t) = x_0(t) + C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t) \quad (2.48)$$

gegeben.

**Beweis.** (a) Offensichtlich, die Addition der beiden Gleichungen

$$\mathcal{A}(t)x_1 = f_1, \quad \mathcal{A}(t)x_2 = f_2$$

multipliziert mit  $c_1$  bzw  $c_2$  ergibt

$$\mathcal{A}(t)x = \mathcal{A}(t)(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1f_1 + c_2f_2 = f.$$

(b) Für jede  $n$ -fach differenzierbare Funktion  $x(t)$  betrachten wir auch die Funktion  $y = x - x_0$ . Dann ist die DGL (2.45) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t)(y + x_0) &= f(t) \\ \mathcal{A}(t)y + \mathcal{A}(t)x_0 &= f(t) \\ \mathcal{A}(t)y &= 0. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $x$  eine Lösung von (2.45) genau dann, wenn  $y = x - x_0$  eine Lösung von (2.46) ist. Somit erhalten wir  $x - x_0 = x_h$  und  $x = x_0 + x_h$ .

(c) Da die allgemeine Lösung von (2.46) durch die Linearkombination

$$x_h = C_1x_1 + \dots + C_nx_n$$

gegeben ist, folgt (2.48) aus (2.47). ■

Teil (b) von Lemma 2.10 bedeutet folgendes: um die allgemeine Lösung von inhomogenen DGL (2.45) zu bestimmen, es reicht eine spezielle Lösung von (2.45) zu ermitteln und diese Lösung zur allgemeinen Lösung der homogenen DGL (2.46) zu addieren.

Wir benutzen diese Methode für die linearen inhomogenen DGLen mit *konstanten* Koeffizienten:

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_nx = f(t), \quad (2.49)$$

da wir schon wissen, wie die entsprechende homogene DGL gelöst werden kann. In diesem Paragraph entwickeln wir eine Methode für Ermittlung einer speziellen Lösung von (2.49) für eine bestimmte Klasse von Störfunktionen  $f$ .

**Definition.** Eine Funktion  $f(t)$  auf  $\mathbb{R}$  heißt *Quasipolynom* wenn

$$f(t) = \sum_j R_j(t) e^{\mu_j t},$$

wobei  $R_j(t)$  Polynomen sind,  $\mu_j$  komplexe Konstanten, und die Summe endlich ist.

Offensichtlich, die Summe und das Produkt von zwei Quasipolynomen ist auch ein Quasipolynom. Insbesondere sind die folgenden Funktionen Quasipolynomen:

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{und} \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$$

(wobei  $k$  nicht-negative ganze Zahl ist und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), weil die Funktionen

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \quad \text{und} \quad \sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}$$

Quasipolynomen sind.

Unter Gegenstand ist die DGL (2.49) zu lösen, wenn die Störfunktion ein Quasipolynom ist. Nach Lemma 2.10, es reicht eine spezielle Lösung von (2.49) für die Störfunktion der Form  $f(t) = R(t) e^{\mu t}$  ermitteln zu können. Erst erklären wir die Hauptidee der Methode für den Fall  $f(t) = e^{\mu t}$ . Sei  $P(\lambda)$  das charakteristische Polynom von (2.49), also

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

In diesem Fall haben wir  $\mathcal{A}(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)$  und schreiben die DGL (2.49) kurz in der Form

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = e^{\mu t}. \quad (2.50)$$

Zunächst nehmen wir an, dass  $\mu$  keine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist (*nicht-resonanter Fall*). Wir benutzen folgenden Ansatz zur Lösung:  $x(t) = ae^{\mu t}$  wobei  $a$  eine gesuchte komplexe Konstante ist. Einsetzen in (2.34) ergibt nach (2.34)

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(ae^{\mu t}) = aP(\mu)e^{\mu t},$$

woraus die folgende Behauptung folgt.

**Lemma 2.11** *Ist  $\mu$  keine Nullstelle von  $P$ , hat die DGL (2.50) die spezielle Lösung  $x_0(t) = ae^{\mu t}$  mit*

$$a = \frac{1}{P(\mu)}. \quad (2.51)$$

**Beispiel.** Bestimmen wir eine spezielle Lösung der DGL

$$x'' + 2x' + x = e^t.$$

Wir haben  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  und bemerken, dass  $\mu = 1$  keine Nullstelle von  $P$  ist. Einsetzen des Ansatz  $x(t) = ae^t$  in die DGL ergibt

$$ae^t + 2ae^t + ae^t = e^t,$$

woraus folgt

$$4a = 1 \text{ und } a = \frac{1}{4}.$$

Alternativ erhalten wir den gleichen Wert von  $a$  nach (2.51):

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{1 + 2 + 1} = \frac{1}{4}.$$

Deshalb ist die Antwort  $x(t) = \frac{1}{4}e^t$ .

**Beispiel.** Betrachten wir noch eine DGL:

$$x'' + 2x' + x = \sin t. \quad (2.52)$$

Die Sinusfunktion  $\sin t$  ist der Imaginärteil von  $e^{it}$ , und deshalb bestimmen wir erst eine spezielle Lösung von der DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{it}, \quad (2.53)$$

und danach nehmen den Imaginärteil der Lösung. Für den Ansatz  $x(t) = ae^{it}$  erhalten wir nach (2.51)

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{i^2 + 2i + 1} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Somit ist eine spezielle Lösung von (2.53)

$$x(t) = -\frac{i}{2}e^{it} = -\frac{i}{2}(\cos t + i \sin t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{i}{2} \cos t,$$

und der Imaginärteil  $x(t) = -\frac{1}{2} \cos t$  ist eine spezielle Lösung von (2.52).

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t} \cos t \quad (2.54)$$

und bemerken, dass die Störfunktion  $e^{-t} \cos t$  der Realteil von  $e^{\mu t}$  mit  $\mu = -1 + i$  ist. Deshalb lösen wir zunächst

$$x'' + 2x' + x = e^{\mu t}. \quad (2.55)$$

Für den Ansatz  $x(t) = ae^{\mu t}$  erhalten wir

$$a = \frac{1}{P(\mu)} = \frac{1}{(-1+i)^2 + 2(-1+i) + 1} = -1.$$

Deshalb hat (2.55) die spezielle Lösung  $x(t) = -e^{(-1+i)t} = -e^{-t} \cos t - ie^{-t} \sin t$ , und (2.54) hat die Lösung  $x(t) = -e^{-t} \cos t$ .

**Beispiel.** Jetzt fügen wir drei obige Beispiele zusammen:

$$x'' + 2x' + x = 4e^t - 2 \sin t + e^{-t} \cos t, \quad (2.56)$$

wobei die Störfunktion eine Linearkombination von den obigen Störfunktionen ist. Nach Lemma 2.10 erhalten wir eine spezielle Lösung von (2.56) als die gleiche Linearkombination von den obigen speziellen Lösungen:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 4 \left( \frac{1}{4} e^t \right) - 2 \left( -\frac{1}{2} \cos t \right) + (-e^{-t} \cos t) \\ &= e^t + \cos t - e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

Da die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x'' + 2x' + x = 0$  ist

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t},$$

erhalten wir nach Lemma 2.10 die allgemeine Lösung von (2.56)

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + e^t + \cos t - e^{-t} \cos t.$$

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t}.$$

Jetzt ist der Wert  $\mu = -1$  eine Nullstelle von  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  und die Methode von Lemma 2.10 funktioniert nicht. In der Tat löst der Ansatz  $x = ae^{-t}$  in diesem Fall die homogene DGL, und für inhomogene DGL muss man einen anderen Ansatz finden.

Der Fall wenn  $\mu$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist, heißt *resonanter Fall*. Der folgende Satz liefert die generelle Lösungsmethode von (2.49) für beliebige Quasipolynomen  $f(t)$ .

**Satz 2.12** Seien  $R(t)$  ein nicht-Null Polynom von Grad  $k \geq 0$  und  $\mu$  eine komplexe Zahl. Sei  $m$  die Vielfachheit von  $\mu$  bezüglich des Polynoms  $P$ . Dann hat die DGL

$$P \left( \frac{d}{dt} \right) x = R(t) e^{\mu t} \quad (2.57)$$

eine spezielle Lösung der Form

$$x_0(t) = t^m Q(t) e^{\mu t},$$

wobei  $Q(t)$  ein (gesuchtes) Polynom  $k$ -ten Grades ist.

Im Fall  $R(t) \equiv \alpha$  (und  $k = 0$ ) hat die DGL  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \alpha e^{\mu t}$  eine spezielle Lösung

$$x_0(t) = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m e^{\mu t}. \quad (2.58)$$

**Beispiel.** Betrachten wir noch einmal die DGL

$$x'' + 2x' + x = e^{-t}.$$

Offensichtlich hat die Störfunktion die Form  $R(t) e^{\mu t}$  mit  $R(t) = 1$  und  $\mu = -1$ . Da  $-1$  eine 2-fache Nullstelle von  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$  ist, benutzen wir den folgenden Ansatz zur Lösung

$$x_0(t) = at^2 e^{-t},$$

wobei die Konstante  $a$  das Polynom  $Q$  darstellt (weil  $\deg Q = 0$ ). Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} a \left( (t^2 e^{-t})'' + 2(t^2 e^{-t})' + t^2 e^{-t} \right) &= e^{-t} \\ a 2e^{-t} &= e^{-t} \end{aligned}$$

woraus  $a = \frac{1}{2}$  folgt. Die spezielle Lösung ist also

$$x_0(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}.$$

Alternativ kann man diese Lösung direkt nach (2.58) erhalten:

$$x_0(t) = \frac{1}{P''(-1)} t^2 e^{-t} = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}.$$

**Beispiel.** Bestimmen wir eine spezielle Lösung der DGL

$$x'' + 2x' + x = t e^{-t}. \quad (2.59)$$

Wir haben  $R(t) = t$  und, wie zuvor,  $\mu = -1$  mit Vielfachheit  $m = 2$ . Da  $\deg R = 1$ , muss das Polynom  $Q$  von Grad 1 sein, also  $Q(t) = at + b$ , wobei  $a$  und  $b$  die gesuchten Konstanten sind. Einsetzen der Funktion

$$x(t) = (at + b) t^2 e^{-t} = (at^3 + bt^2) e^{-t}$$

in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} x'' + 2x' + x &= ((at^3 + bt^2) e^{-t})'' + 2((at^3 + bt^2) e^{-t})' + (at^3 + bt^2) e^{-t} \\ &= (2b + 6at) e^{-t}. \end{aligned}$$

Vergleichen mit (2.59) ergibt die Gleichung für  $a$  und  $b$

$$2b + 6at = t,$$

woraus  $a = \frac{1}{6}$  und  $b = 0$  folgt. Die spezielle Lösung ist also

$$x_0(t) = \frac{t^3}{6} e^{-t}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung von (2.59)

$$x(t) = \frac{t^3}{6} e^{-t} + (C_1 + C_2 t) e^{-t}.$$

**Beweis von Satz 2.12.** We müssen beweisen, dass die DGL

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = R(t)e^{\mu t}$$

eine Lösung in der Form

$$x(t) = t^m Q(t) e^{\mu t}$$

hat, wobei  $m$  die Vielfachheit von  $\mu$  bezüglich  $P$  ist und  $Q$  ein Polynom von Grad  $k = \deg R$  ist. Nach Lemma 2.7 erhalten wir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)x &= P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^m Q(t) e^{\mu t}) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (t^m Q(t))^{(j)} P^{(j)}\left(\frac{d}{dt}\right) e^{\mu t} \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (t^m Q(t))^{(j)} P^{(j)}(\mu) e^{\mu t}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Da nach Lemma 2.8 gilt  $P^{(j)}(\mu) = 0$  für alle  $j < m$ , kann der Laufindex  $j$  durch  $j \geq m$  beschränkt werden. Bezeichnen wir

$$y(t) = (t^m Q(t))^{(m)} \quad (2.61)$$

so dass

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \sum_{j \geq m} \frac{P^{(j)}(\mu)}{j!} y^{(j-m)} e^{\mu t}. \quad (2.62)$$

Ist  $Q$  ein Polynom von Grad  $k$ , so ist  $t^m Q$  ein Polynom von Grad  $m + k$  und somit ist  $y(t) = (t^m Q(t))^{(m)}$  ein Polynom von Grad  $(m + k) - m = k$ . Umgekehrt, ist  $y$  ein Polynom von Grad  $k$ , so ergibt die  $m$ -fach Integration von (2.61) (ohne die Integrationskonstanten zu addieren) und Division durch  $t^m$  ein Polynom von Grad  $k$ , das ist  $Q$ . Deshalb es reicht ein Polynom  $y$  von Grad  $k$  zu bestimmen, derart, dass die rechte Seite von (2.62) gleich  $R(t) e^{\mu t}$  ist. Da  $e^{\mu t}$  sich herauskürzen lässt, erhalten we die folgende DGL für  $y$

$$\sum_{j \geq m} \frac{P^{(j)}(\mu)}{j!} y^{(j-m)} = R(t).$$

Durch den Wechsel  $l = j - m$  des Laufindex, schreiben wir diese DGL in der folgenden Form um:

$$\sum_{l \geq 0} b_l y^{(l)} = R(t), \quad (2.63)$$

wobei  $b_l = \frac{P^{(l+m)}(\mu)}{(l+m)!}$ , insbesondere

$$b_0 = \frac{P^{(m)}(\mu)}{m!} \neq 0. \quad (2.64)$$

Es bleibt die folgende Behauptung zu beweisen.

**Behauptung.** *Ist  $R(t)$  ein Polynom von Grad  $k \geq 0$ , so existiert ein Polynom  $y(t)$  von Grad  $k$ , das (2.63) erfüllt.*

Beweis durch Induktion nach  $k$ .

Der Induktionsanfang für  $k = 0$ . In diesem Fall ist  $R(t)$  konstant, z.B.,  $R(t) = \alpha$ , und  $y(t)$  muss auch konstant sein, also  $y(t) = c$ . Dann führt (2.63) zurück auf  $b_0 c = \alpha$ , woraus folgt  $c = \alpha/b_0$  (hier benutzt man, dass  $b_0 \neq 0$ ).

Der Induktionsschritt von Werten  $< k$  zu  $k$ . Stellen wir  $y$  in der Form

$$y = ct^k + z(t) \quad (2.65)$$

dar, wobei  $z$  ein Polynom von Grad  $< k$  ist. Einsetzen (2.65) in (2.63) ergibt die DGL für  $z$

$$\sum_{l \geq 0} b_l z^{(l)} = R(t) - \sum_{l \geq 0} b_l (ct^k)^{(l)} =: \tilde{R}(t).$$

Bemerken wir, dass  $\tilde{R}$  ein Polynom von Grad  $\leq k$  ist, als die Differenz von zwei Polynomen von Grad  $k$ . Bezeichnen mit  $\alpha t^k$  den höchsten Term im Polynom  $R(t)$ , also

$$R(t) = \alpha t^k + \text{Terme von Grad } < k.$$

Dann gilt

$$\tilde{R}(t) = (\alpha - b_0 c) t^k + \text{Terme von Grad } < k.$$

Bestimmen  $c$  aus der Gleichung  $b_0 c = \alpha$ , also  $c = \alpha/b_0$ , ergibt  $\deg \tilde{R} < k$ . Nach der Induktionsvoraussetzung hat die DGL

$$\sum_{l \geq 0} b_l z^{(l)} = \tilde{R}(t)$$

eine Lösung  $z(t)$ , die ein Polynom von Grad  $< k$  ist. Somit ist die Funktion  $y = ct^k + z$  ein Polynom von Grad  $k$ , und  $y$  löst die DGL (2.63).

Letztlich betrachten wir dem Fall  $R(t) \equiv \alpha$ . Dann ist  $y$  konstant, und (2.63)-(2.64) ergeben

$$y = \frac{\alpha}{b_0} = \frac{m! \alpha}{P^{(m)}(\mu)}.$$

Die DGL (2.61) wird

$$(t^m Q(t))^{(m)} = \frac{m! \alpha}{P^{(m)}(\mu)},$$

und die  $m$ -fache Integration ergibt

$$t^m Q(t) = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m$$

und somit

$$Q(t) = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)}.$$

Deshalb hat die DGL  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \alpha e^{\mu t}$  eine spezielle Lösung

$$x(t) = \frac{\alpha}{P^{(m)}(\mu)} t^m e^{\mu t},$$

was zu beweisen war. ■

### 2.2.6 Die DGLen 2-ter Ordnung mit periodischer Störfunktion

Betrachten wir eine DGL 2-ter Ordnung

$$x'' + px' + qx = f(t), \quad (2.66)$$

die in vielen Anwendungen in Physik vorkommt. Z.B., wie wir es schon gesehen haben, beschreibt (2.66) die 1-dimensionale Bewegung eines Teilchen, sowie die Stromschwingung in einem  $RLC$ -Stromkreis (Fig. 15).

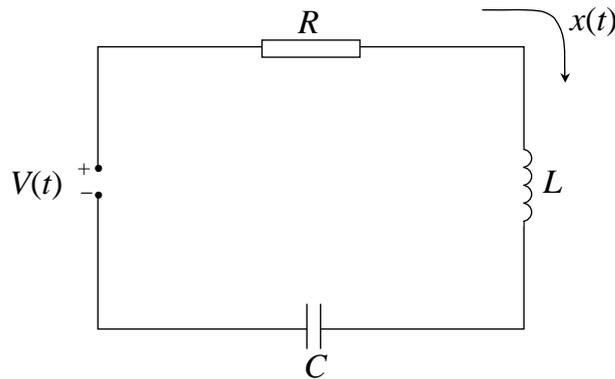


Figure 15:  $RLC$ -Stromkreis

Seien  $R$  der Widerstandswert,  $L$  die Induktivität und  $C$  die Kapazität im Stromkreis. Seien  $V(t)$  die Spannung der Stromquelle und  $x(t)$  der Strom im Stromkreis um Zeit  $t$ . Wir haben gesehen, dass  $x(t)$  die folgende DGL erfüllt:

$$Lx'' + Rx' + \frac{x}{C} = V'.$$

Angenommen  $L \neq 0$ , dividieren durch  $L$  ergibt die DGL (2.66), wobei  $p = R/L$ ,  $q = 1/(LC)$ , und  $f = V'/L$ .

Wir benutzen die obige Methode um die folgende DGL zu untersuchen

$$x'' + px' + qx = A \sin \omega t, \quad (2.67)$$

wobei  $A, \omega$  gegebene positive Konstanten sind. Physikalisch stellt die Störfunktion  $f(t) = A \sin \omega t$  eine externe periodische Kraft dar. Die Zahl  $A$  heißt die *Amplitude* von der Störfunktion und  $\omega$  heißt die *Frequenz* oder die *Aussenfrequenz*. Im Fall von Stromkreis modelliert diese Störfunktion eine periodische Spannung mit der Frequenz  $\omega$ . Z.B., der Wechselstrom in den Steckdosen hat die Frequenz 50 Hz, die den Wert  $\omega = 2\pi \cdot 50$  entspricht.

Wir nehmen an, dass  $p \geq 0$  und  $q > 0$  und betonen, dass diese Voraussetzungen in physikalischen Anwendungen erfüllt sind. Bestimmen wir eine spezielle Lösung von (2.67). Da  $\sin \omega t = \text{Im } e^{i\omega t}$ , betrachten wir die DGL mit komplexwertiger Störfunktion

$$x'' + px' + qx = Ae^{i\omega t}. \quad (2.68)$$

Sei  $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$  das charakteristische Polynom.

**Nicht-resonanter Fall.** Erst betrachten wir den nicht-resonanten Fall, wenn  $i\omega$  keine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist. Für den Lösungsansatz  $x(t) = ce^{i\omega t}$  erhalten wir nach Lemma 2.11 (oder Satz 2.12):

$$c = \frac{A}{P(i\omega)} = \frac{A}{-\omega^2 + pi\omega + q} =: a + bi. \quad (2.69)$$

Somit ist die spezielle Lösung von (2.68)

$$(a + ib)e^{i\omega t} = (a \cos \omega t - b \sin \omega t) + i(a \sin \omega t + b \cos \omega t).$$

Der Imaginärteil davon liefert die spezielle Lösung von (2.67)

$$x_0(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t. \quad (2.70)$$

Diese Lösung kann auch in der folgenden Form umgeschrieben werden:

$$x(t) = B \cos \varphi \sin \omega t + B \sin \varphi \cos \omega t = B \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei die Konstanten  $B$  und  $\varphi$  mit den Konstanten  $a$  und  $b$  gemäß der folgenden Gleichungen verknüpft sind:

$$B \cos \varphi = a, \quad B \sin \varphi = b.$$

Die Konstante  $B$  heißt *Amplitude* und  $\varphi$  die *Phase* oder der *Phasenwinkel* der Lösung. Quadrieren und Addieren der Gleichungen ergibt

$$B = \sqrt{a^2 + b^2} = |c| = \frac{A}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + \omega^2 p^2}}. \quad (2.71)$$

Dann bestimmt man eindeutig den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  durch  $\cos \varphi = a/B$  und  $\sin \varphi = b/B$ .

Um die allgemeine Lösung von (2.67) zu bestimmen, müssen wir noch zu (2.70) die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x'' + px' + qx = 0 \quad (2.72)$$

zu addieren. Seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Nullstelle von  $P(\lambda)$ , also

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Betrachten wir die verschiedenen Fällen.

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind reell.

Da  $p \geq 0$  und  $q > 0$ , gilt  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ . Die allgemeine Lösung der homogenen DGL (2.72) ist nach Satz 2.6

$$x_h(t) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t}, & \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

In den beiden Fällen hat  $x(t)$  eine exponentielle Abnahme für  $t \rightarrow \infty$ . Somit hat die allgemeine Lösung von (2.67) die Form

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + \text{die Terme mit exponentieller Abnahme.}$$

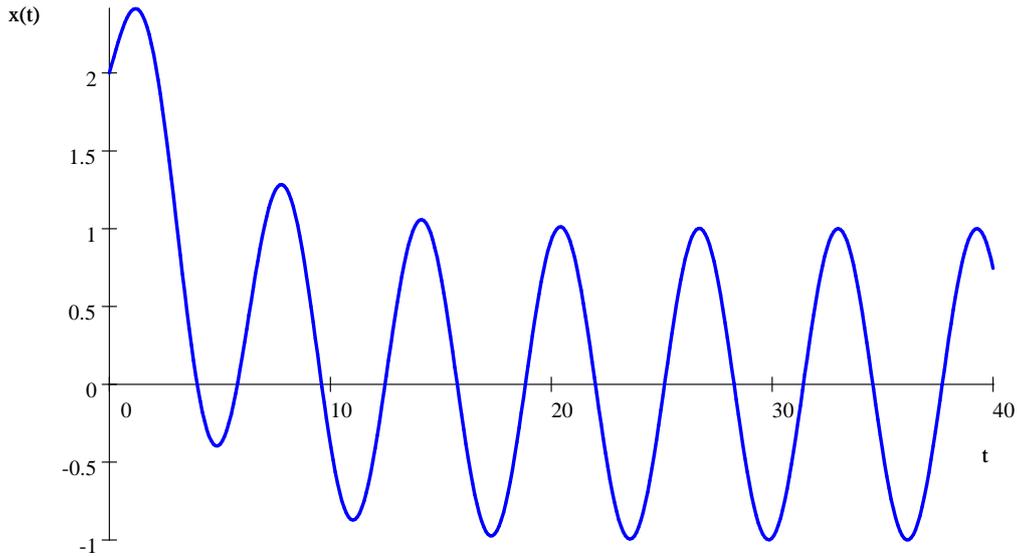


Figure 16: Die Funktion  $\sin t + 2e^{-t/4}$  sieht wie  $\sin t$  aus für  $t \rightarrow \infty$

We sehen, dass für  $t \rightarrow \infty$  stellt die Funktion  $B \sin(\omega t + \varphi)$  den Hauptterm der Lösung  $x(t)$  dar (vgl. z.B. Fig. 16). Für den Stromkreis bedeutet es, dass der Strom für  $t \rightarrow \infty$  mit der Aussenfrequenz  $\omega$  oszilliert.

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind nicht-reell. Seien  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  wobei

$$\alpha = -p/2 \leq 0 \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) = C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi),$$

wobei  $C$  und  $\psi$  beliebige reelle Konstanten sind. Die Zahl  $\beta$  heißt die *Eigenfrequenz* der DGL bzw des physikalischen Systems. Im Fall des Stromkreises, nennt man  $\beta$  auch *Kreisfrequenz*, da ohne Störfunktion oszilliert der Strom im Stromkreis mit der Frequenz  $\beta$ .

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.67)

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi).$$

Betrachten zwei weitere Unterfälle. Ist  $\alpha < 0$ , so ist der Hauptterm wieder  $B \sin(\omega t + \varphi)$ , und die allgemeine Lösung konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen diese spezielle Lösung genauso, wie in dem vorherigen Fall (vgl. Fig. 17).

Ist  $\alpha = 0$ , so gelten  $p = 0$ ,  $q = \beta^2$ , und die DGL (2.67) wird

$$x'' + \beta^2 x = A \sin \omega t. \tag{2.73}$$

Da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gleich  $\pm i\beta$  sind, bedeutet die Voraussetzung "i $\omega$  keine Nullstelle ist", dass  $\omega \neq \beta$ . Da die allgemeine Lösung der homogenen

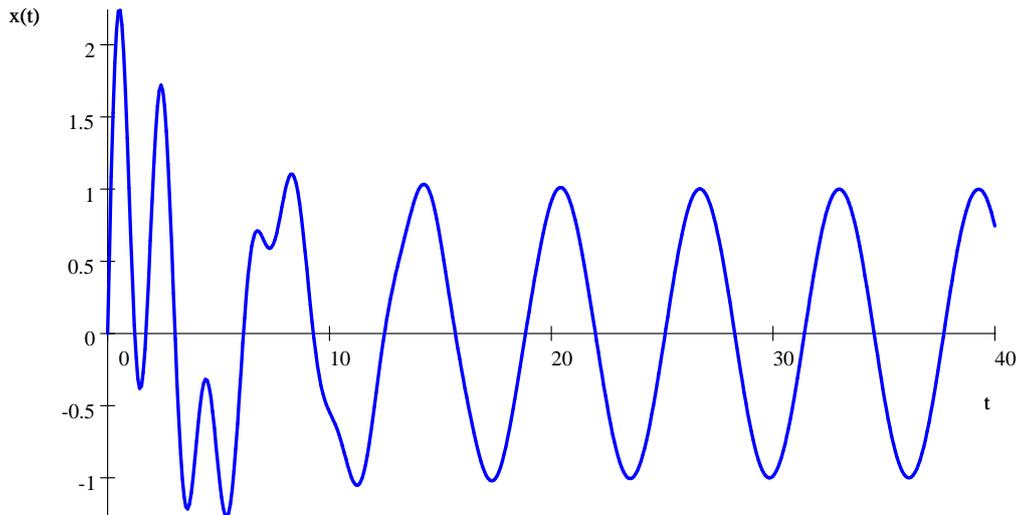


Figure 17: Funktion  $x(t) = \sin t + 2e^{-t/4} \sin \pi t$  sieht wie  $\sin t$  aus für  $t \rightarrow \infty$

DGL  $x'' + \beta^2 x = 0$  durch  $x_h(t) = C \sin(\beta t + \psi)$  gegeben ist, erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.73) wie folgt:

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) + C \sin(\beta t + \psi).$$

Diese Funktion ist offensichtlich eine Überlagerung von zwei Sinuswellen mit verschiedenen Frequenzen – die Eigenfrequenz und Aussenfrequenz. Sind  $\omega$  und  $\beta$  inkommensurabel, so ist  $x(t)$  nicht periodisch, vorausgesetzt  $C \neq 0$  (vgl. Fig. 18). In einem Stromkreis tritt sich

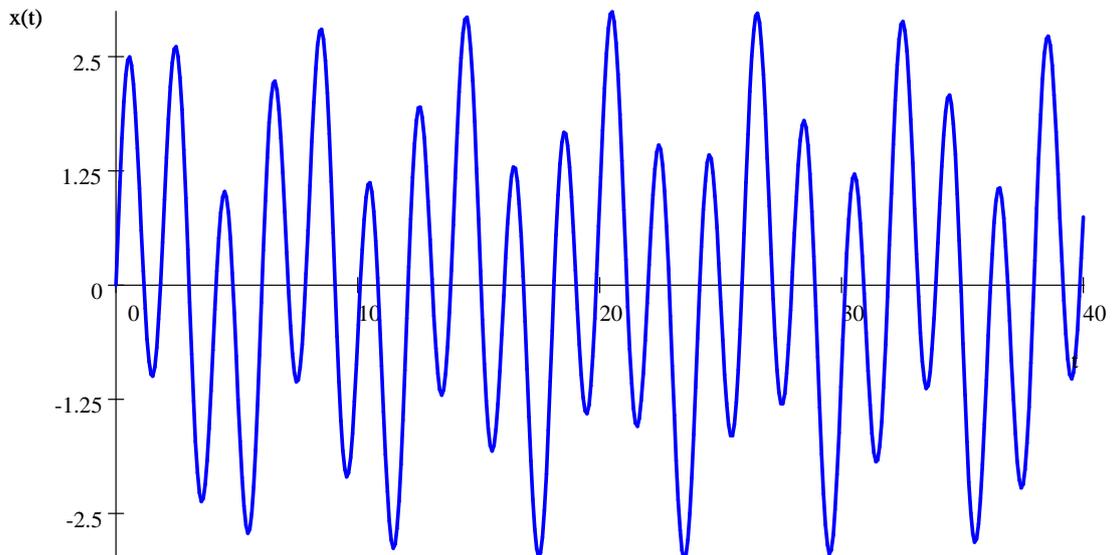


Figure 18: Die Funktion  $\sin t + 2 \sin \pi t$  ist nicht periodisch, aber sieht fast wie periodisch aus.

dieser Vorgang nur dann ein, wenn der Widerstandswert  $R$  verschwindet, weil  $p = R/L$

und  $p$  muss 0 sein. Natürlich in den praktischen Stromkreisen hat man immer  $R > 0$  so dass der Vorgang nur ungefähr und nur für beschränkten Werten von  $t$  eintreten kann.

Jetzt betrachten wir wieder die Formel (2.71) für die Amplitude  $B$  und nehmen wir an, dass die Aussenfrequenz  $\omega$  verändert werden kann, wobei die Amplitude  $A$  konstant ist. Stellen wir die folgende Frage: für welchen Wert der Aussenfrequenz  $\omega$  ist die Amplitude  $B = B(\omega)$  maximal? Es folgt aus (2.71), dass

$$B(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\omega^4 + (p^2 - 2q)\omega^2 + q^2}},$$

und wir sehen, dass  $B$  maximal genau dann ist, wenn der Nenner minimal ist. Ist  $p^2 \geq 2q$ , dann ist der Nenner minimal für  $\omega = 0$ , was physikalisch nicht sehr interessant ist. Nehmen wir jetzt an, dass  $p^2 < 2q$  (insbesondere haben wir in diesem Fall  $p^2 < 4q$  und somit sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  nicht reell). Dann wird der maximale Wert von  $B$  am folgenden Wert von  $\omega$  angenommen:

$$\omega^2 = -\frac{1}{2}(p^2 - 2q) = q - \frac{p^2}{2}.$$

Der Wert

$$\omega_0 := \sqrt{q - \frac{p^2}{2}}$$

heißt die *Resonanzfrequenz*. Ein Beispiel von Funktion  $B = B(\omega)$  ist auf Fig. 19 gezeichnet, wo man sieht, dass der Graph von  $B(\omega)$  neben der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ziemlich scharf ist. Hat die externe Kraft die *Resonanzfrequenz*, also gilt  $\omega = \omega_0$ , dann ist die Wirkung der Kraft auf das System maximal.

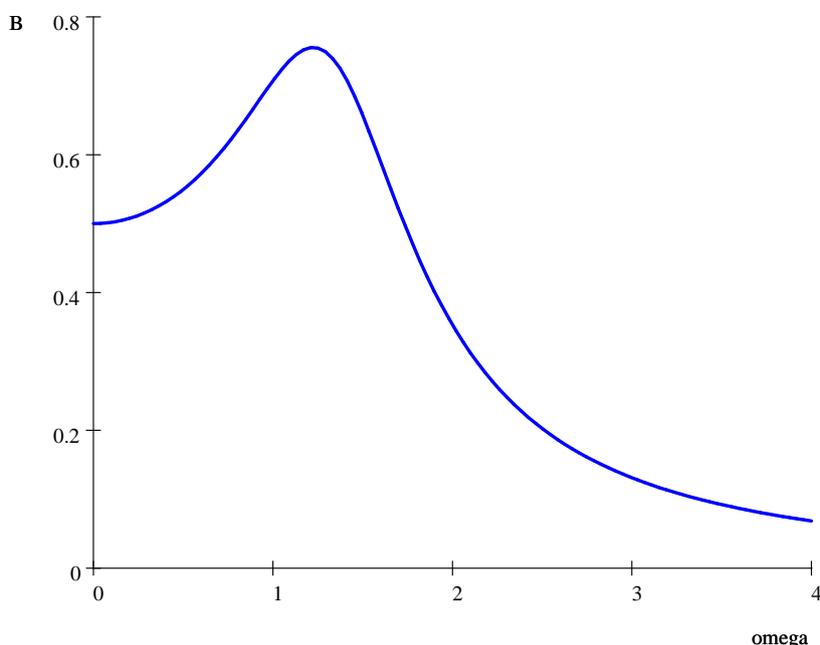


Figure 19: Funktion  $B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}}$  für  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $A = 1$

Um den maximalen Wert  $B_{\max}$  von  $B(\omega)$  zu bestimmen, benutzen wir die Eigenfrequenz

$$\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

und schreiben

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + q^2}} = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + q^2 - \omega_0^4}} \\ &= \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + p^2\beta^2}}, \end{aligned}$$

weil

$$q^2 - \omega_0^4 = q^2 - \left(q - \frac{p^2}{2}\right)^2 = qp^2 - \frac{p^4}{4} = p^2\beta^2.$$

Daraus folgt, dass

$$B_{\max} = \frac{A}{p\beta}.$$

**Beispiel.** Die DGL

$$x'' + 6x' + 34x = \sin \omega t,$$

hat die Eigenfrequenz  $\beta = \sqrt{q - p^2/4} = 5$  und die Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{q - p^2/2} = 4$ . Die maximale Amplitude ist

$$B_{\max} = \frac{A}{p\beta} = \frac{1}{30}.$$

Im Fall  $\omega = \omega_0 = 4$  erhalten wir nach (2.69)

$$c = \frac{A}{-\omega^2 + pi\omega + q} = \frac{1}{-4^2 + 24i + 34} = \frac{1}{50} - \frac{2}{75}i,$$

und die spezielle Lösung (2.70) ist

$$x_0(t) = \frac{1}{50} \sin 4t - \frac{2}{75} \cos 4t,$$

mit der Amplitude  $1/30 = 0,0333\dots$ . Im Fall  $\omega = 8$  erhalten wir

$$c = \frac{1}{-8^2 + 48i + 34} = -\frac{5}{534} - \frac{4}{267}i,$$

und die spezielle Lösung ist

$$x_0(t) = -\frac{5}{534} \sin 8t - \frac{4}{267} \cos 8t,$$

mit der Amplitude  $B = |c| \approx 0,0177$ . Man kann die beiden Funktionen auf Fig. 20 vergleichen.

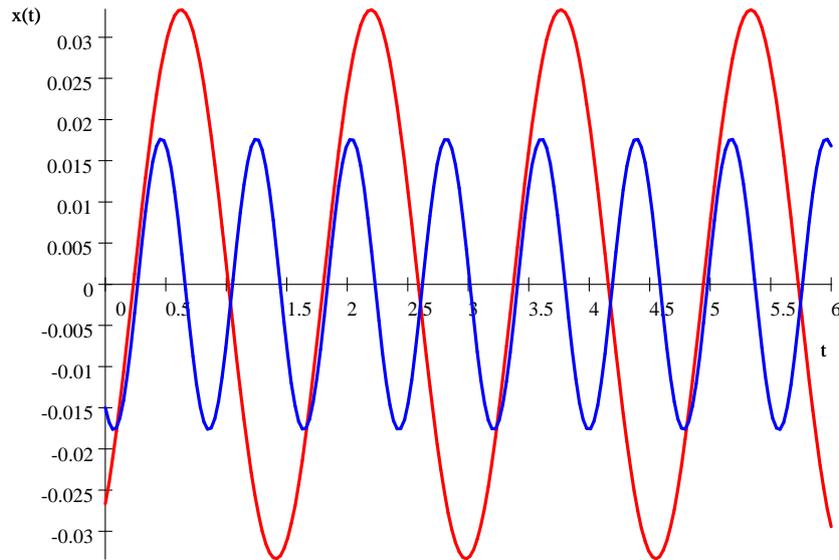


Figure 20: Zwei spezielle Lösungen für den Fälle  $\omega = 4$  bzw  $\omega = 8$

**Resonanter Fall.** Betrachten wir jetzt den resonanten Fall, wenn  $i\omega$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist, also

$$(i\omega)^2 + pi\omega + q = 0.$$

Daraus folgt, dass  $p = 0$  und  $q = \omega^2$ , und die DGL (2.67) wird

$$x'' + \omega^2 x = A \sin \omega t. \quad (2.74)$$

In diesem Fall haben wir  $\alpha = 0$  und  $\omega = \omega_0 = \beta = \sqrt{q}$ . Die DGL mit komplexwertiger Störfunktion

$$x'' + \omega^2 x = Ae^{i\omega t} \quad (2.75)$$

hat einen Lösungsansatz

$$x(t) = cte^{i\omega t},$$

wobei die Konstante  $c$  nach Satz 2.12 bestimmt werden kann:

$$c = \frac{A}{P'(i\omega)} = \frac{A}{2i\omega} = -\frac{Ai}{2\omega}$$

Somit ist die spezielle Lösung von (2.75)

$$x(t) = -\frac{Ai}{2\omega} te^{i\omega t} = -i\frac{At}{2\omega} \cos \omega t + \frac{At}{2\omega} \sin \omega t.$$

Der Imaginärteil liefert die spezielle Lösung

$$x_0(t) = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t,$$

und die allgemeine Lösung von (2.74) ist wie folgt:

$$x(t) = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t + C \sin(\omega t + \psi), \quad (2.76)$$

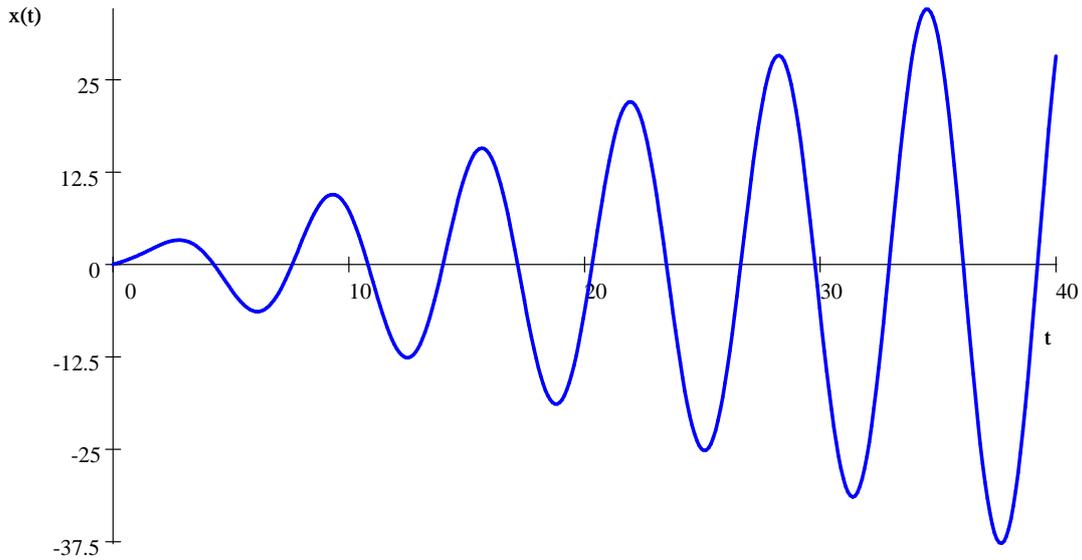


Figure 21: Die Funktion  $x(t) = -t \cos t + 2 \sin t$

mit beliebigen Konstanten  $C$  und  $\psi$ . Ein Beispiel von Funktion (2.76) wird auf Fig. 21 gezeichnet.

Dieses Phänomen heißt der *Resonanzfall*: die Aussenfrequenz  $\omega$ , die Eigenfrequenz  $\beta$  und die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  sind alle gleich. Im Resonanzfall wächst die Amplitude der Lösung unbeschränkt für  $t \rightarrow \infty$ . Da eine unbeschränkte Schwingung physikalisch unmöglich ist, wird das System durch die großen Schwingungen schließlich zerstört (oder man findet, dass das mathematische Modell nicht geeignet ist).

## 2.3 Der Raum von Lösungen linearer Normalsystemen

Betrachten wir ein lineares Normalsystem

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.77)$$

wobei die Funktionen  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig auf einem nicht-trivialen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind, sowie auch das entsprechende *homogene* Normalsystem:

$$x' = A(t)x. \quad (2.78)$$

Bezeichnen wir mit  $L$  die Menge von allen Lösungen von (2.78) auf  $I$  (also  $L$  ist die allgemeine Lösung von (2.78)).

**Behauptung.**  $L$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

**Beweis.** Betrachten erst die Menge  $\mathcal{F}$  von allen Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Es ist klar, dass  $\mathcal{F}$  ein Vektorraum ist, mit Operationen Addition von Funktionen und Multiplikation mit einem Skalar. Das Nullelement von  $\mathcal{F}$  ist die konstante Funktion 0. Offensichtlich ist die allgemeine Lösung  $L$  eine Teilmenge von  $\mathcal{F}$ . Wir müssen beweisen, dass  $L$  ein Unterraum von  $\mathcal{F}$  ist, d.h.

- (i)  $0 \in L$
- (ii)  $x, y \in L \Rightarrow x + y \in L$  (Abgeschlossenheit unter der Addition)

(iii)  $x \in L, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cx \in L$  (Abgeschlossenheit unter der Multiplikation)

Die Bedingung (i) ist offensichtlich, weil die Funktion  $x(t) \equiv 0$  eine Lösung von (2.78) ist.

Die Bedingung (ii) folgt aus der Identität

$$(x + y)' = x' + y' = Ax + Ay = A(x + y),$$

und (iii) folgt von  $(cx)' = cx' = A(cx)$ . Deshalb ist  $L$  ein Unterraum. ■

Der folgende Satz ist analog zum Satz 2.4 und Lemma 2.10.

**Satz 2.13** (a)  $\dim L = n$ . Folglich ist die allgemeine Lösung des homogenen Normalsystems (2.78) durch die folgende Identität gegeben

$$x_h(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t), \quad (2.79)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.78) sind und  $C_1, \dots, C_n$  beliebige Konstanten.

(b) Sei  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung des inhomogenen Normalsystems (2.77). Dann ist die allgemeine Lösung von (2.77) durch die folgende Identität gegeben:

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t), \quad (2.80)$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$  sind wie im Teil (a).

**Beweis.** (a) Wählen eine beliebige (aber feste) Stelle  $t_0 \in I$  und betrachten eine Abbildung

$$x(t) \in L \mapsto x(t_0) \in \mathbb{R}^n \quad (2.81)$$

von  $L$  nach  $\mathbb{R}^n$ , die offensichtlich linear ist. Nach Satz 2.1 ist die Abbildung (2.81) bijektiv, da für jeden Anfangswert  $x(t_0)$  genau eine Lösung existiert. Somit ist (2.81) ein linearer Isomorphismus zwischen  $L$  und  $\mathbb{R}^n$ . Daraus folgt, dass  $L$  und  $\mathbb{R}^n$  linear isomorph sind und somit  $\dim L = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

Seien  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängige Lösungen von (2.78), dann stellt die Folge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine Basis in  $L$  dar. Folglich ist jede Funktion von  $L$  eine Linearkombination von  $x_1, \dots, x_n$ , was zu beweisen war.

(b) Wir behaupten folgendes: eine Funktion  $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  löst (2.77) genau dann, wenn die Funktion  $y(t) = x(t) - x_0(t)$  löst (2.78). In der Tat ist die DGL  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$\begin{aligned}(y + x_0)' &= A(y + x_0) + B, \\ y' + x_0' &= Ay + Ax_0 + B, \\ y' &= Ay,\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass  $x_0' = Ax_0 + B$ . Nach Teil (a) ist  $y$  eine Lösung von  $y' = Ay$  genau dann, wenn

$$y = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t). \quad (2.82)$$

Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung  $x = x_0 + y$  von (2.77) durch (2.80) gegeben ist.

■

**Korollar 2.14** Sei  $t_0 \in I$  eine beliebige Stelle. Eine Folge  $x_1(t), \dots, x_k(t)$  von Lösungen von (2.78) ist genau dann linear unabhängig, wenn die Folge von Vektoren  $x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)$  linear unabhängig ist.

**Beweis.** Das folgt aus der Bemerkung, dass die lineare Unabhängigkeit durch den Isomorphismus (2.81) bewahrt wird. ■

Wir betonen, dass für allgemeine Funktionen Korollar 2.14 nicht gilt: es kann sein, dass die Funktionen  $x_1, x_2$  unabhängig sind, während die Vektoren  $x_1(t_0), x_2(t_0)$  abhängig sind.

**Beispiel.** Betrachten wir den Fall  $n = 2$  und das Normalsystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x. \quad (2.83)$$

Später lernen wir, wie man solche Systeme lösen kann, aber jetzt führen wir das System auf eine skalare DGL 2-ter Ordnung zurück. Bezeichnen wir mit  $k_1, k_2$  die Komponenten  $k_1, k_2$  von  $x$  so dass  $x = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$  und (2.83) wird

$$\begin{cases} k_1' = -k_2 \\ k_2' = k_1. \end{cases}$$

Daraus folgt  $k_1'' = -k_2' = -k_1$  und somit

$$k_1'' + k_1 = 0.$$

Nehmen wir zwei unabhängige Lösungen:

1.  $k_1 = \cos t$  und  $k_2 = -k_1' = \sin t$
2.  $k_1 = -\sin t$  und  $k_2 = \cos t$ .

Daher erhalten wir zwei unabhängige Lösungen von (2.83)

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und } x_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Nach Korollar 2.14 sind die Vektoren  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  unabhängig für jedes  $t$ . Das folgt auch aus der folgenden Identität:

$$\det(x_1 \mid x_2) = \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

wobei  $(x_1 \mid x_2)$  eine Matrix mit den Spaltenvektoren  $x_1$  und  $x_2$  bezeichnet.

Betrachten wir jetzt zwei anderen Vektorfunktionen

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ und } x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

die offensichtlich auch linear unabhängig sind als Funktionen. Jedoch haben wir für  $t = \pi/4$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = x_2(t)$$

so dass die Vektoren  $x_1(\pi/4)$  und  $x_2(\pi/4)$  abhängig sind. Folglich können die Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  das gleiche System  $x' = A(t)x$  nicht lösen.

**Bemerkung.** Man kann genauso komplexwertige Normalsysteme betrachten. In diesem Fall werden die Koeffizienten  $A(t)$  und  $B(t)$  definiert als die stetige Funktionen  $A : I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ , und  $x(t)$  ist eine gesuchte Funktion mit Werten in  $\mathbb{C}^n$ . Dann gilt die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.1: für alle  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ , hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = Ax + B \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.84)$$

eine Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ ; darüber hinaus ist die Lösung von (2.84) eindeutig auf jedem Teilintervall  $I' \subset I$ . Man kann diese Behauptung entweder direkt beweisen, genauso wie Satz 2.1, oder aus Satz 2.1 gewinnen durch Identifizierung von  $\mathbb{C}^n$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$ , so dass das System  $x' = Ax + B$  als ein reellwertiges Normalsystem von Dimension  $2n$  betrachtet werden kann (vgl. Präsenzübung 15).

Satz 2.13 und Korollar 2.14 gelten auch für die komplexwertigen Systeme, vorausgesetzt, dass die Räume von Lösungen über den Körper  $\mathbb{C}$  betrachtet werden.

## 2.4 Variation der Konstanten

Betrachten wir wieder das inhomogene Normalsystem

$$x' = A(t)x + B(t), \quad (2.85)$$

mit stetigen Koeffizienten  $A(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir führen hier ein Verfahren zur Bestimmung die allgemeine Lösung von (2.85) ein, vorausgesetzt, dass die allgemeine Lösung des homogenen Systems  $x' = A(t)x$  bekannt ist. Den speziellen Fall für  $n = 1$  haben wir schon im Abschnitt 1.4 betrachtet (vgl. Satz 1.4).

Gegeben seien  $n$  linear unabhängige Lösungen  $x_1, \dots, x_n$  von  $x' = A(t)x$ , betrachten wir die *Fundamentalmatrix*

$$X(t) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline & & & & \end{array} \right), \quad (2.86)$$

wobei die  $k$ -te Spalte durch den Spaltenvektor  $x_k(t)$  gegeben ist, für alle  $k = 1, \dots, n$ . Wie schreiben die  $n \times n$  Matrix (2.86) kurz in der Form

$$X(t) = (x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n).$$

Nach Korollar 2.14 sind die Spalten von  $X(t)$  linear unabhängig für jedes  $t \in I$ , woraus folgt, dass  $\det X(t) \neq 0$  und somit die inverse Matrix  $X^{-1}(t)$  für alle  $t \in I$  definiert ist. Man benutzt  $X$  und  $X^{-1}$ , um das inhomogene Normalsystem (2.85) wie folgt zu lösen.

**Satz 2.15** *Die allgemeine Lösung des Systems (2.85) ist durch die Identität*

$$x(t) = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt \quad (2.87)$$

gegeben.

Zunächst beweisen wir eine Behauptung.

**Behauptung.** *Seien  $x_1, \dots, x_m$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  und  $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{R}$ . Dann gilt die Identität*

$$C_1 x_1 + \dots + C_m x_m = XC, \quad (2.88)$$

wobei  $X$  die  $n \times m$  Matrix mit Spalten  $x_1, \dots, x_m$  ist und  $C$  der Spaltenvektor mit Komponenten  $C_1, \dots, C_m$ .

**Beweis.** Sei  $x_{ik}$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $x_k$ . Dann hat die Matrix  $X$  die Elemente  $x_{ik}$  wobei  $i$  der Zeilenindex ist und  $k$  der Spaltenindex. Nach Definition des Produktes von Matrizen erhalten wir

$$(XC)_i = \sum_{k=1}^m x_{ik} C_k = \left( \sum_{k=1}^m C_k x_k \right)_i$$

woraus (2.88) folgt. ■

Man kann die Identität (2.88) etwas ausführlicher darstellen wie folgt:

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline & & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} = C_1 x_1 + \dots + C_m x_n$$

**Beweis von Satz 2.15.** Da für jedes  $t \in I$  die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  linear unabhängig sind, kann jeder Vektor aus  $\mathbb{R}^n$  als eine Linearkombination von den Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  dargestellt werden. Insbesondere gilt es für den Vektor  $x(t)$ , wobei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beliebige Funktion ist. Somit existieren die reellwertigen Funktionen  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  auf  $I$ , derart, dass die folgende Identität

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + \dots + C_n(t)x_n(t) \quad (2.89)$$

für alle  $t \in I$  gilt. Bezeichnen wir mit  $C(t)$  den Spaltenvektor mit den Komponenten  $C_1(t), \dots, C_n(t)$  und umschreiben die Identität (2.89) nach (2.88):

$$x(t) = X(t)C(t).$$

Daraus folgt, dass

$$C(t) = X^{-1}(t)x(t)$$

gilt und die Funktion  $C(t)$  nach  $t$  differenzierbar ist, vorausgesetzt, dass  $x(t)$  differenzierbar ist<sup>4</sup>. Durch Ableitung von (2.89) erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= C_1x_1' + C_2x_2' + \dots + C_nx_n' \\ &\quad + C_1'x_1 + C_2'x_2 + \dots + C_n'x_n \\ &= C_1Ax_1 + C_2Ax_2 + \dots + C_nAx_n \quad (\text{benutzt } x_k' = Ax_k) \\ &\quad + C_1'x_1 + C_2'x_2 + \dots + C_n'x_n \\ &= A(C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n) \\ &\quad + C_1'x_1 + C_2'x_2 + \dots + C_n'x_n \\ &= Ax + XC'. \end{aligned}$$

Deshalb ist die DGL  $x' = Ax + B$  äquivalent zu

$$XC' = B. \quad (2.90)$$

Durch Lösung dieser Gleichung bezüglich  $C'$  erhalten wir

$$C' = X^{-1}B,$$

und somit

$$C(t) = \int X^{-1}(t)B(t)dt,$$

und

$$x(t) = XC = X(t) \int X^{-1}(t)B(t)dt,$$

was zu beweisen war. ■

**Bemerkung.** Die Bezeichnung "Variation der Konstanten" kommt aus der Identität (2.89), wo man die Konstanten  $C_1, \dots, C_n$  aus dem Ausdruck

$$x(t) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t)$$

---

<sup>4</sup>Die Funktion  $X^{-1}(t)$  ist immer nach  $t$  differenzierbar, da die Komponenten von  $X^{-1}(t)$  rationale Funktionen der Komponenten von  $X(t)$  sind.

für die Lösung der *homogenen* DGL variieren lässt, d.h. durch die Funktionen ersetzt, und somit die Lösung der *inhomogenen* DGL bestimmt.

**Zweiter Beweis.** Bemerken zunächst, dass die Fundamentalmatrix  $X$  die folgende DGL

$$X' = AX \tag{2.91}$$

erfüllt, weil jeder Spaltenvektor  $x_k$  von  $X$  die ähnliche Gleichung  $x_k' = Ax_k$  erfüllt. Durch Ableitung von (2.87) nach  $t$  und mit Hilfe von Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= X'(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt + X(t) (X^{-1}(t) B(t)) \\ &= AX \int X^{-1} B(t) dt + B(t) \\ &= Ax + B(t). \end{aligned}$$

Deshalb löst  $x(t)$  das Normalsystem (2.85). Jetzt zeigen wir, dass (2.87) alle Lösungen liefert. Das Integral in (2.87) ist unbestimmt und somit kann in der Form

$$\int X^{-1}(t) B(t) dt = V(t) + C$$

dargestellt werden, wobei  $V(t)$  eine Stammfunktion und  $C = (C_1, \dots, C_n)$  ein konstanter Vektor ist. Es folgt aus (2.87), dass

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) V(t) + X(t) C \\ &= x_0(t) + C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t), \end{aligned}$$

wobei  $x_0(t) = X(t) V(t)$  eine Lösung von (2.85) ist. Nach Satz 2.13 erhalten wir, dass  $x(t)$  die allgemeine Lösung ist.

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Dieses System hat zwei unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

wie es schon bemerkt wurde. Somit ist die Fundamentalmatrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und die inverse Matrix

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Betrachten jetzt die inhomogene DGL

$$x' = A(t)x + B(t)$$

wobei  $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$ . Nach (2.87) erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Z.B., nehmen wir  $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$  an und berechnen das Integral wie folgt:

$$\int \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ -\sin t - t \cos t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \cos t + C_1 \\ -t \sin t + C_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \cos t + C_1 \\ -t \sin t + C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \cos t - C_2 \sin t + t \\ C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Skalare DGLen  $n$ -ter Ordnung.** Jetzt verwenden wir das Verfahren Variation der Konstanten zur Lösung der skalaren linearen ODE  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t), \quad (2.92)$$

wobei  $a_k(t)$  und  $f(t)$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$ . Wir lösen (2.92) indem wir die DGL (2.92) auf ein Normalsystem zurückführen.

Wir wissen schon, dass (2.92) äquivalent zum Normalsystem

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + B(t) \quad (2.93)$$

ist, wobei

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Seien  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0. \quad (2.94)$$

Bezeichnen mit  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  die entsprechenden Vektorfunktionen, die unabhängige Lösungen von  $x' = A(t)x$  sind, und betrachten die Fundamentalmatrix

$$X = (\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Diese Matrix  $X$  heißt auch die Fundamentalmatrix von der DGL (2.94). Nach Satz 2.15 ist die allgemeine Lösung von (2.93) durch die Identität

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \int X^{-1}(t) B(t) dt \quad (2.96)$$

gegeben. Bezeichnen wir mit  $y_{ik}$  die Elemente von Matrix  $X^{-1}$ , also  $X^{-1} = (y_{ik})$ , wobei  $i$  der Zeilenindex und  $k$  der Spaltenindex sind. Sei  $y_k$  die  $k$ -te Spalte von  $X^{-1}$ . Nach (2.88) erhalten wir

$$X^{-1}B = 0y_1 + 0y_2 + \dots + fy_n = fy_n,$$

und nach (2.96)

$$\mathbf{x} = X(t) \int f(t) y_n(t) dt.$$

Bestimmen wir die Funktion  $x(t)$ , die die erste Komponente von  $\mathbf{x}$  ist. Man erhält  $x(t)$  als das Produkt von der ersten Zeile von  $X$  und dem Spaltenvektor  $\int f(t) y_n(t) dt$ , also

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \int f(t) y_{jn}(t) dt.$$

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 2.16** Seien  $x_1, \dots, x_n$   $n$  linear unabhängige Lösungen von (2.94) und  $X$  die Fundamentalmatrix (2.95). Für jede stetige Funktion  $f(t)$  auf  $I$  ist die allgemeine Lösung von (2.92) durch die Identität

$$x(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \int f(t) y_{jn}(t) dt \quad (2.97)$$

gegeben, wobei  $y_{jk}$  die Elemente der inversen Matrix  $X^{-1}$  sind.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' + x = f(t). \quad (2.98)$$

Die unabhängige Lösungen der homogenen DGL  $x'' + x = 0$  sind  $x_1(t) = \cos t$  und  $x_2(t) = \sin t$ , und deshalb ist die Fundamentalmatrix

$$X = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Nach (2.97) erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.98):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \int f(t) y_{12}(t) dt + x_2(t) \int f(t) y_{22}(t) dt \\ &= \cos t \int f(t) (-\sin t) dt + \sin t \int f(t) \cos t dt. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Z.B., für  $f(t) = \sin t$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \cos t \int \sin t (-\sin t) dt + \sin t \int \sin t \cos t dt \\
 &= -\cos t \int \sin^2 t dt + \frac{1}{2} \sin t \int \sin 2t dt \\
 &= -\cos t \left( \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C_1 \right) + \frac{1}{4} \sin t (-\cos 2t + C_2) \\
 &= -\frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{4} (\sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t) + c_1 \cos t + c_2 \sin t \\
 &= -\frac{1}{2}t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t.
 \end{aligned}$$

Die gleiche Antwort kann auch mit Hilfe von Satz 2.12 gewonnen werden, da die Störfunktion  $\sin t$  ein Quasipolynom ist.

Betrachten ein anderes Beispiel von Störfunktion  $f(t) = \tan t$ , die kein Quasipolynom ist. In diesem Fall erhalten wir aus (2.99)<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 x &= \cos t \int \tan t (-\sin t) dt + \sin t \int \tan t \cos t dt \\
 &= \cos t \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right) + \sin t \right) - \sin t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t \\
 &= \frac{1}{2} \cos t \ln \left( \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right) + c_1 \cos t + c_2 \sin t.
 \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Das Integral  $\int \tan x \sin t dt$  kann wie folgt bestimmt werden:

$$\int \tan x \sin t dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{dt}{\cos t} - \sin t,$$

wobei

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{d \sin t}{\cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} + C.$$

Jetzt zeigen wir, wie man die Methode von Variation der Konstanten für DGL (2.98) direkt benutzen kann, ohne die Formel (2.97) zu erinnern. Zunächst bestimmt man die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x'' + x = 0$  wie üblich:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad (2.100)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  sofern Konstanten sind. Man erhält den Lösungsansatz für (2.98) indem man die Konstanten  $C_k$  durch die Funktionen  $C_k(t)$  ersetzt:

$$x(t) = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t. \quad (2.101)$$

Um die unbekanntenen Funktionen  $C_1(t)$  und  $C_2(t)$  zu bestimmen, finden wir zwei Gleichungen für  $C_1$  und  $C_2$ . Durch Ableitung von (2.101) erhalten wir

$$\begin{aligned} x'(t) &= -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t \\ &\quad + C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t, \end{aligned} \quad (2.102)$$

und wählen die erste Gleichung wie folgt:

$$C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0. \quad (2.103)$$

Die Motivation für (2.103) ist folgende. Betrachten wir wieder das entsprechende Normalsystem

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

mit der unbekanntenen Vektorfunktion  $\mathbf{x} = (x, x')$ . Das homogene System hat zwei unabhängige Lösungen  $\begin{pmatrix} \cos t \\ (\cos t)' \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \sin t \\ (\sin t)' \end{pmatrix}$ , die von den Lösungen  $x_1(t) = \cos t$  und  $x_2(t) = \sin t$  der DGL  $x'' + x = 0$  entstehen. Deshalb ist der Lösungsansatz für (2.104) wie folgt:

$$\mathbf{x}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ (\cos t)' \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ (\sin t)' \end{pmatrix},$$

deren Komponenten somit sind

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\ x'(t) &= C_1(t) (\cos t)' + C_2(t) (\sin t)'. \end{aligned}$$

Ableiten die erste Zeile und Subtrahieren die zweite Zeile ergibt (2.103).

Ableiten von der ersten Zeile von (2.102) ergibt

$$\begin{aligned} x'' &= -C_1 \cos t - C_2 \sin t \\ &\quad - C_1' \sin t + C_2' \cos t, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$x'' + x = -C_1' \sin t + C_2' \cos t.$$

Bemerken Sie, dass alle Terme mit  $C_1$  und  $C_2$  sich herauskürzen lassen. Somit erhalten wir die zweite Gleichung für  $C_1'$  und  $C_2'$ :

$$-C_1' \sin t + C_2' \cos t = f(t).$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = 0 \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = f(t) \end{cases}$$

ergibt

$$C_1' = -f(t) \sin t, \quad C_2' = f(t) \cos t$$

und somit

$$C_1 = - \int f(t) \sin t dt, \quad C_2 = \int f(t) \cos t dt.$$

Einsetzen in (2.101) ergibt (2.99).

## 2.5 Wronski-Determinante und Liouvillesche Formel

Sei  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ .

**Definition.** Sei  $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$  eine Folge von  $n$  Vektorfunktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Man definiert die *Wronski-Determinante*  $W(t)$  von der Folge  $\{x_k\}$  wie folgt:

$$W(t) = \det(x_1(t) \mid x_2(t) \mid \dots \mid x_n(t)),$$

wobei die Matrix auf der rechten Seite aus den Spaltenvektoren  $x_1, \dots, x_n$  besteht.

Somit ist  $W(t)$  die Determinante von der  $n \times n$  Matrix.

**Definition.** Sei  $\{x_k\}_{k=1}^n$  eine Folge von  $n$  Skalarfunktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $(n-1)$ -fach differenzierbar auf  $I$  sind. Man definiert die Wronski-Determinante  $W(t)$  von der Folge  $\{x_k\}$  wie folgt:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Man schreibt auch  $W(x_1, \dots, x_n)(t)$  wenn die Abhängigkeit von  $x_1, \dots, x_n$  explizit gezeigt werden muss.

**Lemma 2.17** (a) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen des Normalsystems  $x' = A(t)x$ , wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig auf einem Intervall  $I$  ist. Sei  $W(t)$  die Wronski-Determinante der Folge  $\{x_k\}$ . Dann gilt die folgende Dichotomie:

- entweder  $W(t) = 0$  für alle  $t \in I$  und die Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  sind linear abhängig.
  - oder  $W(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  und die Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  sind linear unabhängig.
- (b) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen der skalaren DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0,$$

wobei  $a_k(t)$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Sei  $W(t)$  die Wronski-Determinante der Folge  $\{x_k\}$ . Dann gilt die gleiche Dichotomie:

- entweder  $W(t) = 0$  für alle  $t \in I$  und die Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  sind linear abhängig.
- oder  $W(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  und die Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  sind linear unabhängig.

**Beweis.** (a) Sind die Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig, so sind nach Korollar 2.14 die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  linear unabhängig für jedes  $t$ , woraus folgt  $W(t) \neq 0$ . Sind die Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  linear abhängig, so sind offensichtlich die Vektoren  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  linear abhängig für jedes  $t$ , und somit  $W(t) \equiv 0$ .

(b) Betrachten wir die Vektorfunktionen

$$\mathbf{x}_k = \left( x_k, x'_k, \dots, x_k^{(n-1)} \right),$$

so dass  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  eine Folge von Lösungen des Normalsystems  $\mathbf{x}' = A(t) \mathbf{x}$  sind, wobei  $A(t)$  durch (2.17) definiert wird. Offensichtlich ist die Wronski-Determinante  $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  gleich die Wronski-Determinante  $W(x_1, \dots, x_n)$ , und die Folge  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  ist linear unabhängig genau dann, wenn die Folge  $x_1, \dots, x_n$  ist linear unabhängig. Dann folgt die Behauptung aus Teil (a). ■

**Satz 2.18** (Liouvillesche Formel)

(a) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen des Normalsystems  $x' = A(t)x$ , wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig auf einem Intervall  $I$  ist. Dann erfüllt die Wronski-Determinante  $W(t)$  dieser Folge die Identität

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{Spur } A(\tau) d\tau \right), \quad (2.105)$$

für alle  $t, t_0 \in I$ .

**Bemerkung.** Wir erinnern uns daran, dass die Spur  $\text{Spur } A$  der Matrix  $A$  gleich die Summe der Diagonalelementen dieser Matrix ist.

(b) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Folge von  $n$  Lösungen der skalaren DGL

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0,$$

wobei  $a_k(t)$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Dann erfüllt die Wronski-Determinante  $W(t)$  dieser Folge die Identität

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( - \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right). \quad (2.106)$$

**Beweis.** (a) Bezeichnen wir mit  $x_{ij}$  die Elementen von der Matrix

$$X = (x_1 | x_2 | \dots | x_n),$$

wobei  $i$  der Zeilenindex und  $j$  der Spaltenindex ist. Insbesondere gilt für  $j$ -te Spalte  $x_j$  von  $X$

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T,$$

und für  $i$ -te Zeile  $z_i$  von  $X$

$$z_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}).$$

Stellen wir  $\det X$  in der folgenden Form dar:

$$W(t) = \det X = \det \begin{pmatrix} \boxed{z_1} \\ \boxed{z_2} \\ \vdots \\ \boxed{z_n} \end{pmatrix}.$$

**Behauptung.** Die folgende Identität gilt für alle  $t \in I$ :

$$W'(t) = \det \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

Für den Beweis benutzen wir die folgende Verallgemeinerung der Produktregel: seien  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$(f_1 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n', \quad (2.108)$$

die man durch Induktion nach  $n$  beweist. Ferner benutzen wir die Leibniz-Formel

$$W(t) = \det X = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \dots x_{n\sigma(n)}, \quad (2.109)$$

wobei  $S_n$  die Menge von allen Permutationen von Elementen  $\{1, \dots, n\}$  ist und  $\operatorname{sgn}(\sigma)$  das Signum der Permutation  $\sigma$  bezeichnet. Ableiten von (2.109) mit Hilfe von (2.108) ergibt

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)}' x_{2\sigma(2)} \dots x_{n\sigma(n)} \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)}' \dots x_{n\sigma(n)} \\ &+ \dots + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \dots x_{n\sigma(n)}'. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Die erste Summe in (2.110) sieht genauso aus, wie die Summe in (2.109), abgesehen davon, dass die Elemente  $x_{1j}$  der ersten Zeile durch ihre Ableitungen ersetzt werden. Deshalb ist die erste Summe in (2.110) gleich

$$\det \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

und das Gleiche gilt für alle andere Summen, woraus (2.107) folgt.

Schreiben wir jetzt die DGL  $x' = Ax$  komponentenweise um:

$$\chi_i' = \sum_{k=1}^n A_{ik} \chi_k,$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $\chi_i$  die Komponenten von  $x$  und  $A_{ik}$  die Komponenten der Matrix  $A$  sind. Für die Lösungen  $x = x_j$  bedeutet es, dass

$$x_{i,j}' = \sum_{k=1}^n A_{ik} x_{k,j}, \quad (2.111)$$

für alle  $j = 1, \dots, n$ . Da  $x_{ij}$  die  $j$ -te Komponente der Zeile  $z_i$  ist und die Koeffizienten  $A_{ik}$  von  $j$  nicht abhängen, ergibt (2.111) die gleiche Identität für die Zeile  $z_i$ :

$$z'_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} z_k.$$

Z.B., es gilt

$$z'_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + \dots + A_{1n}z_n,$$

woraus folgt durch die Linearität der Determinante, dass

$$\det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + A_{12} \det \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \dots + A_{1n} \det \begin{pmatrix} z_n \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Bemerken wir, dass alle Determinanten auf der rechten Seite verschwinden, außer der ersten Determinante, da sie die gleichen Zeilen haben. Somit erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} z'_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A_{11} W(t).$$

Analog berechnen wir die anderen Terme in (2.107) und erhalten

$$\begin{aligned} W'(t) &= (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}) W(t) \\ &= (\text{Spur } A) W(t). \end{aligned} \tag{2.112}$$

Nach Lemma 2.17 ist  $W(t)$  entweder identisch 0 oder niemals 0. Im ersten Fall ist die Identität (2.105) trivial. Im zweiten Fall lösen wir die trennbare DGL (2.112) indem wir durch  $W(t)$  dividieren und nach  $t$  integrieren. Es folgt, dass<sup>6</sup>

$$\ln \frac{W(t)}{W(t_0)} = \int_{t_0}^t \text{Spur } A(\tau) d\tau,$$

was äquivalent zu (2.105) ist.

(b) Die skalare DGL ist äquivalent zum Normalsystem  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Da  $W(x_1, \dots, x_n) = W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  und  $\text{Spur } A = -a_1$ , (2.106) folgt aus (2.105). ■

Im Fall von skalaren DGLen 2-ter Ordnung

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$$

---

<sup>6</sup>Wir betonen, dass  $W(t)$  und  $W(t_0)$  das gleiche Vorzeichen haben und somit ist ihr Verhältnis positive.

hilft die Liouvillesche Formel eine allgemeine Lösung zu bestimmen, falls eine spezielle Lösung gegeben ist. In der Tat, seien  $x_0(t)$  eine spezielle Lösung, die nie verschwindet, und  $x(t)$  eine andere Lösung. Dann nach (2.106) haben wir

$$W(x_0, x)(t) = \det \begin{pmatrix} x_0 & x \\ x_0' & x' \end{pmatrix} = C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right),$$

und somit

$$x_0 x' - x x_0' = C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right).$$

Dividieren durch  $x_0^2$  und Anwendung der Identität

$$\frac{x_0 x' - x x_0'}{x_0^2} = \left( \frac{x}{x_0} \right)'$$

ergeben

$$\left( \frac{x}{x_0} \right)' = \frac{C \exp \left( - \int a_1(t) dt \right)}{x_0^2}. \quad (2.113)$$

Somit kann die allgemeine Lösung  $x(t)$  durch Integration bestimmt werden.

**Beispiel.** Betrachten wir die DGL

$$x'' - 2(1 + \tan^2 t)x = 0.$$

Diese DGL hat eine Lösung  $x_0(t) = \tan t$ , dass aus der Identitäten

$$\frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2} \tan t = 2 \tan t (\tan^2 t + 1)$$

folgt. Somit erhalten wir aus (2.113)

$$\left( \frac{x}{\tan t} \right)' = \frac{C}{\tan^2 t},$$

woraus folgt durch Integration<sup>7</sup>

$$x = C \tan t \int \frac{dt}{\tan^2 t} = C \tan t (-t - \cot t + C_1).$$

Die Antwort kann auch in der Form

$$x(t) = c_1 (t \tan t + 1) + c_2 \tan t$$

geschrieben werden, wobei  $c_1 = -C$  und  $c_2 = CC_1$ .

---

<sup>7</sup>Das Integral  $\int \frac{dt}{\tan^2 t} = \int \cot^2 t dt$  kann mit Hilfe von der Identität

$$(\cot t)' = -\cot^2 t - 1$$

bestimmt werden, die ergibt

$$\int \cot^2 t dt = -t - \cot t + C.$$

## 2.6 Lösungsmethoden für homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Betrachten wir ein Normalsystem

$$x' = Ax$$

wobei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ein konstanter Operator (bzw eine  $n \times n$  Matrix) ist und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine unbekannte Funktion. Nach Satz 2.13 ist die allgemeine Lösung dieses Systems durch Linearkombination von  $n$  unabhängige Lösungen gegeben. In diesem Abschnitt entwickeln wir die Methode für Bestimmung solcher Lösungen.

### 2.6.1 Spezieller Fall

Zunächst benutzen den folgenden Ansatz für Lösung:  $x = e^{\lambda t}v$  wobei  $v$  ein Nicht-Null-Vektor aus  $\mathbb{C}^n$  ist und  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine Konstante. Einsetzen diesen Ansatz in DGL  $x' = Ax$  ergibt

$$\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av,$$

also  $Av = \lambda v$ . Erinnern wir uns daran, dass ein Nicht-Null-Vektor  $v$ , der die Gleichung  $Av = \lambda v$  erfüllt, als *Eigenvektor* von  $A$  bezeichnet wird. Der entsprechende Wert von  $\lambda$  heißt der *Eigenwert*. Somit gilt folgendes.

**Behauptung.** Die Funktion  $x(t) = e^{\lambda t}v$  stellt eine Lösung des Normalsystems  $x' = Ax$  dar genau dann, wenn  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  mit dem Eigenwert  $\lambda$  ist.

Das Wert  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist genau dann ein Eigenwert, wenn der Operator  $A - \lambda \text{id}$  nicht invertierbar ist, also wenn

$$\det(A - \lambda \text{id}) = 0, \tag{2.114}$$

wobei  $\text{id}$  den Identitätsoperator in  $\mathbb{C}^n$  bezeichnet. Diese Gleichung heißt die *charakteristische Gleichung* des Operators  $A$ . Sie kann benutzt werden, um die Eigenwerte zu bestimmen. Die Funktion

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda \text{id})$$

ist ein Polynom von  $\lambda$  von Grad  $n$ , und es heißt das *charakteristische Polynom* von  $A$ . Deshalb sind die Eigenwerte von  $A$  genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda)$ .

Ist ein Eigenwert  $\lambda$  schon bekannt, so kann ein Eigenvektor aus der folgenden Gleichung

$$(A - \lambda \text{id})v = 0 \tag{2.115}$$

bestimmt werden. Wir betonen, dass Eigenvektor auf jeden Fall nicht eindeutig ist, da mit jedem Eigenvektor  $v$  auch alle seine Vielfachen Eigenvektoren sind. Die Menge von allen Lösungen von (2.115) ist ein Unterraum, der *Eigenraum* heißt; bezeichnen wir ihn mit  $E_\lambda$ . Ist  $\lambda$  Eigenwert, dann gilt  $\dim E_\lambda \geq 1$ . Man erhält genau  $k = \dim E_\lambda$  unabhängige Lösungen in der Form  $x(t) = e^{\lambda t}v$ , indem man  $k$  unabhängige Vektoren  $v$  in  $E_\lambda$  wählt.

**Satz 2.19** Hat ein Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_n$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so stellen die folgenden  $n$  Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2, \dots, e^{\lambda_n t}v_n \tag{2.116}$$

linear unabhängige Lösungen von  $x' = Ax$  dar. Somit ist die allgemeine Lösung dieses Systems durch die Identität

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} v_k$$

gegeben, wobei  $C_1, \dots, C_k$  beliebige komplexe Konstanten sind.

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ist  $\lambda$  ein nicht-reeller Eigenwert von  $A$  mit dem Eigenvektor  $v$ , so ist  $\bar{\lambda}$  auch ein Eigenwert mit dem Eigenvektor  $\bar{v}$ , und die Funktionen  $e^{\lambda t} v, e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$  in der Folge (2.116) können durch die reellwertigen Funktionen  $\operatorname{Re}(e^{\lambda t} v), \operatorname{Im}(e^{\lambda t} v)$  ersetzt werden. Nach Ersetzung von allen Paaren  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$  mit nicht-reellen Nullstellen  $\lambda$  erhält man  $n$  reellwertige, linear unabhängige Lösungen von (2.116).

**Beweis.** Wir haben schon gesehen, dass jede Funktion  $e^{\lambda_k t} v_k$  eine Lösung ist. Da die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sind, auch die Funktionen  $\{e^{\lambda_k t} v_k\}_{k=1}^n$  sind linear unabhängig, was beweist die erste Behauptung.

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Gilt  $Av = \lambda v$ , so gilt durch die komplexe Konjugation auch  $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ , wobei benutzt man, dass die Koeffizienten der Matrix  $A$  reell sind. Somit ist  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $A$  mit dem Eigenvektor  $\bar{v}$ , und die beiden Funktionen

$$x_1(t) = e^{\lambda t} v, \quad x_2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v} = \overline{x_1(t)}$$

sind die Lösungen. Da

$$x_1 = \operatorname{Re} x_1 + i \operatorname{Im} x_1, \quad x_2 = \operatorname{Re} x_1 - i \operatorname{Im} x_1$$

und somit

$$\operatorname{Re} x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \operatorname{Im} x_1 = \frac{x_1 - x_2}{2i},$$

wie sehen, dass die Paare  $x_1, x_2$  und  $\operatorname{Re} x_1, \operatorname{Im} x_1$  auseinander durch Lineartransformationen entstehen. Daraus folgt, dass die linearen Hüllen der beiden Paaren gleich sind, also

$$\operatorname{span}(x_1, x_2) = \operatorname{span}(\operatorname{Re} x_1, \operatorname{Im} x_1),$$

und deshalb sind diese Paare in jeder Basis durch einander ersetzbar. ■

Folgendes ist aus linearer Algebra bekannt: hat  $A$   $n$  verschiedenen Eigenwerte, so sind ihre Eigenvektoren unbedingt unabhängig. In diesem Fall ist Satz 2.19 verwendbar. Noch ein Fall, wenn die Voraussetzungen von Satz 2.19 erfüllt sind, ist wenn der Operator  $A$  durch eine symmetrische reelle Matrix dargestellt wird. In diesem Fall existiert immer eine Basis von Eigenvektoren.

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

und schreiben es in der Vektorform um:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1,$$

die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 - 1 = 0$ , und die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Für den Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  erhalten wir aus (2.115) die folgende Gleichung für den Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was nur eine unabhängige Gleichung  $a - b = 0$  liefert. Wählen  $a = 1$  ergibt  $b = 1$  und somit den Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog für den Eigenwert  $\lambda_2 = -1$  erhalten wir die folgende Gleichung für  $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was äquivalent zu  $a + b = 0$  ist. Daraus folgt

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da  $v_1$  und  $v_2$  unabhängig sind, erhalten wir die allgemeine Lösung in der Form

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{pmatrix},$$

also

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir das Normalsystem

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}.$$

Die Matrix des Systems ist  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , und das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Die charakteristische Gleichung ist  $\lambda^2 + 1 = 0$ , woraus folgt, dass die Eigenwerte  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$  sind. Für den Eigenwert  $\lambda_1 = i$  erhalten wir die folgende Gleichung für den Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

die ist äquivalent zu  $ia + b = 0$ . Die Wahl  $a = i$  ergibt  $b = 1$  und

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die entsprechende Lösung

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}.$$

Die zweite komplexwertige Lösung braucht nicht bestimmt werden, da wir mit Hilfe von Satz 2.19 zwei unabhängige reelle Lösungen erhalten:

$$\operatorname{Re} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

und somit auch die allgemeine reelle Lösung

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \operatorname{Re} \mathbf{x}_1 + C_2 \operatorname{Im} \mathbf{x}_1 = C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{pmatrix}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0. \end{cases}$$

Dieses System lässt sich sehr einfach lösen wie folgt:  $y = C_1$  und  $x = C_1 t + C_2$ , so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allerdings kann diese Antwort mit Hilfe von Satz 2.19 nicht erhalten werden. In der Tat ist die Matrix des Systems

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2,$$

und die charakteristische Gleichung  $P(\lambda) = 0$  liefert nur einen Eigenwert  $\lambda = 0$ . Den Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  von  $\lambda = 0$  wird aus der folgenden Gleichung bestimmt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

woraus folgt  $b = 0$ . Deshalb erhalten wir nur einen Eigenvektor  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und somit nur eine Lösung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . In diesem Fall existiert keine Basis aus Eigenvektoren, und man braucht eine andere Methode.

## 2.6.2 Exponentialfunktion von Operatoren

Wir erinnern und daran, dass eine skalare DGL  $x' = Ax$ , wobei  $A$  eine Konstante ist, hat die allgemeine Lösung  $x(t) = Ce^{At}$ . In diesem Abschnitt definieren wir die Exponentialfunktion  $e^A$  für lineare Operatoren  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und benutzen sie um das Normalsystem  $x' = Ax$  zu lösen.

Wählen wir eine Norm in  $\mathbb{C}^n$  und definieren die Operatornorm von  $A$  wie folgt:

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (2.117)$$

Wir haben im Abschnitt 1.9.3 bewiesen, dass die Operatornorm eine Norm im Vektorraum  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ist.

**Definition.** Für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definieren wir einen Operator  $e^A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  durch die Identität

$$e^A = \text{id} + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \quad (2.118)$$

Man schreibt auch  $\exp(A) = e^A$ .

Um diese Definition zu begründen, müssen wir überprüfen, dass die Reihe in (2.118) konvergiert.

**Lemma 2.20** Die Potenzreihe (2.118) konvergiert für jedes  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Darüber hinaus konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \quad (2.119)$$

lokal gleichmäßig in  $t \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** Wir beweisen, dass die Potenzreihe absolut konvergent ist, also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| < \infty, \quad (2.120)$$

dann sie auch konvergiert. Die Eigenschaft  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  von der Operatornorm (vgl. (1.57)) impliziert durch Induktion, dass  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  für alle  $k = 1, 2, \dots$ , woraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty,$$

was zu beweisen war.

Um die lokal-gleichmäßig Konvergenz von (2.119) zu beweisen, es reicht folgendes zu zeigen: verändert  $t$  in einem beschränkten Intervall  $I$ , dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in I} \left\| \frac{(tA)^k}{k!} \right\| < \infty. \quad (2.121)$$

Da  $|t|$  beschränkt ist, z.B.  $|t| \leq C$ , erhalten wir

$$\left\| (tA)^k \right\| \leq |t|^k \|A^k\| \leq C^k \|A\|^k$$

und somit ist die Summe in (2.121) durch die folgende Summe beschränkt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k \|A\|^k}{k!} = e^{C\|A\|} < \infty.$$

■

Die lokal-gleichmäßig Konvergenz von (2.119) ergibt, dass die Funktion

$$F(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \quad (2.122)$$

stetig nach  $t \in \mathbb{R}$  ist. Unsere Absicht ist zu zeigen, dass diese Funktion auch differenzierbar ist.

**Satz 2.21** Für jedes  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  erfüllt die Funktion  $F(t) = e^{tA}$  die DGL  $F' = AF$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Folglich ist die allgemeine Lösung des Normalsystems  $x' = Ax$  durch die Identität  $x = e^{tA}v$  gegeben, wobei  $v \in \mathbb{C}^n$  ein beliebiger Vektor ist.

Die Funktion  $x = x(t)$  nimmt die Werte wie üblich in  $\mathbb{C}^n$  an, während  $F(t)$  eine Funktion mit Werten in  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ist. Da die Produkt  $AF$  von zwei Operatoren als ein linearer Operator  $F \mapsto AF$  im Vektorraum  $\mathbb{C}^{n \times n}$  betrachtet werden kann, ist die Gleichung  $F' = AF$  eine lineare DGL für  $\mathbb{C}^{n \times n}$ -wertige Funktion  $F$ .

**Beweis.** Betrachten wir die Reihe von den Ableitungen der Terme von (2.122)

$$G(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{(tA)^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} = AF. \quad (2.123)$$

Nach Lemma 2.20 ist die Reihe in (2.123) konvergent, und zwar lokal-gleichmäßig nach  $t$ , woraus folgt, dass  $F$  differenzierbar nach  $t$  ist und  $F' = G$ . Wir erhalten, dass  $F' = AF$ .

Für die Funktion  $x(t) = e^{tA}v$  haben wir

$$x' = (e^{tA})' v = (Ae^{tA}) v = Ax$$

so dass  $x(t)$  eine Lösung der DGL  $x' = Ax$  ist für jedes  $v \in \mathbb{C}^n$ . Es bleibt zu zeigen, dass die Menge von Lösungen  $x(t) = e^{tA}v$  die allgemeine Lösung ist. Bemerken wir, dass die Lösung  $x(t) = e^{tA}v$  den Anfangswert  $x(0) = v$  erfüllt, da  $e^{0A} = e^0 = \text{id}$ . Sei  $x(t)$  eine beliebige Lösung von  $x' = Ax$ . Bezeichnen wir  $v = x(0)$ . Dann lösen die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $e^{tA}v$  das gleiche Anfangswertproblem und deshalb sind nach Satz 2.1 identisch. ■

**Korollar 2.22** Die Matrix  $e^{tA}$  ist eine Fundamentalmatrix des Normalsystems  $x' = Ax$ .

**Beweis.** Sei  $\{v_k\}_{k=1}^n$  die Standardbasis in  $\mathbb{C}^n$ . Betrachten wir die Lösungen  $e^{tA}v_1, \dots, e^{tA}v_n$  und bemerken folgendes:

1. die Lösungen  $e^{tA}v_1, \dots, e^{tA}v_n$  sind unabhängig;
2. der Spaltenvektor  $e^{tA}v_k$  ist die  $k$ -te Spalte der Matrix  $e^{tA}$ .

Somit besteht die Matrix  $e^{tA}$  aus den Spalten  $e^{tA}v_k$ , die  $n$  unabhängige Lösungen darstellen. Nach Definition ist  $e^{tA}$  eine Fundamentalmatrix der Systems  $x' = Ax$ . ■

**Beispiel.** Sei  $A$  eine Diagonalmatrix

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für jedes  $k = 0, 1, \dots$

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

und

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

**Beispiel.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $A^2 = 0$  und somit  $A^k = 0$  für alle  $k \geq 2$ , erhalten wir

$$e^{tA} = \text{id} + tA = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die allgemeine Lösung von  $x' = Ax$  wie folgt:

$$x(t) = e^{tA}v = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $C_1, C_2$  die Komponenten  $v$  und deswegen beliebige Konstanten sind.

Mit Hilfe von Satz 2.21 lässt sich die Lösung von System  $x' = Ax$  auf Bestimmung von  $e^{tA}$  zurückführen. Die Methoden für Bestimmung von  $e^A$  für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  besprechen wir in den nächsten Abschnitten.

### 2.6.3 Eine Eigenschaft der Exponentialfunktion

**Definition.** Man sagt, dass die Operatoren  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  *kommutieren* (vertauschen) wenn  $AB = BA$  gilt.

Allgemeine kommutieren die Operatoren nicht. Aber fall  $A$  und  $B$  kommutieren, dann gelten für  $A$  und  $B$  verschiedene Identitäten, wie für Zahlen, z.B.,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2. \quad (2.124)$$

Für beliebige Operatoren  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2,$$

woraus (2.124) folgt genau dann, wenn  $AB = BA$ .

**Lemma 2.23** *Kommutieren die Operatoren  $A$  und  $B$ , so gilt die Identität*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

**Beweis.** Der Beweis besteht aus einer Folge von Behauptungen.

**Behauptung 1.** *Kommutieren die Operatoren  $A, B, C$  paarweise, so kommutieren auch  $AC$  und  $B$ .*

In der Tat haben wir mit Hilfe von Assoziativgesetz

$$(AC)B = A(CB) = A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC).$$

Daraus folgt, dass  $A^k$  und  $B$  für jedes  $k = 0, 1, \dots$  kommutieren, vorausgesetzt, dass  $A$  und  $B$  kommutieren. Der Induktionsanfang für  $k = 0$  ist klar. Der Induktionsschritt von  $k - 1$  nach  $k$  geht wie folgt. Betrachten wir drei Operatoren  $A, B, A^{k-1}$ , die nach Induktionsvoraussetzung paarweise kommutieren. Dann kommutieren auch  $AA^{k-1} = A^k$  und  $B$ .

**Behauptung 2.** *Kommutieren  $A$  und  $B$ , so kommutieren auch  $e^A$  und  $B$ .*

Da  $A^k$  und  $B$  kommutieren, wir erhalten

$$\begin{aligned} e^A B &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k B}{k!} \right) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B A^k}{k!} \right) = B \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) = B e^A. \end{aligned}$$

Wir haben die folgenden Identitäten benutzt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) B = \sum_{k=0}^{\infty} A_k B$$

und

$$B \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} B A_k,$$

die für alle Operatoren  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und für alle konvergenten Reihen  $\sum_k A_k$  von Operatoren  $A_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gelten. In der Tat ist die (linke bzw rechte) Multiplikation mit  $B$  ein linearer und somit stetiger (vgl. Abschnitt 1.9.3) Operator in  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , woraus die beiden Identitäten folgen.

**Behauptung 3.** Sind  $A(t)$  und  $B(t)$  differenzierbare Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , so gilt

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t). \quad (2.125)$$

In der Tat haben wir für jede Komponente

$$\begin{aligned} \left( (AB)_{ij} \right)' &= \left( \sum_k A_{ik} B_{kj} \right)' = \sum_k A'_{ik} B_{kj} + \sum_k A_{ik} B'_{kj} \\ &= (A'B)_{ij} + (AB')_{ij} = (A'B + AB')_{ij}, \end{aligned}$$

woraus (2.125) folgt.

Jetzt können wir den Beweis beenden wie folgt. Betrachten wir die Funktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  die durch die Identität

$$F(t) = e^{tA} e^{tB}$$

definiert ist. Ableiten die Funktion  $F$  mit Hilfe von (2.125) und Satz 2.21 und Anwendung der Behauptungen 2 ergibt

$$F'(t) = (e^{tA})' e^{tB} + e^{tA} (e^{tB})' = A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = A e^{tA} e^{tB} + B e^{tA} e^{tB} = (A + B) F(t).$$

Andererseits, nach Satz 2.21 erfüllt die Funktion

$$G(t) = e^{t(A+B)}$$

dieselbe Gleichung

$$G' = (A + B) G.$$

Da  $G(0) = F(0) = \text{id}$ , wir sehen, dass die beiden Vektorfunktionen  $F(t)$  und  $G(t)$  das gleiche Anfangswertproblem lösen. Nach Eindeutigkeit der Lösung von Satz 2.1 beschließen wir, dass  $F(t) \equiv G(t)$ . Insbesondere gilt  $F(1) = G(1)$ , also  $e^A e^B = e^{A+B}$ , was zu beweisen war. ■

**Alternativer Beweis.** Hier reißen wir einen direkten algebraischen Beweis der Identität  $e^{A+B} = e^A e^B$  um. Zunächst beweist man durch Induktion nach  $n$  die binomische Formel

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \quad (2.126)$$

(vorausgesetzt, dass  $A$  und  $B$  kommutieren) genauso, wie die klassische binomische Formel für Zahlen. Dann erhalten wir

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Andererseits benutzen wir die Cauchy-Produktformel (Cauchy-Faltung), die besagt, dass für absolut konvergente Reihen (auch von Operatoren) die folgende Identität gilt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} B_l \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} A_k B_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}.$$

Daraus folgt

$$e^A e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k! (n-k)!} = e^{A+B},$$

was zu beweisen war.

**Bemerkung.** Mit Hilfe von DGLen kann man auch andere interessante Eigenschaften der Exponentialfunktion beweisen, z.B. die Identität

$$\det e^A = e^{\text{Spur } A}$$

(vgl. die Übungen).

## 2.6.4 Exponentialfunktion von einem Jordanblock

Hier bestimmen wir  $e^A$  wenn  $A$  ein Jordanblock ist.

**Definition.** Eine  $n \times n$  Matrix  $J$  heißt ein *Jordanblock* wenn sie eine Bidiagonalmatrix mit der folgenden Form ist

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.127)$$

wobei eine komplexe Zahl  $\lambda$  auf der Hauptdiagonale steht, 1 auf der ersten oberen Nebendiagonale steht, und alle anderen Elementen 0 sind. Die Zahl  $n$  heißt die Dimension von Jordanblock  $J$  und  $\lambda$  heißt der Eigenwert von  $J$  (offensichtlich,  $\lambda$  ist ein einziger Eigenwert von Matrix  $J$ ).

Wir bemerken, dass  $J = \lambda \text{id} + N$  wobei

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

auch ein Jordanblock mit Eigenwert 0 ist. Ein Jordanblock mit Eigenwert 0 heißt *nilpotenter Jordanblock*.

Da die Matrizen  $\lambda \text{id}$  und  $N$  kommutieren (weil  $\text{id}$  mit allen Matrizen kommutiert), erhalten wir nach Lemma 2.23

$$e^{tJ} = e^{t\lambda \text{id}} e^{tN} = e^{t\lambda} e^{tN}. \quad (2.129)$$

Um  $e^{tN}$  zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Potenzen  $N^2, N^3$ , usw. Die Elementen von Matrix  $N$  sind folgende:

$$N_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{fall } j = i + 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $i$  der Zeilenindex und  $j$  der Spaltenindex sind. Daraus folgt

$$(N^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n N_{ik}N_{kj} = \sum_{\substack{k=i+1 \\ j=k+1}} N_{ik}N_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i + 2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Elementen mit dem Wert 1 die 2-te obere Nebendiagonale bilden. Durch Induktion erhalten wir, dass

$$N^k = \begin{pmatrix} & & & & k \\ & & & & \searrow \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Elementen mit dem Wert 1 die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden, vorausgesetzt  $k < n$ , und  $N^k = 0$  falls  $k \geq n$ .<sup>8</sup> Daraus folgt

$$e^{tN} = \text{id} + \frac{t}{1!}N + \frac{t^2}{2!}N^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.130)$$

wobei die Elementen mit dem Wert  $\frac{t^k}{k!}$  die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden,  $k \geq 0$ . Kombinieren (2.130) und (2.129) ergibt folgendes.

**Lemma 2.24** *Sei  $J$  ein Jordanblock (2.127). Dann gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$*

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} & \ddots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} \\ 0 & & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}, \quad (2.131)$$

wobei die Elementen mit dem Wert  $\frac{t^k}{k!}e^{t\lambda}$  die  $k$ -te obere Nebendiagonale bilden,  $k \geq 0$ .

<sup>8</sup>Jede Matrix  $A$  mit der Eigenschaft  $A^k = 0$  mit einer natürlichen Zahl  $k$  heißt *nilpotent*. Deshalb ist  $N$  eine nilpotente Matrix, was mit dem Begriff "nilpotenter Jordanblock" übereinstimmt.

Nach Korollar 2.22 stellen die Spalten der Matrix  $e^{tJ}$  unabhängige Lösungen des Normalsystems  $x' = Jx$  dar. Somit erhalten wir die folgenden  $n$  unabhängigen Lösungen:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1!} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \\ \frac{t}{1!} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t} \\ \dots \\ \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \\ \frac{t}{1!} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

### 2.6.5 Blockdiagonalmatrizen

**Definition.** Eine Matrix  $A$  heißt *blockdiagonal* wenn  $A$  die folgende Form hat:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \boxed{A_{r-1}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

wobei  $A_1, \dots, A_r$  die Blöcke von  $A$ , also quadratische Matrizen, sind (alle Elementen von  $A$  außerhalb der Blöcke sind 0). In diesem Fall schreiben wir auch

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r).$$

**Lemma 2.25** Die folgende Identität gilt:

$$e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_r)} = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_r}). \quad (2.132)$$

Man kann die Identität (2.132) ausführlicher umschreiben wie folgt:

$$e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{e^{A_2}} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \boxed{e^{A_{r-1}}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{e^{A_r}} \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Offensichtlich haben wir

$$A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k),$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k) = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_r^k}{k!}\right) \\ &= \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_r}). \end{aligned}$$

■

**Definition.** Eine Matrix  $A$  heißt *Jordan-Normalform*, wenn  $A$  eine Blockdiagonalmatrix ist und alle Blöcke von  $A$  Jordanblöcke sind, also

$$A = \text{diag}(J_1, \dots, J_r) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{J_{r-1}} & \\ & & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix},$$

wobei  $J_i$  Jordanblöcke sind.

Nach Lemma 2.25 haben wir für eine Jordan-Normalform  $A$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_r}),$$

wobei die Blöcke  $e^{tJ_k}$  mit Hilfe von Lemma 2.24 bestimmt werden können. Mit Satz 2.21 (bzw Korollar 2.22) erhalten wir explizit die allgemeine Lösung von  $x' = Ax$ .

**Beispiel.** Lösen wir das Normalsystem  $x' = Ax$  wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $A$  eine Jordan-Normalform mit Jordanblöcke

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 2.24 erhalten wir

$$e^{tJ_1} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^{tJ_2} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

und nach Lemma 2.25,

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, e^{tJ_2}) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 2.22 liefern die Spalten der Matrix  $e^{tA}$  unabhängige Lösungen, und die allgemeine Lösung ist ihre Linearkombination:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 t e^t \\ C_2 e^t \\ C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t} \\ C_4 e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.6.6 Darstellung von Operatoren in Jordan-Normalform

Sei die Folge  $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  eine Basis in  $\mathbb{C}^n$ . Für jeden Vector  $x \in \mathbb{C}^n$  bezeichnen wir mit  $x_j^b$  die Komponenten von  $x$  in der Basis  $b$ , also

$$x = x_1^b b_1 + x_2^b b_2 + \dots + x_n^b b_n = \sum_{j=1}^n x_j^b b_j.$$

Bezeichnen mit  $x_b$  den Spaltenvektor  $(x_1^b, \dots, x_n^b)^T$ , der den Vektor  $x$  in der Basis  $b$  darstellt. Ähnlich definiert man für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine  $n \times n$  Matrix  $A^b$ , die den Operator  $A$  in der Basis  $b$  darstellt, also folgendes gilt für jedes  $x \in \mathbb{C}^n$ :

$$(Ax)^b = A^b x^b, \quad (2.133)$$

wobei der Ausdruck  $A^b x^b$  das Produkt von der  $n \times n$  Matrix  $A^b$  und den Spaltenvektor  $x^b$  ist.

Man kann die Identität (2.133) benutzen um die Elementen von  $A^b$  zu bestimmen. Setzen wir in (2.133)  $x = b_j$  ein. Da offensichtlich

$$(b_j)^b = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$$

wobei der Wert 1 an der Stelle  $j$  ist, und somit  $A^b (b_j)^b$  die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  ist, erhalten wir, dass  $(Ab_j)^b$  auch die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  ist, also

$$A^b = \left( (Ab_1)^b \mid (Ab_2)^b \mid \dots \mid (Ab_n)^b \right).$$

Man formuliert das als eine Regel:

*die  $j$ -te Spalte von  $A^b$  wird von dem Spaltenvektor  $Ab_j$  in der Basis  $b_1, \dots, b_n$  dargestellt.*

**Beispiel.** Sei  $A$  ein Operator in  $\mathbb{C}^2$ , der in der Standardbasis  $e = \{e_1, e_2\}$  durch die Matrix

$$A^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Betrachten wir die Basis  $b = \{b_1, b_2\}$  wobei

$$b_1 = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$(Ab_1)^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_1$$

und

$$(Ab_2)^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_2$$

Daraus folgt

$$(Ab_1)^b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (Ab_2)^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$A^b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir den Operator  $e^{tA}$  erst in der Basis  $b$  und danach in der Basis  $e$ . Da  $A^b$  eine Diagonalmatrix ist, erhalten wir

$$(e^{tA})^b = e^{tA^b} = \exp \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix},$$

Da  $(e_1)^b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  und  $(e_2)^b = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ , erhalten wir

$$(e^{tA}e_1)^b = (e^{tA})^b e_1^b = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}$$

und

$$(e^{tA}e_2)^b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} e^{tA}e_1 &= \frac{e^{-t}}{2}b_1 + \frac{e^t}{2}b_2 \\ &= \frac{e^{-t}}{2}(e_1 - e_2) + \frac{e^t}{2}(e_1 + e_2) \\ &= (\cosh t)e_1 + (\sinh t)e_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{tA}e_2 &= -\frac{e^{-t}}{2}b_1 + \frac{e^t}{2}b_2 \\ &= (\sinh t)e_1 + (\cosh t)e_2. \end{aligned}$$

Deshalb ist die Matrix von  $e^{tA}$  in der Basis  $\{e_1, e_2\}$  wie folgt:

$$(e^{tA})^e = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Folglich ist diese Matrix die Fundamentalmatrix des Normalsystems

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

und die allgemeine Lösung davon ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cosh t + C_2 \sinh t \\ C_1 \sinh t + C_2 \cosh t \end{pmatrix}.$$

Eine allgemeine Matrix lässt sich immer durch einen Basiswechsel auf eine Jordan-Normalform zurückführen, und zwar nach dem folgenden Satz aus Linearer Algebra.

**Satz von Jordan.** Für jeden Operator  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  existiert eine Basis  $b$  in  $\mathbb{C}^n$ , derart, dass die Matrix  $A^b$  eine Jordan-Normalform ist.

Die Basis  $b$  heißt die *Jordan-Basis* von  $A$ , und die Matrix  $A^b$  heißt die *Jordan-Normalform* von  $A$ .





Vielfachheit von  $\lambda$ , d.h. die Dimension des Eigenraums von  $\lambda$ :

$$g = \dim \ker (A - \lambda \text{id}),$$

wobei  $\ker B$  bezeichnet den Kern (=Nullraum) des Operators  $B$ . Man kann  $g$  auch definieren als die maximal Anzahl von linear unabhängigen Eigenvektoren von  $\lambda$ . Sei  $A^b$  die Jordan-Normalform von  $A$ . Dann die Anzahl von Werten  $\lambda$  auf der Diagonale von  $A^b$  ist genau<sup>10</sup>  $m$ , und die Anzahl von Jordanblöcke mit Eigenwert  $\lambda$  ist genau<sup>11</sup>  $g$ . Insbesondere gilt  $g \leq m$ , und die Identität  $g = m$  erfolgt genau dann, wenn alle Jordanblöcke mit dem Eigenwert  $\lambda$  Dimension 1 haben.

Betrachten wir einige Beispiele von Anwendungen des Satzes 2.26.

**Beispiel.** Lösen wir das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \det (A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

und der einzige Eigenwert ist  $\lambda_1 = 3$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m_1 = 2$ . Die Gleichung für Eigenvektor  $v$  ist

$$(A - \lambda \text{id}) v = 0$$

also für  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

was äquivalent zu  $-a + b = 0$ . Die Lösung dieser Lineargleichung ist 1-dimensional, so dass  $g_1 = 1$ . Wählen  $a = 1$  und  $b = 1$  ergibt den Eigenvektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und alle anderen Eigenvektoren von  $\lambda_1 = 3$  sind seine Vielfachen. Da nur ein Jordanblock mit dem Eigenwert  $\lambda_1 = 3$  existiert, ist die Jordan-Normalform wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 2.26 erhalten wir zwei unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{3t} v_1 \\ x_2(t) &= e^{3t} (t v_1 + v_2), \end{aligned}$$

---

<sup>10</sup>Kommt  $\lambda$  genau  $m$  mal auf der Diagonale von  $A^b$  vor, dann hat das charakteristische Polynom  $P(z)$  von  $A$  die Form  $P(z) = (z - \lambda)^m Q(z)$ , wobei  $Q$  ein Polynom ohne Nullstelle  $\lambda$  ist. Daraus folgt, dass  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  mit Vielfachheit  $m$  ist.

<sup>11</sup>In der Tat entspricht jeder Jordanblock genau einen Eigenvektor aus Jordan-Basis.

wobei  $v_2$  die Hauptvektor der Stufe 2 ist, also erfüllt  $v_2$  die Gleichung

$$(A - \lambda \text{id}) v_2 = v_1.$$

Für  $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was äquivalent zu  $-a + b = 1$  ist. Wählen  $a = 0$  und  $b = 1$  ergibt

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir zwei unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ C_1 + C_2 (t+1) \end{pmatrix}.$$

**Beispiel.** Gegeben sei das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = 2$  mit  $m_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 1$  mit  $m_2 = 2$ . Die Eigenvektoren von  $\lambda_1$  erfüllen die Gleichung

$$(A - \lambda_1 \text{id}) v = 0,$$

also für  $v = (a, b, c)^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

und somit

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ -2a - 2b - c = 0 \\ 2a + b = 0. \end{cases}$$

Die drei Gleichungen sind abhängig (wie man erwartet), aber jedes Paar von Gleichungen ist unabhängig. Deshalb ist die Lösung 1-dimensional, also  $g_1 = 1$ . Wählen  $a = 1$  und lösen die Gleichungen ergibt  $b = -2$ ,  $c = 2$  und somit den Eigenvektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da  $g_1 = m_1 = 1$ , es gibt nur 1 Jordanblock von  $\lambda_1 = 2$ , und er ist 1-dimensional. Deshalb erhalten wir aus (2.135) eine Lösung

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren von  $\lambda_2 = 1$  erfüllen die Gleichung

$$(A - \lambda_2 \text{id})v = 0,$$

also für  $v = (a, b, c)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

und somit

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a - b - c = 0 \\ 2a + b + c = 0. \end{cases}$$

Dieses System hat nur eine unabhängige Lösung  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$ , die den Eigenvektor ergibt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb  $g_2 = 1$ , und somit gibt es nur einen Jordanblock mit dem Eigenwert  $\lambda_2 = 1$ , der muss  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sein. Nach Satz 2.26 ergibt dieser Jordanblock zwei Lösungen

$$x_2(t) = e^t v_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$x_3(t) = e^t (tv_1 + v_2),$$

wobei  $v_2$  der zweite Hauptvektor von  $\lambda_2$  ist, also  $v_2$  von der Gleichung

$$(A - \lambda_2 \text{id})v_2 = v_1$$

bestimmt werden muss. Für  $v_2 = (a, b, c)^T$  erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2a - b - c = 1 \\ 2a + b + c = -1. \end{cases}$$

Das System hat die Lösung  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ , die ergibt

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die dritte Lösung der DGL

$$x_3(t) = e^t (tv_1 + v_2) = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} - C_3e^t \\ -2C_1e^{2t} + (C_2 + C_3t)e^t \\ 2C_1e^{2t} + (C_3 - C_2 - C_3t)e^t \end{pmatrix}.$$

**Korollar 2.27** Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert des Operators  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m$  und geometrischen Vielfachheit  $g$ . Dann liefert  $\lambda$  genau  $m$  linear unabhängige Lösungen des Systems  $x' = Ax$  in der Form

$$x(t) = e^{\lambda t} (u_0 + u_1t + \dots + u_st^s), \quad (2.137)$$

wobei  $s = m - g$  und  $u_j$  die unbekannte Vektoren aus  $\mathbb{C}^n$  sind, die durch Einsetzen von dem Ansatz (2.137) in die DGL  $x' = Ax$  bestimmt werden können.

Die Menge von allen  $n$  Lösungen, die man mit Hilfe von allen Eigenwerten in der Form (2.137) erhält, ist unabhängig.

**Bemerkung.** In Anwendungen setzt man den Ansatz (2.137) in die DGL  $x' = Ax$  und löst sie bezüglich der unbekanntenen Werten  $u_{ij}$ , die die Komponenten der Vektoren  $u_j$  sind. Die Antwort enthält  $m$  beliebige Konstanten, und die Lösung (2.137) erscheint als eine Linearkombination von  $m$  unabhängigen Lösungen.

**Beweis.** Seien  $p_1, \dots, p_g$  die Dimensionen von den allen Jordanblöcken mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Dann  $\lambda$  kommt  $p_1 + \dots + p_g$  mal auf der Diagonale der Jordan-Normalforms vor, woraus folgt

$$\sum_{j=1}^g p_j = m.$$

Deshalb ist die gesamte Anzahl von linear unabhängigen Lösungen, die von Satz 2.26 für den Eigenwert  $\lambda$  geliefert werden, gleich  $m$ . Wir zeigen jetzt, dass alle Lösung von Satz 2.26 den Ansatz (2.137) erfüllen. In der Tat hat jede Lösung von Satz 2.26 die Form

$$x(t) = e^{\lambda t} P_j(t)$$

wobei  $P_j(t)$  ein vektorwertiges Polynom von Grad  $\leq p_j - 1$  ist. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $p_j - 1 \leq s$ , und das folgt aus der Identität

$$\sum_{j=1}^g (p_j - 1) = \left( \sum_{j=1}^g p_j \right) - g = m - g = s.$$

■

**Beispiel.** Betrachten wir noch einmal das System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x,$$

das nur den Eigenwert  $\lambda = 3$  hat und zwar mit  $m = 2$  und  $g = 1$ . Da  $m - g = 1$ , ergibt Korollar 2.27 den folgenden Ansatz für die allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{3t} (u + tv)$$

wobei  $u$  und  $v$  unbekannte Vektoren sind. Dann gilt nach Produktregel

$$x' = 3e^{3t} (u + tv) + e^{3t} v = e^{3t} (3u + (3t + 1)v),$$

und Einsetzen  $x(t)$  und  $x'(t)$  in die Gleichung ergibt

$$3u + (3t + 1)v = A(u + tv).$$

Da diese Gleichung linear in  $t$  ist, es reicht sie für zwei Werten von  $t$  zu erfüllen. Wie nehmen  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$ , was ergibt

$$\begin{aligned} Au &= 3u + v \\ Av &= 3v. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $v$  ein Eigenvektor und  $u$  ist zweiter Hauptvektor. Die beiden haben wir schon berechnet:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

aber jetzt brauchen wir alle Werten von  $u$  und  $v$ , also

$$v = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t} \left( C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 \\ C_1 (t+1) + C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

**Beispiel.** Am Ende betrachten wir inhomogenes System

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

und erinnern uns daran, dass nach Satz 2.15 die allgemeine Lösung durch die Identität

$$x(t) = X(t) \int X(t)^{-1} B(t) dt \quad (2.140)$$

gegeben ist, wobei  $X(t)$  die Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist und  $B(t)$  die Störfunktion ist. Die zwei unabhängige Lösungen des homogenen Systems sind

$$x_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix},$$

die aus (2.138) mit  $C_1 = 0$  bzw  $C_2 = 0$  folgen. Somit ist die Fundamentalmatrix

$$X = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

und die inverse Matrix

$$X^{-1} = e^{-3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach (2.140) erhalten wir die allgemeine Lösung von (2.139):

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \int e^{-3t} \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix} dt \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -2 \end{pmatrix} dt \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 + t + C_1 \\ -2t + C_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} t - t^2 + C_1 + tC_2 \\ -t - t^2 + C_1 + (t+1)C_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3 Das Anfangswertproblem für generelle DGLen

In diesem Kapitel beweisen wir unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

#### 3.1 Lipschitz-stetig Funktionen

Wir brauchen den Begriff von Lipschitz-Funktionen. Sei  $f(x)$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ .

**Definition.** Funktion  $f(x)$  heißt *Lipschitz-stetig* in  $\Omega$  wenn existiert eine Konstante  $L$ , derart, dass für alle  $x, y \in \Omega$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (3.2)$$

Die Konstante  $L$  heißt die *Lipschitz-Konstante* von  $f$  in  $\Omega$ . Eine Lipschitz-stetige Funktion heißt auch *Lipschitz-Funktion*.

Da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  (bzw  $\mathbb{R}^m$ ) äquivalent sind, ist die Lipschitz-Bedingung (3.2) unabhängig von der Wahl der Normen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , obwohl der Wert der Lipschitz-Konstante  $L$  jedoch von den Normen abhängt. Offensichtlich ist jede Lipschitz-stetige Funktion stetig (sogar gleichmäßig stetig).

**Beispiel.** The Funktion  $f(x) = \|x\|$  als eine Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  weil nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Die Lipschitz-Konstante ist offensichtlich gleich 1. Bemerken Sie, dass die Funktion  $f(x)$  nicht differenzierbar an  $x = 0$  ist.

**Definition.** Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *lokal Lipschitz-stetig* in  $\Omega$  wenn für jedes  $x_0 \in \Omega$  existiert  $\varepsilon > 0$ , derart, dass der Kugel  $B(x_0, \varepsilon)$  eine Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  Lipschitz-stetig in  $B$  ist.

Wir betonen, dass der Wert der Lipschitz-Konstante in der Kugel  $B(x_0, \varepsilon)$  generell abhängig von der Kugel ist.

Folgendes Lemma ergibt viele Beispiele von lokal Lipschitz-stetige Funktionen. Bezeichnen wir mit  $f_k$  wie üblich die Komponenten von  $f$ .

**Lemma 3.1** (a) Seien  $B$  eine Kugel in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare Funktion. Gilt für alle partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

$$\sup_B \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right| \leq M \quad (3.3)$$

mit einer Konstante  $M$ , dann ist die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L = L(M)$ .

(b) Seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig.

**Beweis.** Wir benutzen die folgende Eigenschaft von Funktionen in  $\mathbb{R}^n$ .

**Behauptung.** (Mittelwertsatz) Sei  $g$  eine differenzierbare Funktion von einem Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ . Dann für jede  $x, y \in B$  existiert  $\xi \in [x, y]$ , derart, dass

$$g(y) - g(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi) (y_j - x_j). \quad (3.4)$$

Hier ist  $[x, y]$  das geschlossene Intervall (die Verbindungsstrecke) zwischen  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^n$ , also

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Sind  $x, y$  Elementen von der Kugel  $B = B(z, r)$ , dann enthält  $B$  auch ganzes Intervall  $[x, y]$ , da für jedes  $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x + \lambda y - z\| &= \|(1 - \lambda)(x - z) + \lambda(y - z)\| \\ &\leq (1 - \lambda)\|x - z\| + \lambda\|y - z\| \\ &< (1 - \lambda)r + \lambda r = r. \end{aligned}$$

Deshalb ist die Funktion  $\frac{\partial g}{\partial x_j}(\xi)$  in (3.4) wohl definiert für jedes  $\xi \in [x, y]$ .

Es ist klar, dass in der Fall  $n = 1$  die obige Behauptung mit dem klassischen Mittelwertsatz für differenzierbare reellwertige Funktionen auf einem Intervall übereinstimmt.

Um (3.4) für  $n > 1$  zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$h(\lambda) = g(x + \lambda(y - x)) \quad \text{für } \lambda \in [0, 1].$$

Die Funktion  $h(\lambda)$  ist differenzierbar auf  $[0, 1]$  und somit existiert nach dem klassischen Mittelwertsatz ein  $\tau \in (0, 1)$  derart, dass

$$g(y) - g(x) = h(1) - h(0) = h'(\tau).$$

Da nach der Kettenregel

$$h'(\tau) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x + \tau(y - x)) (y_j - x_j),$$

erhalten wir (3.4) mit  $\xi = x + \tau(y - x)$ .

(a) Nach (3.4) erhalten wir für  $k$ -te Komponente  $f_k$  von  $f$  und für jede  $x, y \in B$

$$f_k(x) - f_k(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi) (x_j - y_j), \quad (3.5)$$

wobei  $\xi \in [x, y]$ . Abschätzung von partiellen Ableitungen nach (3.3) ergibt

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq M \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| = M\|x - y\|_1,$$

woraus folgt

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq M\|x - y\|_1.$$

Da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind, können die Normen  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_1$  durch eine gegebene Norm ersetzt werden, woraus die Lipschitz-Bedingung folgt mit Konstante  $L = CM$ , wobei die Konstante  $C$  von der gegebenen Norm abhängt.

(b) Da  $\Omega$  offen ist, für jedes  $x \in \Omega$ , existiert  $\varepsilon > 0$  so dass die Kugel  $B(x, \varepsilon)$  Teilmenge von  $\Omega$  ist. Durch Reduzierung von  $\varepsilon$  können wir voraussetzen, dass die abgeschlossene Kugel  $\overline{B}(x, \varepsilon)$  auch Teilmenge von  $\Omega$  ist. Da die Komponenten  $f_k$  stetig differenzierbar sind, sind die partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  stetig und somit beschränkt in  $\overline{B}$ . Nach (a) erhalten wir, dass  $f$  Lipschitz-stetig in  $B$  ist, was zu beweisen war. ■

Wir brauchen eine Verallgemeinerung von Lipschitz-Stetigkeit wie folgt. Sei  $f(t, x)$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\mathbb{R}^m$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , und  $(t, x) \in \Omega$ .

**Definition.** Funktion  $f(t, x)$  heißt *Lipschitz-stetig* nach  $x$ , wenn existiert eine Konstante  $L$ , so dass für alle  $(t, x), (t, y) \in \Omega$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (3.6)$$

D.h., für jedes  $t \in \mathbb{R}$ , ist die Funktion  $f(t, \cdot)$  Lipschitz-stetig mit einer unabhängigen von  $t$  Lipschitz-Konstante  $L$ .

Die gleiche Definition gilt wenn  $t$  eine Variable von höherer Dimension ist, z.B. aus  $\mathbb{R}^l$ .

Eine Teilmenge  $Z$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  heißt *Zylinder* wenn  $Z = I \times B$  wobei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $B$  eine (offene oder abgeschlossene) Kugel in  $\mathbb{R}^n$  ist. Der Zylinder ist abgeschlossen genau dann, wenn die beiden Mengen  $I$  und  $B$  abgeschlossen sind, und offen, wenn die beiden  $I$  und  $B$  offen sind.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für Intervalle und Kugel:

$$I(t, \delta) := (t - \delta, t + \delta), \quad \overline{I}(t, \delta) = [t - \delta, t + \delta]$$

und

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}, \quad \overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}.$$

**Definition.** Funktion  $f(t, x)$  heißt *lokal Lipschitz-stetig* nach  $x$ , wenn für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existieren Konstanten  $\varepsilon, \delta > 0$ , derart, dass der Zylinder

$$Z = I(t_0, \delta) \times B(x_0, \varepsilon)$$

Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $Z$  ist (vgl. Fig. 22).

**Lemma 3.2** (a) Seien  $Z$  ein Zylinder in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f(t, x) : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine differenzierbare nach  $x$  Funktion. Sind alle partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$  beschränkt in  $Z$ , so ist die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig nach  $x$ .

(b) Seien  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine stetig differenzierbare nach  $x$  Funktion. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig.

**Beweis.** (a) Sei  $Z = I \times B$ . Dann für jedes  $t \in I$  ist die Funktion  $f(t, \cdot) : B \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar, und die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  sind beschränkt in  $B$  mit einer unabhängigen von  $t$  Konstante  $M$ . Somit erhalten wir nach Lemma 3.1, dass die Funktion

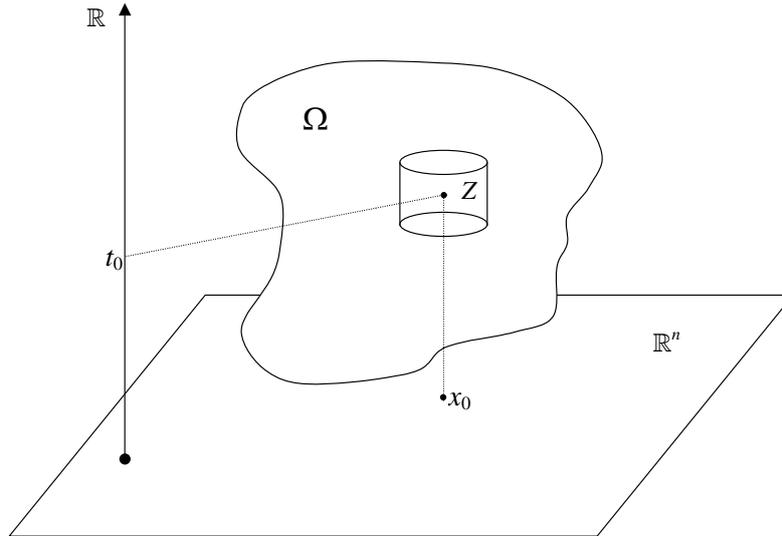


Figure 22: Zylinder  $Z$

$f(t, \cdot)$  Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante  $L = L(M)$ , die auch unabhängig von  $t$  ist. Deshalb ist die Funktion  $f : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$  Lipschitz-stetig nach  $x$ .

(b) Da  $\Omega$  offen ist, für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existiert ein Zylinder

$$Z = I(t_0, \delta) \times B(x_0, \varepsilon),$$

der eine Teilmenge von  $\Omega$  ist, und auch der abgeschlossene Zylinder

$$\bar{Z} = \bar{I}(t_0, \delta) \times \bar{B}(x_0, \varepsilon)$$

eine Teilmenge von  $\Omega$  ist. Da die partielle Ableitungen  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  stetig in  $\Omega$  sind, sind sie beschränkt in  $\bar{Z}$  und deshalb in  $Z$ . Nach (a) ist  $f$  Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $Z$ , und somit lokal Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $\Omega$ . ■

### 3.2 Existenz und Eindeutigkeit

Betrachten wir jetzt ein allgemeines (nicht-lineares) Normalsystem

$$x' = f(t, x), \tag{3.7}$$

wobei  $f$  eine gegebene Funktion von  $n + 1$  Variablen mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  ist. Also,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, und das Paar  $(t, x)$  mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wird wie folgt:

$$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n).$$

Erinnern wir uns daran, dass eine Lösung von (3.7) eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  (wobei  $I$  ein Intervall ist) mit folgenden Eigenschaften ist:

1.  $x(t)$  ist differenzierbar für jedes  $t \in I$ ;
2.  $(t, x(t)) \in \Omega$  für jedes  $t \in I$ ;
3.  $x'(t) = f(t, x(t))$  für jedes  $t \in I$ .

Betrachten wir auch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

wobei  $(t_0, x_0)$  ein gegebener Punkt in  $\Omega$  ist. Eine Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Lösung von (3.8) wenn  $x$  eine Lösung von (3.7) auf Intervall  $I$  ist,  $t_0 \in I$  und  $x(t_0) = x_0$ . Der Graph der Lösung  $x(t)$  ist eine Integralkurve von (3.7), die durch den Punkt  $(t_0, x_0)$  geht.

Jetzt können wir einen Hauptsatz formulieren.

**Satz 3.3** (Satz von Picard-Lindelöf) *Sei die Funktion  $f(t, x)$  stetig in  $\Omega$  und lokal Lipschitzstetig nach  $x$  in  $\Omega$ . Dann hat das Anfangswertproblem (3.8) eine Lösung für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .*

*Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.8), dann gilt  $x(t) = y(t)$  im gemeinsamen Definitionsbereich von  $x$  und  $y$ .*

**Bemerkung.** Nach Lemma 3.2, kann die Voraussetzung von lokal Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  nach  $x$  durch die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  nach  $x$  ersetzt werden. Aber für bestimmten Anwendungen ist es jedoch wichtig, dass die Funktion  $f$  nicht unbedingt differenzierbar sein muss.

**Bemerkung.** Alternativ kann man die Voraussetzungen von Satz 3.3 formulieren wie folgt: sei die Funktion  $f(t, x)$  stetig nach  $t$  und lokal Lipschitz-stetig nach  $x$ . Da in einem Zylinder  $Z$  um  $x$  die Lipschitz-Konstante  $L$  unabhängig von  $t$  ist, ist Funktion  $f$  in  $Z$  stetig nach  $x$  gleichmäßig nach  $t$ . Zusammen mit der Stetigkeit nach  $t$  ergibt das die Stetigkeit nach  $(t, x)$ .

**Bemerkung.** Vergleichen wir Satz 3.3 mit Satz 2.1, wo man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

für lineares Normalsystem betrachtete, wobei  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetige Funktionen auf einem Intervall  $I$  sind. Die lineare Gleichung hat die Form  $x' = f(t, x)$  für

$$f(t, x) = A(t)x + B(t).$$

Offensichtlich ist die Funktion  $f$  stetig im Definitionsbereich  $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$ . Sie ist auch Lipschitz-stetig nach  $x$  in jeder Teilmenge  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  vorausgesetzt  $[a, b] \subset I$ , weil für jedes  $t \in [a, b]$  und  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \|x - y\| \leq L \|x - y\|$$

wobei

$$L = \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| < \infty.$$

Deshalb ist Satz von Picard-Lindelöf verwendbar und ergibt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.9) in einem Teilintervall  $[t_0 - r, t_0 + r]$  von  $I$ . Satz 2.1 besagt allerdings, dass die Lösung von (3.9) auf ganzem Intervall  $I$  existiert, was stärker ist, als die Behauptung von Satz 3.3.

**Bemerkung.** Ohne Lipschitz-Bedingung, aber doch unter der Voraussetzung von Stetigkeit von  $f$ , gilt die Existenz der Lösung (Satz von Peano), aber nicht Eindeutigkeit, wie man unterhalb sehen kann.

**Beispiel.** Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

(vgl. Abschnitt 1.3). Die Funktion  $x(t) \equiv 0$  ist offensichtlich eine Lösung, sowie auch die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2, & t \geq 0 \\ -\frac{1}{4}t^2, & t < 0. \end{cases}$$

Deshalb es gibt mindestens zwei Lösungen von (3.10) (vgl. Fig. 23).

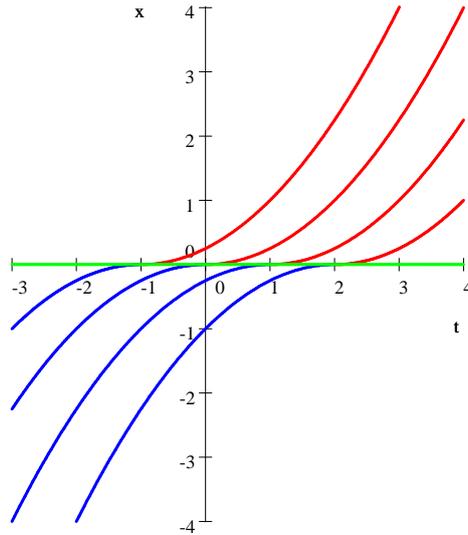


Figure 23: Eindeutigkeit gilt nicht für (3.10)

Die Eindeutigkeit gilt nicht, weil die Funktion  $f(t, x) = \sqrt{|x|}$  nicht Lipschitz-stetig in der Nähe von 0 ist. Ähnlich hat das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

auch mehrere Lösungen, vorausgesetzt  $\alpha \in (0, 1)$ , und die Funktion  $f(t, x) = |x|^\alpha$  ist auch nicht lokal Lipschitz-stetig.

**Beispiel.** Betrachten wir jetzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = |x| \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

wo die Funktion  $f(t, x) = |x|$  Lipschitz-stetig nach  $x$  ist. Die Eindeutigkeit gilt für (3.11) und die eindeutige Lösung ist

$$x(t) = \begin{cases} e^t x_0, & x_0 \geq 0 \\ e^{-t} x_0, & x_0 < 0 \end{cases}$$

(vgl. Fig. 24).

Für den Beweis von Satz 3.3 brauchen wir die folgende Behauptung.

**Satz 3.4** (Fixpunktsatz von Banach) *Seien  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $F : X \rightarrow X$  eine Kontraktionsabbildung, d.h. , es gilt*

$$d(F(x), F(y)) \leq qd(x, y) \quad (3.12)$$

*für eine Konstante  $q \in (0, 1)$  und für alle  $x, y \in X$ . Dann besitzt  $F$  genau einen Fixpunkt, also einen Punkt  $x \in X$  so dass  $F(x) = x$ .*

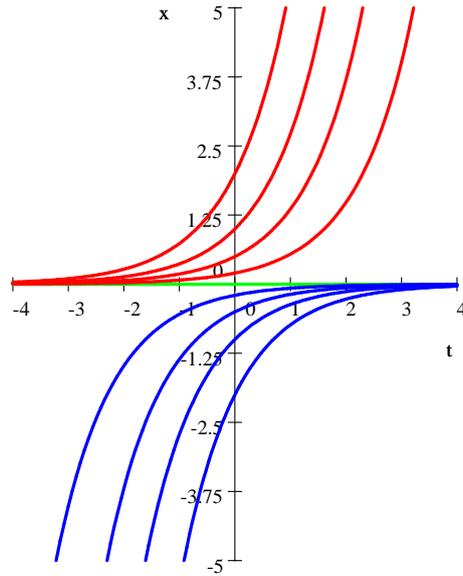


Figure 24: Die Integralkurven von (3.11)

**Beweis.** Wählen wir einen beliebigen Punkt  $x_0 \in X$  und definieren eine Folge  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  nach Induktion wie folgt:

$$x_{n+1} = F(x_n) \text{ für jedes } n \geq 0.$$

Wir beweisen, dass die Folge  $\{x_n\}$  konvergiert und der Grenzwert ein Fixpunkt von  $F$  ist. Bemerken wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1}).$$

Durch Induktion erhalten wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0) = Cq^n, \tag{3.13}$$

wobei  $C = d(x_1, x_0)$ . Zeigen wir, dass  $\{x_n\}$  eine Cauchy-Folge ist. In der Tat, für jede  $m > n$  erhalten wir nach Dreiecksungleichung und (3.13), dass

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq C(q^n + q^{n+1} + \dots + q^{m-1}) \\ &\leq Cq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= \frac{Cq^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ , was bedeutet, dass  $\{x_n\}$  eine Cauchy-Folge ist. Nach der Vollständigkeit von  $(X, d)$ , konvergiert jede Cauchy-Folge. Somit konvergiert die Folge  $\{x_n\}$  gegen einen Punkt  $a \in X$ , also  $x_n \rightarrow a$ . Daraus folgt, dass  $F(x_n) \rightarrow F(a)$ , weil nach (3.12)

$$d(F(x_n), F(a)) \leq qd(x_n, a) \rightarrow 0.$$

Andererseits  $F(x_n) = x_{n+1} \rightarrow a$ , woraus folgt, dass  $F(a) = a$ , also,  $a$  ist ein Fixpunkt.

Sind  $a, b$  zwei Fixpunkte, so gilt es nach (3.12)

$$d(a, b) = d(F(a), F(b)) \leq qd(a, b),$$

was nur dann möglich ist, wenn  $d(a, b) = 0$  und somit  $a = b$ . ■

**Bemerkung.** Der Beweis von Fixpunktsatz ergibt die folgende Methode um den Fixpunkt zu bestimmen bzw anzunähern. Man fängt mit einem beliebigen Punkt  $x_0$  an und bildet induktiv die Folge von Näherungslösungen wie folgt:

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

die gegen Fixpunkt konvergiert.

Wir fangen dem Beweis von Satz 3.3 mit der folgenden Behauptung an.

**Behauptung.** Sei  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion auf einem Intervall  $I$ , so dass  $t_0 \in I$  und  $(t, x(t)) \in \Omega$  für jedes  $t \in I$ . Dann löst die Funktion  $x(t)$  das Anfangswertproblem (3.8) genau dann, wenn  $x(t)$  stetig ist und die folgende Integralgleichung erfüllt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.14)$$

**Beweis.** Löst  $x(t)$  (3.8), so folgt es aus der Gleichung  $x' = f(t, x(t))$ , dass  $x'(t)$  stetig ist, so dass man kann diese Gleichung integrieren und somit erhalten

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

und

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

woraus (3.14) folgt. Umgekehrt, sei  $x$  eine stetige Funktion, die (3.14) erfüllt. Die rechte Seite von (3.14) ist differenzierbar nach  $t$ ; deshalb ist  $x(t)$  auch differenzierbar. Ableiten von (3.14) ergibt  $x' = f(t, x)$ , und die Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  folgt offensichtlich aus (3.14). ■

**Beweis von Existenz in Satz 3.3.** Seien  $(t_0, x_0) \in \Omega$  und  $\varepsilon, \delta, L$  die Konstanten aus lokal Lipschitz-Bedingung an  $(t_0, x_0)$ . Also, der Zylinder

$$Z = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$$

ist eine Teilmenge von  $\Omega$  und die Funktion  $f(t, x)$  Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $Z$  ist, d.h.  $f$  erfüllt die Ungleichung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (3.15)$$

für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  und  $x, y \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ . Wählen wir ein  $r \in (0, \delta]$ , das später angegeben wird, und bezeichnen

$$I = [t_0 - r, t_0 + r] \quad \text{und} \quad J = \overline{B}(x_0, \varepsilon).$$

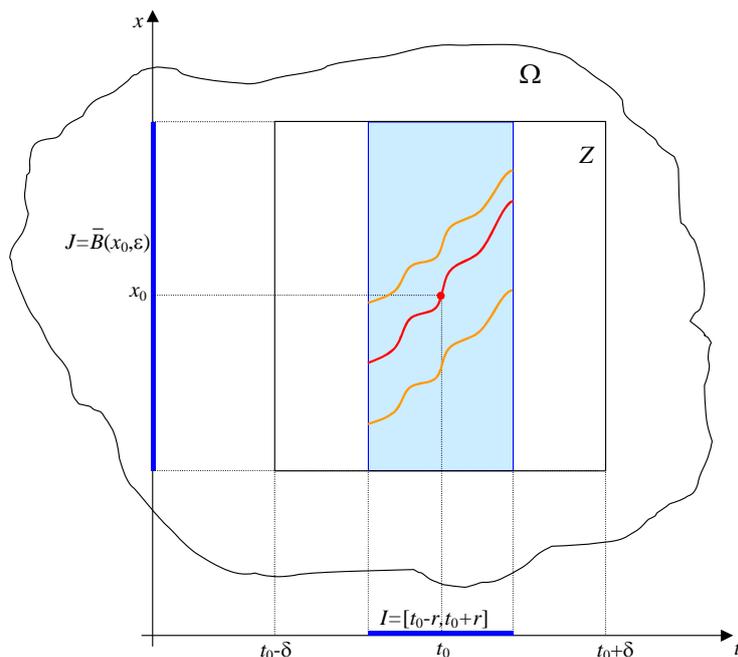


Figure 25: Die Funktionen  $x : I \rightarrow J$

Bezeichnen mit  $X$  die Menge von allen stetigen Funktionen  $x(t) : I \rightarrow J$ , also

$$X = \{x : I \rightarrow J : x \text{ ist stetig}\}$$

(vgl. Fig. 25).

Betrachten wir einen Integraloperator  $A$ , der auf Funktionen  $x(t)$  durch die Identität

$$Ax(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (3.16)$$

definiert wird. Wir möchten es zu sichern, dass  $A$  eine Selbstabbildung von  $X$  ist, d.h.,  $x \in X$  impliziert  $Ax \in X$ . Bemerken wir, dass für jedes  $x \in X$ , ist der Punkt  $(s, x(s))$  für jedes  $s \in I$  in  $\Omega$  enthalten, so dass das Integral in (3.16) für jedes  $t \in I$  wohl definiert ist. Somit ist die Funktion  $Ax(t)$  auf ganzem Intervall  $I$  definiert. Diese Funktion ist offensichtlich stetig. Es bleibt nur zu zeigen, dass die Werten von  $Ax(t)$  in  $J$  enthalten sind, d.h.

$$\|Ax(t) - x_0\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \in I. \quad (3.17)$$

Für jedes  $t \in I$ , we haben nach (3.16)

$$\begin{aligned} \|Ax(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \right| \\ &\leq \sup_{s \in I, x \in J} \|f(s, x)\| |t - t_0| \\ &\leq Mr, \end{aligned}$$

where

$$M := \sup_{\substack{s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \\ x \in \bar{B}(x_0, \varepsilon)}} \|f(s, x)\| < \infty.$$

Jetzt setzen wir vor, dass  $r$  noch eine Bedingung erfüllt:

$$r \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Dann ist (3.17) offensichtlich erfüllt und somit haben wir bewiesen, dass  $Ax \in X$ .

Also, we haben eine Menge  $X$  von Funktionen und eine Abbildung  $A : X \rightarrow X$  definiert, mit der Eigenschaft, dass eine Funktion  $x \in X$  das AWP genau dann löst, wenn  $x = Ax$ , also, wenn  $x$  ein Fixpunkt von  $A$  ist. Die Existenz von dem Fixpunkt von  $A$  wird mit Hilfe von Fixpunktsatz von Banach bewiesen. Dafür müssen wir die Menge  $X$  in einen metrischen Raum umwandeln so dass die Abbildung  $A$  eine Kontraktion ist.

Definieren wir die Abstandfunktion in  $X$  wie folgt:

$$d(x, y) = \sup_{t \in I} \|x(t) - y(t)\|,$$

für alle  $x, y \in X$ . Dann  $d$  ist eine Abstandfunktion, da es die Axiome von Abstandfunktion erfüllt:

1.  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, x) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

In der Tat, sind die 1. und 2. Axiome offensichtlich, und das 3. Axiom folgt aus

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\|.$$

Es ist klar aus der Definition von  $d$ , dass die Konvergenz  $x_k \rightarrow x$  bezüglich  $d$  bedeutet, dass

$$\sup_{t \in I} \|x_k(t) - x(t)\| \rightarrow 0,$$

was genau mit der gleichmäßigen Konvergenz  $x_k \rightrightarrows x$  auf  $I$  übereinstimmt.

Jetzt zeigen wir, dass der metrische Raum  $(X, d)$  vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge in  $(X, d)$  konvergiert. Sei  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Cauchy-Folge in  $(X, d)$ , also

$$d(x_k, x_m) = \sup_{t \in I} \|x_k(t) - x_m(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k, m \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Es folgt, dass für jedes  $t \in I$

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k, m \rightarrow \infty,$$

also  $\{x_k(t)\}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^n$  ist. Deshalb konvergiert diese Folge gegen einen Vektor aus  $\mathbb{R}^n$ , den wir mit  $x(t)$  bezeichnen, so dass

$$x_k(t) \rightarrow x(t) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

für jedes  $t \in I$ . Da  $x_k(t) \in J$  und  $J$  abgeschlossen ist, erhalten wir auch  $x(t) \in J$ , so dass  $x$  eine Abbildung von  $I$  nach  $J$  ist.

Wir müssen noch beweisen, dass  $x$  stetig ist und

$$\sup_{t \in I} \|x_k(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

was bedeutet würde, dass  $\{x_k\}$  gegen  $x$  in  $(X, d)$  konvergiert. Umschreiben wir die Bedingung (3.18) wie folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k, m > N \quad \forall t \in I \quad \|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \varepsilon.$$

Lassen wir hier  $m \rightarrow \infty$  (während  $\varepsilon$ ,  $k$  und  $t$  fest sind) und erhalten

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k > N \quad \forall t \in I \quad \|x_k(t) - x(t)\| \leq \varepsilon,$$

woraus (3.19) folgt. Insbesondere ist  $x(t)$  ein gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen  $x_k$  (das ist  $x_k \rightrightarrows x$ ), woraus folgt, dass  $x(t)$  stetig ist.

Jetzt sichern wir, dass die Abbildung  $A : X \rightarrow X$  eine Kontraktion ist. Für jede zwei Funktionen  $x, y \in X$  und für jedes  $t \in I$ , gilt  $x(t), y(t) \in J$ , woraus folgt mit Hilfe von Lipschitz-Bedingung (3.15), dass

$$\begin{aligned} \|Ax(t) - Ay(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \right| \\ &\leq L |t - t_0| \sup_{s \in I} \|x(s) - y(s)\| \\ &\leq Lrd(x, y), \end{aligned}$$

und somit

$$d(Ax, Ay) = \sup_{t \in I} \|Ax(t) - Ay(t)\| \leq Lrd(x, y).$$

Setzen wir vor, dass

$$r < \frac{1}{L},$$

und erhalten, dass  $A$  eine Kontraktion ist. Nach Fixpunktsatz von Banach, hat die Gleichung  $Ax = x$  eine Lösung  $x \in X$ , die somit auch das AWP löst.

Wir betonen, dass die gefundene Lösung  $x(t)$  auf dem Intervall  $[t_0 - r, t_0 + r]$  definiert ist, vorausgesetzt, dass  $r$  die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

$$0 < r \leq \delta, \quad r \leq \frac{\varepsilon}{M}, \quad r < \frac{1}{L}.$$

wobei die Konstanten  $\varepsilon, \delta, L$  aus lokal Lipschitz-Bedingung kommen, d.h. der Zylinder

$$Z = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$$

ist eine Teilmenge von  $\Omega$ ,  $f$  ist in  $Z$  Lipschitz-stetig nach  $x$  mit Lipschitz-Konstante  $L$ , und  $M = \sup_Z \|f\|$ . Z.B., man kann immer nehmen

$$r = \min \left( \delta, \frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{2L} \right). \quad (3.20)$$

Jetzt beweisen wir die Eindeutigkeit. Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen des Anfangswertproblems (3.8), die auf einem  $I \subset \mathbb{R}$  definiert sind. Wir müssen beweisen, dass  $x = y$  auf  $I$ . Nach Stetigkeit von  $x$  und  $y$ , es existiert  $r \in (0, \delta)$  so dass die Werte von  $x(t)$  und  $y(t)$  für

$$t \in I' := (t_0 - r, t_0 + r) \cap I$$

in  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$  liegen. Die beiden Lösungen  $x, y$  erfüllen die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds,$$

für alle  $t \in I'$ . Deshalb haben wir für die Differenz  $z(t) := \|x(t) - y(t)\|$  die folgende Ungleichung

$$z(t) = \|x(t) - y(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right|$$

Da die beiden Punkte  $(s, x(s))$  und  $(s, y(s))$  Elementen von  $Z$  sind, erhalten wir nach Lipschitz-Bedingung

$$\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq L \|x(s) - y(s)\|,$$

woraus folgt

$$z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(s) ds \right|.$$

Nach Grönwall-Lemma beschließen wir, dass  $z(t) \equiv 0$ , woraus folgt  $x \equiv y$  auf  $I'$ .

Es bleibt noch zu beweisen, dass  $x(t) = y(t)$  für alle  $t \in U$ . Betrachten wir eine Teilmenge von  $I$ :

$$T = \{t \in I : x(t) = y(t)\},$$

und zeigen, dass die Menge  $T$  abgeschlossen sowie auch offen in  $I$ . Die Abgeschlossenheit ist offensichtlich: ist  $\{t_k\}$  eine Folge aus  $T$  so dass  $t_k \rightarrow t \in I$  für  $k \rightarrow \infty$ , dann gilt  $x(t_k) = y(t_k)$  für alle  $k$  und somit nach Stetigkeit von  $x$  und  $y$  auch  $x(t) = y(t)$ , also  $t \in T$ .

Um die Offenheit zu beweisen, wählen ein  $t_1 \in T$  und zeigen, dass es ein  $r > 0$  gibt, so dass  $(t_1 - r, t_1 + r) \cap I \subset T$ . Bezeichnen wir mit  $x_1$  den gemeinsamen Wert  $x(t_1) = y(t_1)$  und bemerken, dass die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  das gleiche Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

lösen. Nach dem obigen Teil von Beweis, erhalten wir  $x(t) = y(t)$  auf einem Intervall  $(t_1 - r, t_1 + r) \cap I$  mit  $r > 0$ . Daraus folgt  $(t_1 - r, t_1 + r) \cap I \subset T$ , und somit ist  $T$  offen.

Letztlich benutzen wir das Faktum, dass jedes Intervall  $I$  zusammenhängend ist, was genau bedeutet, dass die einzigen Teilmengen von  $I$ , die gleichzeitig offen und abgeschlossen in  $I$  sind, sind die Leermenge  $\emptyset$  und  $I$ . Da die Menge  $T$  offen, abgeschlossen und nicht leer ist (weil  $t_0 \in T$ ), beschließen wir, dass  $T = I$ , was zu beweisen war.

Die Zusammenhängendkeit des Intervalls  $U$  beweist man wie folgt. Sei  $T \subset U$  offen und abgeschlossen. Wir müssen zeigen, dass entweder  $T$  oder das Komplement  $T^c = U \setminus T$  leer ist. Angenommen das Gegenteil gilt, d.h., die beiden Mengen  $T$  und  $T^c$  sind nicht leer, und wählen einige Punkte  $a_0 \in T$  und  $b_0 \in T^c$ . Setzen wir  $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  so dass  $c_0 \in U$ . Dann gehört  $c_0$  zum  $T$  oder zum  $T^c$ . Aus zwei Intervalle  $[a_0, c_0]$ ,  $[c_0, b_0]$  wählen wir ein Intervall, dessen Endpunkte zu verschiedenen Mengen  $T, T^c$  gehören, und es mit  $[a_1, b_1]$  bezeichnen, so dass  $a_1 \in T$  und  $b_1 \in T^c$ . Dann holen wir dieses Argument wieder, indem wir ein Intervall  $[a_2, b_2]$  bilden, das eine Hälfte von  $[a_1, b_1]$  ist, und  $a_2 \in T$ ,  $b_2 \in T^c$ . Durch Induktion erhalten wir eine Intervallschachtelung<sup>12</sup>  $\{[a_k, b_k]\}_{k=0}^{\infty}$ , wobei  $a_k \in T$ ,  $b_k \in T^c$  und  $|b_k - a_k| \rightarrow 0$ . Nach Intervallschachtelungsprinzip existiert ein  $x \in [a_k, b_k]$  für alle  $k$ . Offensichtlich  $x \in U$ . Da  $a_k \rightarrow x$  und  $T$  abgeschlossen ist, es gilt  $x \in T$ . Da  $b_k \rightarrow x$  und  $T^c$  abgeschlossen ist, es gilt auch  $x \in T^c$ . Dieser Widerspruch beweist, dass entweder  $T$  oder  $T^c$  leer ist, d.h., entweder  $T = \emptyset$  oder  $T = U$ . ■

<sup>12</sup>Das ist eine Folge von Intervallen, so dass jedes Intervall komplett in dem vorherigen Intervall liegt.

Aus dem Beweis von Existenz der Lösung gewinnt man die folgende Methode für Bestimmung der Lösung  $x(t)$  von (3.8). Man fängt mit konstante Funktion  $x_0(t) \equiv x_0$  an und bildet eine Folge von Näherungslösungen  $x_k(t)$  nach der Regel  $x_{k+1} = Ax_k$ , d.h.

$$x_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds.$$

Diese Folge  $\{x_k\}$  heißt die *Picarditeration*, und sie konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung  $x(t)$  in einem hinreichend kleinen Intervall  $I = [t_0 - r, t_0 + r]$ .

In der Fall von lineares System, d.h. wenn  $f(t, x) = A(t)x + B(t)$ , konjugiert die Picarditeration gegen die Lösung  $x(t)$  auf maximalem Intervall  $I$ , wo  $A(t)$  und  $B(t)$  definiert und stetig sind (vgl. Satz 2.1).

**Beispiel.** Betrachten wir eine DGL

$$\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Die Picarditeration ist durch die Identität

$$x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t x_k(s) ds$$

gegeben. Da  $x_0(t) \equiv 1$ , erhalten wir induktiv

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \int_0^t x_0 ds = 1 + t, \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t x_1 ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ x_3(t) &= 1 + \int_0^t x_2 dt = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}, \end{aligned}$$

usw., so dass

$$x_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^k}{k!}.$$

Offensichtlich  $x_k(t) \rightarrow e^t$  für  $k \rightarrow \infty$ , so dass die Funktion  $x(t) = e^t$  ist die Lösung.

**Beispiel.** Gegeben sei ein lineares Normalsystem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Die Picarditeration ist durch die Identität

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t Ax_k(s) ds$$

gegeben, woraus folgt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + tAx_0 \\ x_2(t) &= x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0 \\ &\dots \\ x_k(t) &= x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^kx_0. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right) x_0 = e^{tA} x_0.$$

Man kann dieses Argument als einen alternativen Beweis von Satz 2.21 betrachten.

**Beispiel.** Betrachten wir eine nicht-lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Die Picarditeration ist durch die Identität

$$x_{k+1}(t) = \int_0^t (1 + x_k^2(s)) ds$$

gegeben, und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t \\ x_2(t) &= \int_0^t (1 + s^2) ds = t + \frac{t^3}{3} \\ x_3(t) &= \int_0^t \left( 1 + \left( s + \frac{s^3}{3} \right)^2 \right) ds = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7 \\ x_4(t) &= \int_0^t \left( 1 + \left( s + \frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{15}s^5 + \frac{1}{63}s^7 \right)^2 \right) ds = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Da die DGL (3.21) trennbar ist, man löst sie mit Hilfe von Trennung der Variablen und erhält

$$t = \int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x,$$

woraus folgt  $x(t) = \tan t$  im Definitionsbereich  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . In diesem Beispiel ergibt die Picarditeration die Taylor-Entwicklung von  $\tan t$ .

Betrachten wir jetzt eine skalare DGL  $n$ -ter Ordnung

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

wobei  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist. Wir bezeichnen die unabhängigen Variablen in  $\Omega$  mit  $(t, \mathbf{x})$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , und schreiben  $F(t, \mathbf{x})$ .

**Korollar 3.5** Sei die Funktion  $F(t, \mathbf{x})$  stetig in  $\Omega$  und lokal Lipschitz-stetig nach  $\mathbf{x}$  in  $\Omega$ . Dann für jeden Punkt  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$  hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (3.22)$$

eine Lösung.

Sind  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.22), dann gilt  $x(t) = y(t)$  im gemeinsamen Definitionsbereich von  $x$  und  $y$ .

Insbesondere erfüllt die Funktion  $F$  die Voraussetzungen wenn  $F$  stetig in  $\Omega$  und stetig differenzierbar nach  $x$  in  $\Omega$  ist.

**Beweis.** Betrachten wir die Vektorfunktion  $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$  und erinnern uns daran, dass die DGL  $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$  äquivalent zur Vektor-DGL  $\mathbf{x}'(t) = f(t, \mathbf{x})$  ist, wobei

$$f(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n, F(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)).$$

Die Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist offensichtlich stetig in  $\Omega$ . Beweisen wir, dass  $f$  lokal Lipschitz-stetig nach  $x$  ist. Wir benutzen die 1-Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $Z = I \times B$  ein Zylinder in  $\Omega$ , wo  $F$  Lipschitz-stetig nach  $\mathbf{x}$  ist mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Es reicht zu zeigen, dass auch  $f$  in  $Z$  Lipschitz-stetig nach  $\mathbf{x}$  ist. Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$  und  $t \in I$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\|_1 &= |\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2| + \dots + |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n| + |F(t, \mathbf{x}) - F(t, \mathbf{y})| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 + L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \\ &= (L + 1) \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1, \end{aligned}$$

also  $f$  ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L + 1$ .

Das Anfangswertproblem (3.22) ist äquivalent zur

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = F(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

wobei  $\mathbf{x}_0 = (x_0, \dots, x_{n-1})$ . Nach Satz (3.3) hat das Anfangswertproblem (3.23) eine Lösung für jedes  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ , und zwei Lösungen von (3.23) sind identisch auf dem gemeinsamen Intervall. Deshalb gelten die gleichen Aussagen auch für (3.22), was zu beweisen war. ■

### 3.3 Maximale Lösungen

Betrachten wir wieder ein Normalsystem

$$x' = f(t, x), \quad (3.24)$$

wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung von einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist, die stetig und lokal Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $\Omega$  ist.

Nach Satz 3.3 sind jede zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

identisch im gemeinsamen Definitionsbereich. Jedoch gibt es viele Lösungen von (3.25), die auf verschiedenen Intervallen definiert sind. In diesem Abschnitt bestimmen wir eine Lösung von (3.25) mit maximalem Definitionsbereich.

Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  zwei Lösungen von (3.24), die jeweils auf Intervalle  $I_1$  und  $I_2$  definiert sind. Die Lösung  $y(t)$  heißt eine *Fortsetzung* von  $x(t)$  wenn  $I_1 \subset I_2$  und die beiden Lösungen auf  $I_1$  gleich sind.

**Definition.** Eine Lösung  $x(t)$  von (3.24) heißt *maximal* wenn  $x(t)$  keine Fortsetzung (als eine Lösung) auf ein echt größeres Intervall besitzt.

**Satz 3.6** *Unter den Bedingungen von Satz 3.3 gilt folgendes:*

(a) *Das Anfangswertproblem (3.25) hat eine eindeutige maximale Lösung für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .*

(b) *Der Definitionsbereich von einer maximalen Lösung  $x(t)$  ist ein offenes Intervall, das maximales Existenzintervall heißt.*

(c) *Ist  $x(t)$  eine maximale Lösung mit dem Definitionsbereich  $(a, b)$ , dann verlässt  $x(t)$  jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow a$  sowie auch für  $t \rightarrow b$ .*

Die Aussage “ $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow b$ ” bedeutet folgendes: es existiert ein Wert  $c \in (a, b)$  so dass der Punkt  $(t, x(t))$  von dem Graph von  $x$  außerhalb  $K$  ist für jedes  $t \in (c, b)$ . Analog bedeutet die Aussage “ $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow a$ ”, dass existiert  $c \in (a, b)$  so dass  $(t, x(t))$  außerhalb  $K$  ist für jedes  $t \in (a, c)$ .

Die folgende Behauptung folgt aus (a): sind zwei maximale Lösungen  $x$  und  $y$  von (3.24) gleich für einen Wert von  $t$  sind, dann sind die Funktionen  $x$  und  $y$  identisch, inklusiv die Identität von ihren Definitionsbereichen, da sie gleiches Anfangswertproblem mit der Anfangsbedingung  $(t, x(t))$  lösen.

**Beispiel.** 1. Betrachten wir die DGL  $x' = x^2$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe von Trennung der Variablen lösen. Offensichtlich ist  $x \equiv 0$  eine konstante Lösung. In den Bereichen  $\{x > 0\}$  und  $\{x < 0\}$  erhalten wir

$$\int \frac{x' dt}{x^2} = \int dt$$

und

$$-\frac{1}{x} = \int \frac{dx}{x^2} = \int dt = t - C,$$

woraus folgt  $x(t) = \frac{1}{C-t}$ . Diese Funktion bestimmt zwei maximale Lösungen jeweils auf den Intervallen  $(C, +\infty)$  und  $(-\infty, C)$  (vgl. Fig. 26).

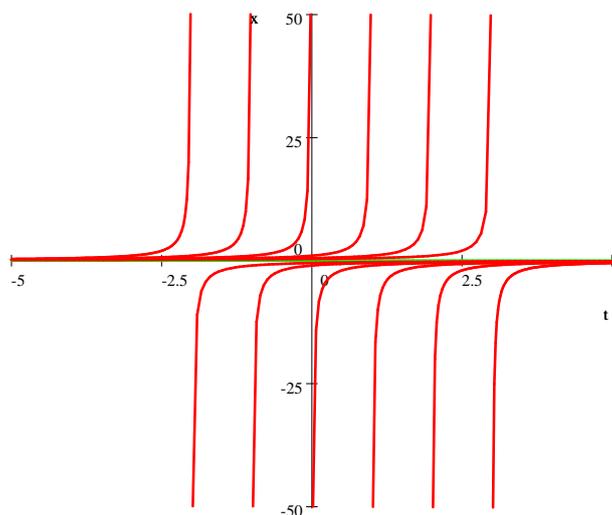


Figure 26: Die Integralkurven von  $x' = x^2$

Jede solche Lösung verlässt jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^2$ , aber auf verschiedene Weise: jede Lösung  $x(t)$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  weil  $K$  beschränkt ist, während die Lösung  $x(t) = \frac{1}{C-t}$  verlässt  $K$  für  $t \rightarrow C$  weil  $x(t) \rightarrow \pm\infty$ .

2. Betrachten wir die DGL  $x' = \frac{1}{x}$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  (d.h.  $t \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$ ). Nach Trennung der Variablen erhalten wir

$$\frac{x^2}{2} = \int x dx = \int x x' dt = \int dt = t - C$$

und somit

$$x(t) = \sqrt{2(t - C)}, \quad t > C. \quad (3.26)$$

(vgl. Fig. 27). Die Funktion (3.26) ist eine maximale Lösung mit dem Definitionsbereich

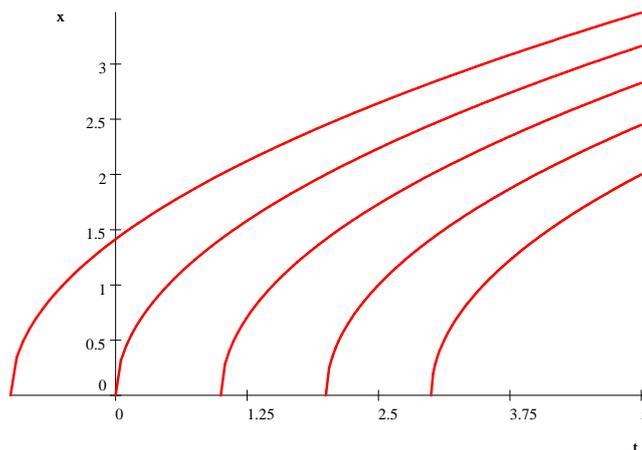


Figure 27: Die Integralkurven von  $x' = \frac{1}{x}$

$(C, +\infty)$ . Die Lösung verlässt jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$  für  $t \rightarrow C$  weil  $(t, x(t)) \rightarrow (C, 0)$  und der Punkt  $(C, 0)$  auf der Grenze von  $\Omega$  liegt.

3. Die DGL  $x' = x^2 + 1$  im Definitionsbereich  $\Omega = \mathbb{R}^2$  hat die Lösung

$$x(t) = \tan(t - C), \quad t \in \left(C - \frac{\pi}{2}, C + \frac{\pi}{2}\right),$$

die offensichtlich jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  verlässt (vgl. Fig. 28)

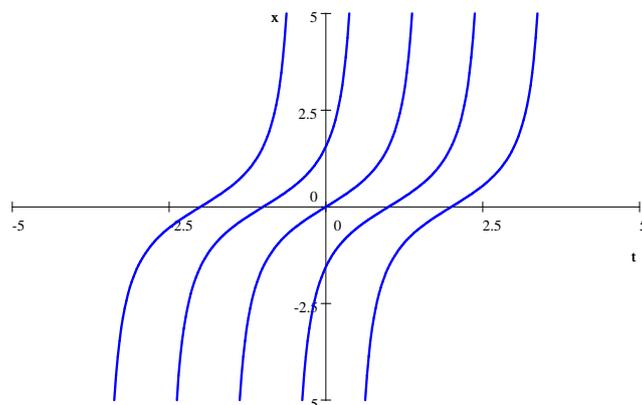


Figure 28: Die Integralkurven von  $x' = x^2 + 1$

Für den Beweis von Satz 3.6 brauchen wir das folgende Lemma.

**Lemma 3.7** Sei  $\{x_\alpha(t)\}_{\alpha \in A}$  eine Menge von Lösungen des AWP (3.25), wobei  $A$  eine Indexmenge ist. Sei  $x_\alpha$  auf einem Intervall  $I_\alpha$  definiert. Setzen wir

$$I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$$

und definieren eine Funktion  $x(t)$  auf  $I$  wie folgt:

$$x(t) = x_\alpha(t) \text{ falls } t \in I_\alpha. \quad (3.27)$$

Dann  $I$  ist ein Intervall, die Funktion  $x(t)$  ist wohl definiert und löst (3.25) auf  $I$ .

Die durch (3.27) definierte Funktion  $x(t)$  heißt die *Vereinigung* den Lösungen  $\{x_\alpha(t)\}$ , weil der Graph von  $x(t)$  die Vereinigung der Graphen von allen Funktionen  $x_\alpha(t)$  ist.

**Beweis.** Die Function  $x(t)$  ist wohl definiert, wenn die rechte Seite der Identität (3.27) unabhängig von  $\alpha$  ist. Gehört  $t$  zu den zwei Intervallen  $I_\alpha$  und  $I_\beta$ , dann gilt  $x_\alpha(t) = x_\beta(t)$  nach dem Eindeutigkeit-Teil von Satz 3.3, woraus folgt, dass der Wert von  $x(t)$  unabhängig von der Wahl des Indexes  $\alpha$  ist.

Jetzt beweisen wir, dass  $I$  ein Intervall ist, d.h. mit Punkten  $a < b$  enthält  $I$  auch ganzes Intervall  $[a, b]$ . Es gibt die Indexe  $\alpha, \beta \in A$  mit  $a \in I_\alpha$  und  $b \in I_\beta$ . Da die beiden Intervalle  $I_\alpha, I_\beta$  auch  $t_0$  enthalten, ist die Vereinigung  $I_\alpha \cup I_\beta$  auch ein Intervall, das  $a$  und  $b$  enthält, woraus folgt  $[a, b] \subset I_\alpha \cup I_\beta$  und somit  $[a, b] \subset I$ .

Um zu beweisen, dass  $x$  eine Lösung von (3.25) ist, zeigen wir erst, dass  $x(t)$  stetig auf  $I$  ist. Es reicht zu zeigen, dass  $x(t)$  stetig auf jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall  $[a, b] \subset I$  ist. Seien  $\alpha, \beta \in A$  zwei Indexe so dass  $a \in I_\alpha$ ,  $b \in I_\beta$  und somit  $[a, b] \subset I_\alpha \cup I_\beta$ . Da die Funktion  $x(t)$  stetig auf  $I_\alpha$  und  $I_\beta$  ist und die Intervalle  $I_\alpha, I_\beta$  nicht-leeren Durchschnitt haben, ist  $x(t)$  stetig auch auf  $I_\alpha \cup I_\beta$  und somit auf  $[a, b]$ .

Die Funktion  $x(t)$  erfüllt auf jedem Intervall  $I_\alpha$  die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Daraus folgt, dass die Gleichung auch für alle  $t \in I$  erfüllt ist, und somit  $x(t)$  eine Lösung von (3.25) auf  $I$  ist. ■

**Beweis von Satz 3.6.** (a) Sei  $S$  die Menge von allen Lösungen des Anfangswertproblems (3.25), und definieren wir  $x(t)$  als die Vereinigung von allen Lösungen aus  $S$ . Nach Lemma 3.7 ist die Funktion  $x(t)$  auch eine Lösung von (3.25) und deshalb  $x \in S$ . Daraus folgt, dass  $x(t)$  eine maximale Lösung ist, weil der Definitionsbereich von  $x(t)$  die Definitionsbereiche von allen anderen Lösungen aus  $S$  enthält und somit  $x(t)$  nicht fortsetzbar auf ein echt größeres Intervall ist.

Sei  $y(t)$  auch eine maximale Lösung von (3.25). Da  $y \in S$ , enthält der Definitionsbereich  $I_x$  von  $x$  den Definitionsbereich  $I_y$  von  $y$ , also  $I_x \supset I_y$ . Da  $y$  maximal ist, muss die Identität  $I_x = I_y$  gelten, woraus folgt, dass  $x$  und  $y$  identisch sind.

(b) Sei  $I$  der Definitionsbereich von einer maximalen Lösung  $x(t)$ . Dann ist  $I$  ein Intervall, und wir beweisen, dass  $I$  offen ist. Angenommen das Gegenteil gilt, also  $I$  ist nicht offen, z.B. der Endpunkt  $a := \inf I$  gehört zum  $I$ . Dann gehört der Punkt  $(a, x(a))$  zu  $\Omega$ , und nach Satz 3.3 hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = x(a) \end{cases}$$

eine Lösung auf einem Intervall  $(a - r, a + r)$  mit  $r > 0$  (vgl. Fig. 29).

Dann ist die Vereinigung  $z(t)$  von Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$  eine Lösung, die auch für  $t < a$  definiert ist, was bedeutet, dass die Lösung  $x(t)$  auf ein echt größeres Intervall fortsetzbar ist, was im Widerspruch zur Maximalität von  $x$  ist.

(c) Nehmen wir das Gegenteil an, dass  $x(t)$  eine kompakte Menge  $K \subset \Omega$  nicht verlässt für  $t \rightarrow a$ . Dann existiert eine Folge  $t_k \in (a, b)$  so dass  $t_k \rightarrow a$  und  $(t_k, x_k) \in K$ , wobei  $x_k = x(t_k)$ . Da jede Folge in  $K$  eine konvergente Teilfolge besitzt mit dem Grenzwert in  $K$ , können wir voraussetzen, dass die ganze Folge  $\{(t_k, x_k)\}_{k=1}^\infty$  gegen einen Punkt  $(a, q) \in K$  konvergiert für  $k \rightarrow \infty$ . Da  $(a, q) \in \Omega$ , existiert ein Zylinder

$$Z := [a - \delta, a + \delta] \times \overline{B}(q, \varepsilon) \subset \Omega,$$

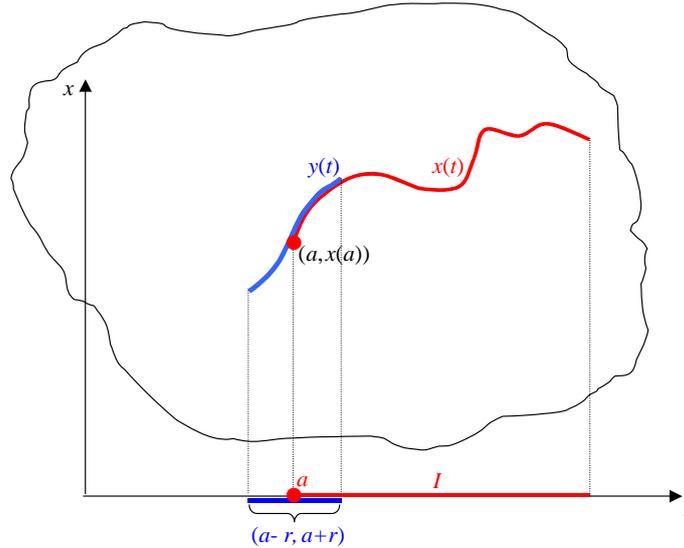


Figure 29: Die Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$

wo die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig nach  $x$  ist mit einer Lipschitz-Konstante  $L$ . Bezeichnen wir  $M = \sup_Z \|f\|$ .

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_k) = x_k \end{cases} \quad (3.28)$$

für ein  $k$ . Ist  $k$  hinreichend groß, so ist  $(t_k, x_k)$  hinreichend nahe bei  $(a, q)$ , und dann ist der Zylinder

$$Z_k = [t_k - \frac{\delta}{2}, t_k + \frac{\delta}{2}] \times \overline{B}(x_k, \frac{\varepsilon}{2})$$

eine Teilmenge von  $Z$  (vgl. Fig. 30). Insbesondere ist die Funktion  $f$  in  $Z_k$  Lipschitz-stetig nach  $x$  mit Lipschitz-Konstante  $L$  und  $\sup_{Z_k} \|f\| \leq M$ . Deshalb hat (3.28) eine Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $(t_k - r, t_k + r)$ , wobei

$$r := \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}, \frac{1}{2L}\right) > 0$$

(vgl. (3.20) aus dem Beweis von Satz 3.3). Es ist wichtig zu betonen, dass  $r$  von  $k$  unabhängig ist. Ist  $k$  hinreichend groß, gilt  $a \in (t_k - r, t_k + r)$ , insbesondere  $t_k - r < a$ , so dass  $y(t)$  auch für die Werte  $t < a$  definiert ist. Da die Funktion  $x(t)$  auch das Anfangswertproblem (3.28) löst, ist die Vereinigung von  $x(t)$  und  $y(t)$  eine Lösung, die für  $t < a$  auch definiert ist, was im Widerspruch zur Maximalität von  $x$  ist. ■

### 3.4 Stetigkeit von Lösungen bezüglich $f(t, x)$

Seien  $\Omega$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^{n+1}$  und  $f, g$  zwei Abbildungen von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$ , die stetig und lokal Lipschitz-stetig nach  $x$  sind, wie im Satz von Picard-Lindelöf. Betrachten wir zwei Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

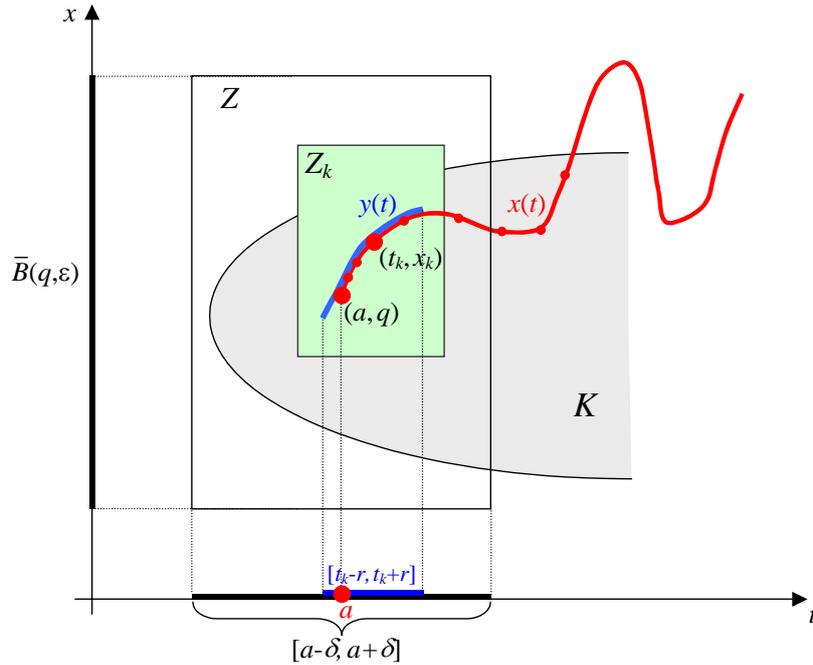


Figure 30: Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$

und

$$\begin{cases} y' = g(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.30)$$

mit einem gleichen Anfangswert  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .

Wir behandeln die Funktion  $f$  als fest, wobei  $g$  sich variieren kann. Sei  $x(t)$  eine Lösung von (3.29). Unsere Absicht ist zu zeigen, dass  $y$  nahe bei  $x$  ist, vorausgesetzt, dass  $g$  nahe bei  $f$  ist. Dieses Resultat hat eine theoretische sowie auch praktische Bedeutung. Z.B., ist die Funktion  $f(t, x)$  nur ungefähr bekannt, dann löst man statt des genauen AWP (3.29) ein anderes AWP (3.30) mit  $g \approx f$ . In diesem Fall ist es wichtig zu wissen, ob  $y(t) \approx x(t)$  mit einer Abschätzung der Fehlergrenze  $\|x(t) - y(t)\|$ .

**Satz 3.8** Sei  $x(t)$  eine Lösung des AWP (3.29), die auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, wobei  $\alpha < t_0 < \beta$ . Dann für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\eta > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: ist  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige und lokal Lipschitz-stetige nach  $x$  Funktion, die erfüllt

$$\sup_{\Omega} \|f - g\| \leq \eta, \quad (3.31)$$

dann existiert eine Lösung  $y(t)$  des AWP (3.30), die auf  $[\alpha, \beta]$  definiert ist; außerdem erfüllt die Lösung  $y(t)$  die folgende Ungleichung

$$\sup_{[\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon. \quad (3.32)$$

**Beweis.** Wir fangen mit der folgenden Abschätzung der Differenz  $\|x(t) - y(t)\|$  an.

**Behauptung 1.** Seien  $x(t)$  und  $y(t)$  die Lösungen von jeweils (3.29) und (3.30), die auf einem gleichen Intervall  $(a, b)$  definiert sind, wobei  $a < t_0 < b$ . Angenommen es existiert eine Teilmenge  $K$  von  $\Omega$  mit den folgenden Eigenschaften:

(A) die Graphen von  $x(t)$  und  $y(t)$  sind in  $K$  enthalten;  
 (B) die Funktion  $f(t, x)$  ist Lipschitz-stetig in  $K$  nach  $x$  mit der Lipschitz-Konstante  $L$ .

Dann gilt

$$\sup_{t \in (a, b)} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(b-a)} (b-a) \sup_K \|f - g\|. \quad (3.33)$$

Die beiden Funktionen  $x$  und  $y$  erfüllen die Integralgleichungen

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{und} \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds.$$

Nach der Dreiecksungleichung erhalten wir für jedes  $t \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \right| + \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| ds \right|. \end{aligned}$$

Da die Punkte  $(s, x(s))$  und  $(s, y(s))$  Elemente von  $K$  sind, kann der erste Integrand durch die Lipschitz-Bedingung in  $K$  abgeschätzt werden:

$$\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \leq L \|x(t) - y(t)\|.$$

Der zweite Integral schätzen wir ab wie folgt:

$$\left| \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - g(s, y(s))\| ds \right| \leq \sup_K \|f - g\| |t - t_0| \leq \sup_K \|f - g\| (b - a) =: C,$$

woraus folgt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds \right| + C. \quad (3.34)$$

Anwendung von Grönwall-Lemma zur Funktion  $\|x(t) - y(t)\|$  ergibt

$$\|x(t) - y(t)\| \leq C e^{L|t-t_0|} \leq e^{L(b-a)} (b-a) \sup_K \|f - g\|,$$

was zu beweisen war.

Die Ungleichung (3.33) bedeutet insbesondere folgendes: ist  $\sup_{\Omega} \|f - g\|$  klein, dann ist auch die Differenz  $\|x(t) - y(t)\|$  klein, was im Grunde die Behauptung von Satz 3.8 ist. Aber bevor wir Behauptung 1 anwenden können, müssen wir jedoch auf die folgenden Fragen antworten können:

- warum ist die Lösung  $y(t)$  auf dem ganzen Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert?
- warum existiert eine Teilmenge  $K \subset \Omega$  mit den Eigenschaften (A) und (B)?

Zunächst bilden wir solche Menge  $K$ . Für jedes  $\varepsilon \geq 0$  betrachten wir die Menge

$$K_{\varepsilon} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha \leq t \leq \beta, \|x - x(t)\| \leq \varepsilon\}. \quad (3.35)$$

Insbesondere ist  $K_0$  der Graph von Funktion  $x(t)$ , und  $K_{\varepsilon}$  mit  $\varepsilon > 0$  ist eine abgeschlossene  $\varepsilon$ -Umgebung von  $K_0$  in der Richtung  $x$  (vgl. Fig. 31).

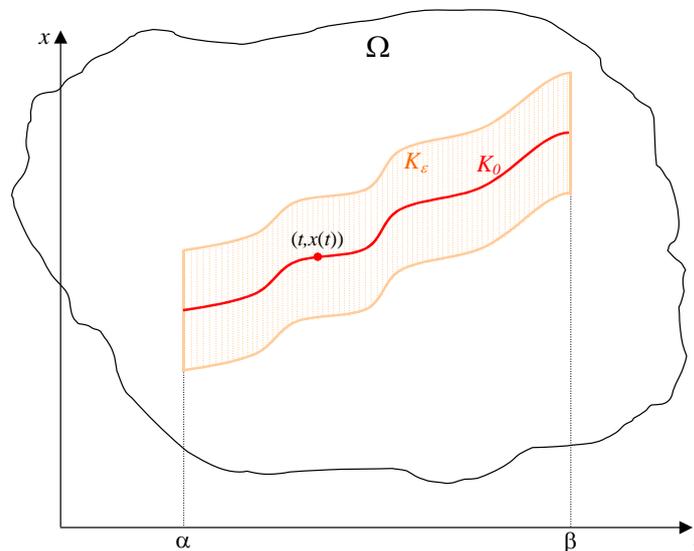


Figure 31: Die Mengen  $K_0$  und  $K_{\varepsilon}$

Die Menge  $K_0$  ist kompakt, weil  $K_0$  das Bild von Intervall  $[\alpha, \beta]$  unter der stetigen Abbildung  $t \mapsto (t, x(t))$  ist. Deshalb ist  $K_0$  beschränkt und abgeschlossen, woraus folgt, dass  $K_{\varepsilon}$  für jedes  $\varepsilon > 0$  auch beschränkt und abgeschlossen<sup>13</sup> ist. Somit ist  $K_{\varepsilon}$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  für jedes  $\varepsilon \geq 0$ .

**Behauptung 2.** *Es existiert  $\varepsilon > 0$  so dass  $K_{\varepsilon} \subset \Omega$  und  $f$  Lipschitz-stetig in  $K_{\varepsilon}$  nach  $x$  ist.*

Nach der Lipschitz-Bedingung, für jedes  $(t, x) \in \Omega$  (insbesondere für  $(t, x) \in K_0$ ) existieren die Konstanten  $\varepsilon, \delta > 0$  so dass der Zylinder

$$Z = [t - \delta, t + \delta] \times \overline{B}(x, \varepsilon)$$

ein Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $f$  Lipschitz-stetig in  $Z$  nach  $x$  ist (vgl. Fig. 32).

<sup>13</sup>Sei  $\{(t_k, x_k)\}$  eine Folge in  $K_{\varepsilon}$ , die gegen einen Punkt  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$  konvergiert. Da  $t_k \in [\alpha, \beta]$ , gehört  $t$  auch zu  $[\alpha, \beta]$ . Da  $\|x_k - x(t_k)\| \leq \varepsilon$ , ergibt die Auswertung den Grenzwert, dass auch  $\|x - x(t)\| \leq \varepsilon$  und somit  $(t, x) \in K_{\varepsilon}$ .

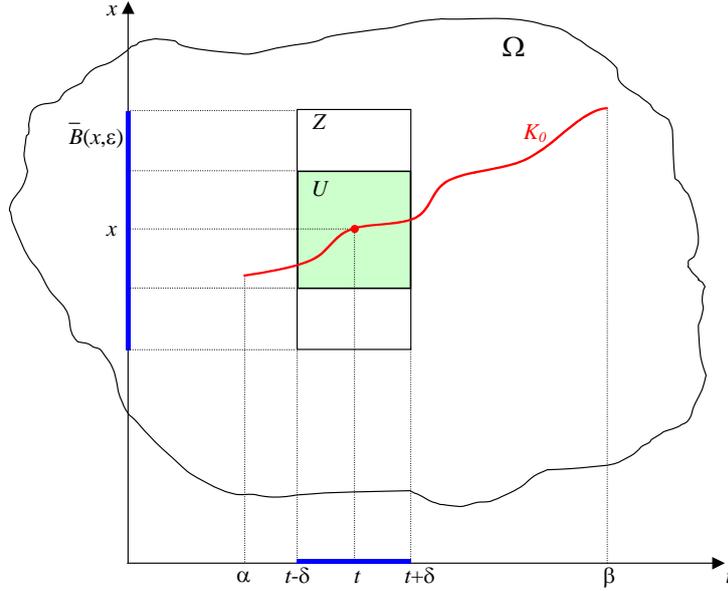


Figure 32: Die Zylinder  $Z$  und  $U$

Betrachten wir auch den offenen Zylinder

$$U = (t - \delta, t + \delta) \times B(x, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Variieren den Punkt  $(t, x)$  in  $K_0$  ergibt eine Überdeckung von  $K_0$  mit den offenen Zylinder  $U$ . Da  $K_0$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $K_0$  mit den offenen Zylinder, d.h. es existieren eine endliche Folge von Punkte  $\{(t_i, x_i)\}_{i=1}^m$  aus  $K_0$  und die entsprechenden Konstanten  $\varepsilon_i, \delta_i > 0$ , so dass die Zylinder

$$U_i = (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) \times B(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon_i)$$

die Menge  $K_0$  bedecken. Bezeichnen wir mit  $Z_i$  den Zylinder

$$Z_i = [t_i - \delta_i, t_i + \delta_i] \times \overline{B}(x_i, \varepsilon_i)$$

und mit  $L_i$  die Lipschitz-Konstante von  $f$  in  $Z_i$  (wir erinnern uns daran, dass  $f$  Lipschitz-stetig in jedem Zylinder  $Z_i$  ist nach der Wahl von  $\varepsilon_i, \delta_i$ ).

Definieren wir  $\varepsilon$  und  $L$  wie folgt

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i, \quad L = \max_{1 \leq i \leq m} L_i, \quad (3.36)$$

und zeigen, dass die Menge  $K_\varepsilon$  die Eigenschaften (A) und (B) von Behauptung erfüllt, d.h.  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und die Funktion  $f$  Lipschitz-stetig in  $K_\varepsilon$  nach  $x$  ist mit der Lipschitz-Konstante  $L$ . Für jeden Punkt  $(t, x) \in K_\varepsilon$  haben wir nach Definition von  $K_\varepsilon$ , dass  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $(t, x(t)) \in K_0$  und

$$\|x - x(t)\| \leq \varepsilon.$$

Der Punkt  $(t, x(t))$  gehört zu einem Zylinder  $U_i$ , also

$$t \in (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i) \quad \text{und} \quad \|x(t) - x_i\| < \frac{1}{2}\varepsilon_i$$

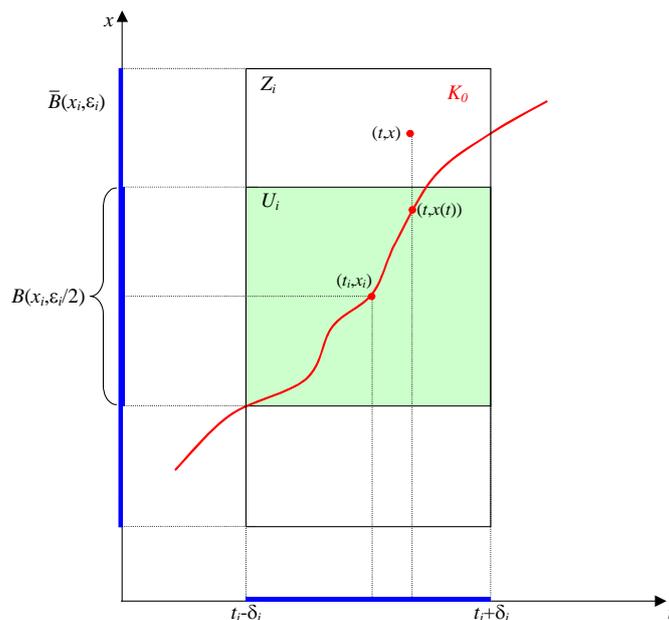


Figure 33: Die Zylinder  $U_i$  und  $Z_i$

(vgl. Fig. 33).

Nach der Dreiecksungleichung haben wir

$$\|x - x_i\| \leq \|x - x(t)\| + \|x(t) - x_i\| < \varepsilon + \varepsilon_i/2 \leq \varepsilon_i,$$

wobei man benutzt, dass  $\varepsilon \leq \varepsilon_i/2$  gilt nach (3.36). Daraus folgt, dass  $x \in B(x_i, \varepsilon_i)$  und somit  $(t, x) \in Z_i$ . Insbesondere erhalten wir  $(t, x) \in \Omega$ , was beweist dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$ .

Sind  $(t, x), (t, y) \in K_\varepsilon$ , dann gehören die beiden Punkte  $x, y$  zum gleichen Kugel  $B(x_i, \varepsilon_i)$ , der von der Bedingung  $(t, x(t)) \in U_i$  bestimmt wird. Dann gilt  $(t, x), (t, y) \in Z_i$  und, weil  $f$  Lipschitz-stetig in  $Z_i$  mit der Lipschitz-Konstante  $L_i$  ist, wir erhalten

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_i \|x - y\| \leq L \|x - y\|,$$

wobei man benutzt, dass  $L \leq L_i$  gilt nach (3.36). Das beweist, dass  $f$  Lipschitz-stetig in  $K_\varepsilon$  ist, was zu beweisen in Behauptung 2 war.

Jetzt beweisen wir die Existenz der Lösung  $y(t)$  von (3.30), die auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist. Sei  $y(t)$  die maximale Lösung von (3.30), die auf einem Intervall  $I$  definiert ist. Nach Satz 3.6 ist  $I$  ein offenes Intervall, und  $t_0 \in I$ . Wir bestimmen zunächst ein Intervall  $(a, b)$ , wo die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  definiert sind und ihre Graphen über  $(a, b)$  in  $K_\varepsilon$  enthalten sind. Da  $y(t_0) = x_0$ , gehört der Punkt  $(t_0, y(t_0))$  des Graphen von  $y(t)$  zum  $K_\varepsilon$ . Nach Satz 3.6, der Graph von  $y(t)$  verlässt  $K_\varepsilon$  für  $t$  gegen die Endpunkte von  $I$ , also  $(t, y(t)) \notin K_\varepsilon$  wenn  $t$  nahe bei den Endpunkten von  $I$  ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} a &= \sup \{t \in I, t < t_0 : (t, y(t)) \notin K_\varepsilon\} \\ b &= \inf \{t \in I, t > t_0 : (t, y(t)) \notin K_\varepsilon\} \end{aligned}$$

so dass  $a, b \in I$  und  $a < t_0 < b$ . Wir betonen, dass  $y(t)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert ist. Für jedes  $t \in (a, b)$  haben wir nach Definition von  $a$  und  $b$ , dass  $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$  und

somit  $t \in [\alpha, \beta]$ , woraus folgt  $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$  (vgl. Fig. 34). Man kann auch sagen, dass  $[a, b]$  maximales Intervall ist mit der Eigenschaft, dass der Graph von  $y(t)$  über  $[a, b]$  in  $K_\varepsilon$  enthalten ist.

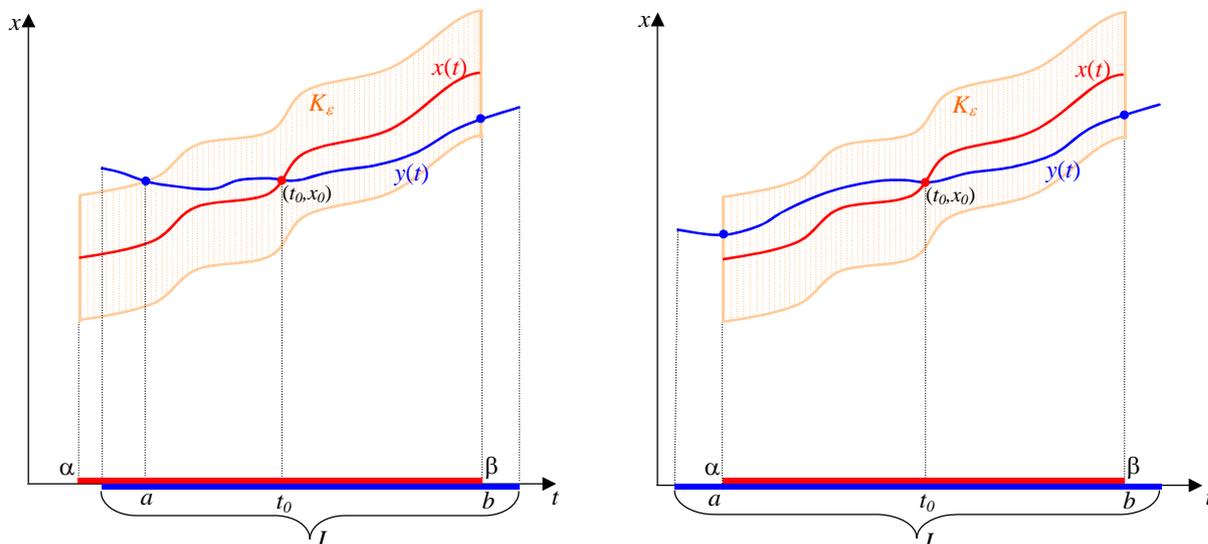


Figure 34: Definition des Intervalls  $[a, b]$ . Zwei Fälle:  $a > \alpha$  und  $a = \alpha$ .

Der letzte Schritt des Beweises ist zu zeigen, dass  $[a, b] = [\alpha, \beta]$  (vgl. der zweite Fall von Fig. 34). Daraus würde folgen, dass die Lösung  $y(t)$  auf ganzem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist und für jedes  $t \in [\alpha, \beta]$  gilt  $(t, y(t)) \in K_\varepsilon$ , also

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon,$$

was zu beweisen war. Angenommen, dass

$$\|f - g\|_{K_\varepsilon} \leq \eta$$

wobei  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  noch bestimmt werden muss, erhalten wir aus (3.33) mit  $K = K_\varepsilon$ , dass

$$\sup_{t \in (a, b)} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(b-a)} (b-a) \|f - g\|_{K_\varepsilon} \leq e^{L(\beta-\alpha)} (\beta-\alpha) \eta \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.37)$$

vorausgesetzt

$$\eta := \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} e^{-L(\beta-\alpha)}.$$

Lassen wir in (3.37)  $t \rightarrow a+$  und erhalten

$$\|x(a) - y(a)\| \leq \varepsilon/2. \quad (3.38)$$

Es folgt aus (3.38), dass  $a = \alpha$ . Ist  $a > \alpha$ , dann sind die beiden Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  in einem Intervall  $(a-r, a+r)$  mit hinreichend kleinem  $r > 0$  definiert, und es gilt in diesem Intervall  $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$ , insbesondere für  $t < (a-r, a]$ , was im Widerspruch zur Definition von  $a$  ist. Mit gleichem Argument zeigt man, dass  $b = \beta$ . ■

Es folgt aus dem Beweis die folgende Verfeinerung von Satz 3.8.

**Korollar 3.9** *Unter der Voraussetzungen von Satz 3.8, sei  $\varepsilon > 0$  eine Konstante, so dass  $K_\varepsilon \subset \Omega$  und  $f(t, x)$  Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $K_\varepsilon$  mit Lipschitz-Konstante  $L$  ist (wobei  $K_\varepsilon$  durch (3.35) definiert ist). Ist  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  hinreichend klein, so hat das AWP (3.30) eine Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$ , die die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\sup_{[\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq e^{L(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) \sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|. \quad (3.39)$$

**Beweis.** Nach dem Beweis von Satz 3.8 wissen wir, dass die Kleinheit von  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  ergibt  $[a, b] = [\alpha, \beta]$ . Dann folgt (3.39) aus (3.33). ■

### 3.5 Stetigkeit von Lösungen bezüglich Parameter

Betrachten wir das folgende Anfangswertproblem mit einem Parameter  $s$ :

$$\begin{cases} x' = f(t, x, s) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.40)$$

wobei  $f$  eine Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist und  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  ist. Hier  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \in \mathbb{R}^m$ , und das Dreifache  $(t, x, s)$  ist mit einem Punkt in  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  identifiziert wie folgt:

$$(t, x, s) = (t, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m).$$

Wie soll man das AWP (3.40) verstehen? Für jedes  $s \in \mathbb{R}^m$  betrachten wir die offene Menge

$$\Omega_s = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : (t, x, s) \in \Omega\}.$$

Alternativ kann  $\Omega_s$  definiert werden als der Durchschnitt  $\Omega \cap H_s$  mit der Hyperebene

$$H_s = \{(t, x, s) \in \mathbb{R}^{n+m+1} : t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\},$$

die mit  $\mathbb{R}^{n+1}$  identifiziert wird. (vgl. Fig. 35). Wir betonen, dass  $\Omega_s$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Ist  $(t, x) \in \Omega_s$ , dann gilt  $(t, x, s) \in \Omega$  und somit existiert eine Kugel  $B$  in  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  mit Zentrum an  $(t, x, s)$ , die in  $\Omega$  enthalten ist. Dann ist der Durchschnitt  $B \cap H_s$  eine Kugel in  $H_s$  mit Zentrum  $(t, x)$ , die in  $\Omega_s$  enthalten ist, woraus folgt, dass  $\Omega_s$  offen ist.

Bezeichnen wir mit  $S$  die Menge von Werten von  $s$  mit  $(t_0, x_0) \in \Omega_s$ , also

$$S = \{s \in \mathbb{R}^m : (t_0, x_0) \in \Omega_s\} = \{s \in \mathbb{R}^m : (t_0, x_0, s) \in \Omega\}.$$

Wir setzen immer vor, dass  $S$  nicht leer ist, und betrachten das Anfangswertproblem (3.40) im Definitionsbereich  $\Omega_s$  für jedes  $s \in S$ .

Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist stetig nach  $(t, x, s)$  in  $\Omega$  und lokal Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $\Omega_s$  für jedes  $s \in S$ . Nach Satz 3.6, für jedes  $s \in S$  existiert die maximale Lösung von (3.40), die mit  $x(t, s)$  bezeichnet wird. Sei  $I_s$  der Definitionsbereich der Funktion  $t \mapsto x(t, s)$ , also  $I_s$  ein offenes Intervall ist. Dann ist der Definitionsbereich der Funktion  $(t, s) \mapsto x(t, s)$  durch die Identität

$$U = \{(t, s) \in \mathbb{R}^{m+1} : s \in S, t \in I_s\}$$

gegeben.

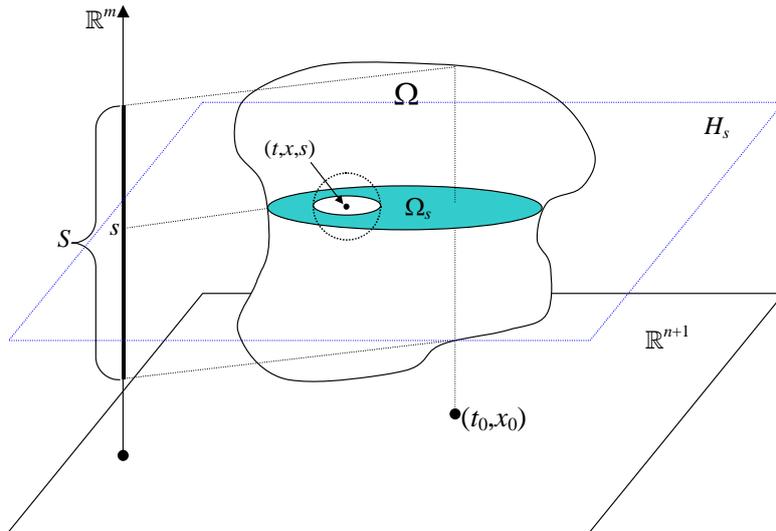


Figure 35: Menge  $\Omega_s$

**Satz 3.10** *Unter den obigen Voraussetzungen ist die Menge  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{m+1}$ , und the Funktion  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig bezüglich  $(t, s)$ .*

**Beweis.** Halten wir einen Wert  $s_0 \in S$  fest und betrachten die Lösung  $x(t) = x(t, s_0)$ , die auf dem Intervall  $I_{s_0}$  definiert ist. Sei  $[\alpha, \beta]$  ein Teilintervall von  $I_{s_0}$  mit  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ . Wir beweisen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$[\alpha, \beta] \times \bar{B}(s_0, \delta) \subset U, \quad (3.41)$$

was die Offenheit von  $U$  implizieren würde (vgl. Fig. 36). Die Kugeln in allen Räumen  $\mathbb{R}^k$  werden bezüglich die  $\infty$ -Norm betrachtet, so dass das Produkt von zwei Kugeln wieder eine Kugel ist.

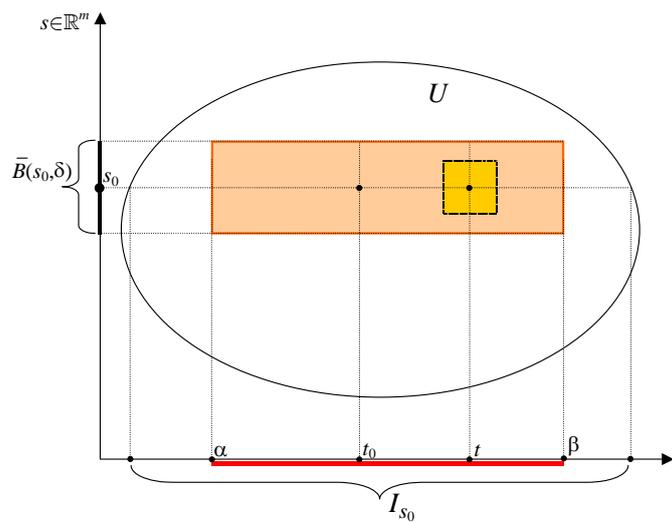


Figure 36: Die Menge  $U$  ist offen

Die Funktion  $x(t)$  löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $f(t, x) := f(t, x, s_0)$ . Betrachten wir noch einen Wert von  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$  und die Funktion  $y(t) = x(t, s)$ , die das folgende Anfangswertproblem löst:

$$\begin{cases} y' = g(t, y), \\ y(t_0) = x_0, \end{cases}$$

wobei  $g(t, y) = f(t, y, s)$ . Um (3.41) zu beweisen, es reicht zu zeigen, dass die Lösung  $y(t)$  auf ganzem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, vorausgesetzt, dass  $\|s - s_0\|$  hinreichend klein ist, also, wenn  $\delta$  hinreichend klein ist. Dafür betrachten wir die Menge

$$K_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha \leq t \leq \beta, \|x - x(t)\| \leq \varepsilon\},$$

(vgl. der Beweis von Satz 3.8), die für hinreichend kleines  $\varepsilon$  eine Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$  ist, und die Funktion  $f(t, x)$  Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $K_\varepsilon$  ist mit einer Lipschitz-Konstante  $L$ . Da  $K_\varepsilon$  eine kompakte Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$  ist, gilt für hinreichend klein  $\delta > 0$  die Inklusion

$$K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta) \subset \Omega$$

(vgl. Fig. 37), was mit dem gleichen Argument bewiesen wird, wie die Inklusion  $K_\varepsilon \subset \Omega_{s_0}$ .

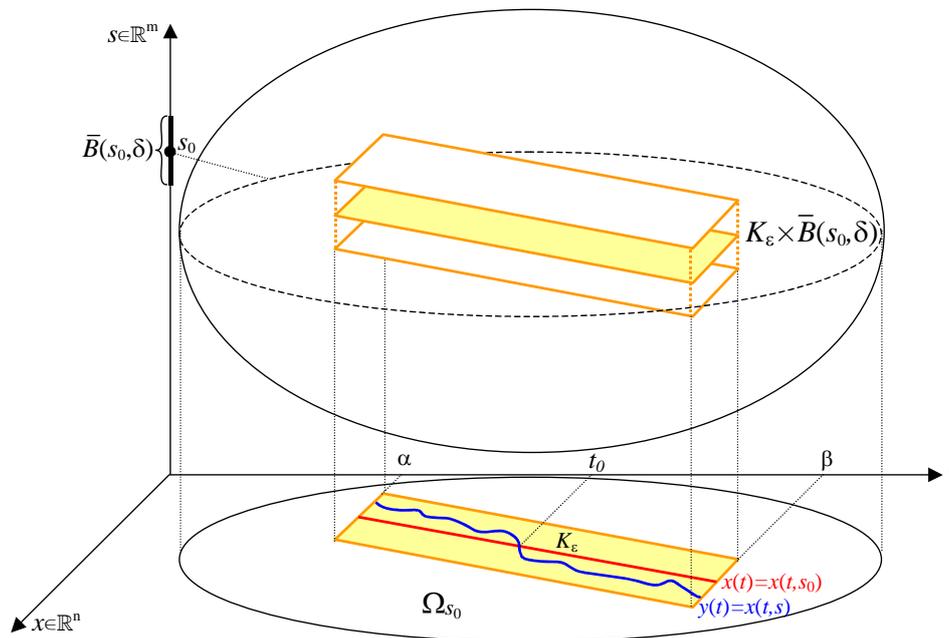


Figure 37: Die Mengen  $K_\varepsilon$  und  $K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta)$

Insbesondere gilt  $K_\varepsilon \subset \Omega_s$  für alle  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$  und somit ist  $g(t, y)$  auch auf  $K_\varepsilon$  definiert. Da die Funktion  $f(t, x, s)$  stetig ist, ist sie gleichmäßig stetig auf jeder kompakten Teilmenge von  $\Omega$ , insbesondere auf  $K_\varepsilon \times \overline{B}(s_0, \delta)$ . Daraus folgt, dass

$$\sup_{(t,x) \in K_\varepsilon} \|f(t, x, s_0) - f(t, x, s)\| \rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, \quad (3.42)$$

also,  $\sup_{K_\varepsilon} \|f - g\|$  kann beliebig klein sein für  $s \in \overline{B}(s_0, \delta)$ , vorausgesetzt  $\delta$  hinreichend klein ist. Angenommen das, erhalten wir nach Korollar 3.9, dass die Lösung  $y(t)$  auf dem Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist, woraus (3.41) folgt.

Darüber hinaus ergibt die Ungleichung (3.39) von Korollar 3.9 folgendes:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| &= \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t) - y(t)\| \leq C \sup_{K_\varepsilon} \|f - g\| \\ &= C \sup_{(t, x) \in K_\varepsilon} \|f(t, x, s_0) - f(t, x, s)\|, \end{aligned} \quad (3.43)$$

wobei  $C := e^{L(\beta-\alpha)}(\beta - \alpha)$ . Es folgt aus (3.42) und (3.43), dass

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| \rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, \quad (3.44)$$

so dass  $x(t, s)$  stetig nach  $s$  in  $s = s_0$  ist, und zwar ist die Stetigkeit gleichmäßig bezüglich  $t \in [\alpha, \beta]$ . Da  $x(t, s)$  stetig nach  $t$  für jedes  $s$  ist, es folgt, dass  $x$  stetig nach  $(t, s)$  ist.

In der Tat zeigen wir, dass für jedes  $(t_0, s_0) \in U$  (wobei  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ) nicht unbedingt der Anfangswert ist) gilt  $x(t, s) \rightarrow x(t_0, s_0)$  für  $(t, s) \rightarrow (t_0, s_0)$ . Anwendung von (3.44) und die Stetigkeit der Funktion  $x(t, s_0)$  nach  $t$  ergeben

$$\begin{aligned} \|x(t, s) - x(t_0, s_0)\| &\leq \|x(t, s) - x(t, s_0)\| + \|x(t, s_0) - x(t_0, s_0)\| \\ &\leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \|x(t, s) - x(t, s_0)\| + \|x(t, s_0) - x(t_0, s_0)\| \\ &\rightarrow 0 \text{ für } s \rightarrow s_0, t \rightarrow t_0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Als ein Beispiel von Anwendung von Satz 3.10, betrachten wir die Abhängigkeit der Lösung von dem Anfangswert.

**Korollar 3.11** *Betrachten wir das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.45)$$

wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion in einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist, die stetig und lokal Lipschitz-stetig nach  $x$  in  $\Omega$  ist. Für jedes  $(t_0, x_0) \in \Omega$  bezeichnen wir mit  $x(t, t_0, x_0)$  die maximale Lösung von (3.45). Dann ist die Funktion  $x(t, t_0, x_0)$  auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+2}$  definiert und stetig bezüglich  $(t, t_0, x_0)$ .

**Beweis.** Betrachten wir eine neue Funktion  $y(t) = x(t + t_0) - x_0$ , die die folgende DGL erfüllt:

$$y'(t) = x'(t + t_0) = f(t + t_0, x(t + t_0)) = f(t + t_0, y(t) + x_0).$$

Betrachten wir die Variable  $s := (t_0, x_0)$  als ein Parameter von Dimension  $n + 1$  und bezeichnen

$$F(t, y, s) = f(t + t_0, y + x_0).$$

Dann löst  $y(t)$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = F(t, y, s) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Der Definitionsbereich von Funktion  $F$  enthält den Punkt  $(t, y, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$  genau dann, wenn

$$(t + t_0, y + x_0) \in \Omega,$$

woraus folgt, dass der Definitionsbereich von  $F$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{2n+2}$  ist. Da die Funktion  $F(t, y, s)$  stetig nach  $(t, y, s)$  und lokal Lipschitz-stetig nach  $y$  ist, erhalten wir nach Satz 3.10, dass die maximale Lösung  $y = y(t, s)$  auf einer offenen Menge definiert und stetig nach  $(t, s)$  ist. Somit ist die Funktion  $x(t, t_0, x_0) = y(t - t_0, t_0, x_0) + x_0$  auch auf einer offenen Menge definiert und stetig nach  $(t, t_0, x_0)$ . ■

## 3.6 Differenzierbarkeit von Lösungen bezüglich Parameter

### 3.6.1 Die Variationsgleichung

Betrachten wir wieder das Anfangswertproblem mit Parameter  $s \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x' = f(t, x, s), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.46)$$

wobei  $f$  eine Abbildung von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist,  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  ist, und

$$(t, x, s) = (t, x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m).$$

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für die Ableitung von  $f$  bezüglich Variable  $x$ :

$$f_x = \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right),$$

wobei  $i = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $k = 1, \dots, n$  der Spaltenindex sind, so dass  $f_x$  eine  $n \times n$  Matrix ist. Diese Matrix heißt auch die *Jacobi-Matrix* von  $f$  nach  $x$ . Analog definieren wir die Ableitung von  $f$  bezüglich  $s$ :

$$f_s = \partial_s f = \frac{\partial f}{\partial s} := \left( \frac{\partial f_i}{\partial s_l} \right),$$

wobei  $i = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $l = 1, \dots, m$  der Spaltenindex sind, so dass  $f_s$  eine  $n \times m$  Matrix ist. Wir betrachten die Ableitungen  $f_x$  und  $f_s$  als Funktionen auf  $\Omega$  mit Werten in jeweils  $\mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

Nach Lemma 3.1, ist  $f_x$  stetig in  $\Omega$ , dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig nach  $x$ . In diesem Abschnitt setzen wir vor, dass  $f$  und  $f_x$  stetig in  $\Omega$  sind, so dass die obigen Ergebnisse verwendbar sind, und untersuchen die Existenz und die Eigenschaften der Ableitung  $y = \partial_s x$ .

Sei  $x(t, s)$  die maximale Lösung von (3.46). Nach Satz 3.10 ist der Definitionsbereich  $U$  von  $x(t, s)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{m+1}$  und die Funktion  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist stetig.

**Satz 3.12** *Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist stetig in  $\Omega$  und die Ableitungen  $f_x$  und  $f_s$  existieren und sind stetig in  $\Omega$ . Dann ist die Funktion  $x(t, s)$  stetig differenzierbar nach  $(t, s) \in U$  und die Ableitung  $y = \partial_s x$  löst das folgende Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y' = f_x(t, x(t, s), s) y + f_s(t, x(t, s), s), \\ y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Die Ableitung  $\partial_s x = \left( \frac{\partial x_k}{\partial s_l} \right)$  ist eine  $n \times m$  Jacobi-Matrix, wobei  $k = 1, \dots, n$  der Zeilenindex und  $l = 1, \dots, m$  der Spaltenindex sind. Deshalb nimmt die Funktion  $y(t, s) = \partial_s x$  die Werte in  $\mathbb{R}^{n \times m}$  an. Die beiden Terme auf der rechten Seite von (3.47) sind auch  $n \times m$  Matrizen:  $f_s$  ist eine  $n \times m$  Matrix nach Definition, und  $f_x y$  ist das Produkt von der  $n \times n$  Matrix  $f_x$  und der  $n \times m$  Matrix  $y$ , was wieder eine  $n \times m$  Matrix ist.

Die Bezeichnung  $f_x(t, x(t, s), s)$  bedeutet, dass man erst die Ableitung  $f_x(t, x, s)$  berechnet und danach den Wert von  $x = x(t, s)$  einsetzt. Die gleiche Erklärung gilt auch für  $f_s(t, x(t, s), s)$ .

Die DGL in (3.47) heißt die *Variationsgleichung* von der DGL  $x' = f(t, x, s)$  entlang der Lösung  $x(t, s)$ .

Wir betonen, dass die Variationsgleichung linear ist. In der Tat für jedes  $s$  kann die Variationsgleichung in der Form

$$y' = a(t)y + b(t)$$

geschrieben werden, wobei

$$a(t) = f_x(t, x(t, s), s), \quad b(t) = f_s(t, x(t, s), s).$$

Da  $f$  stetig und  $x(t, s)$  stetig nach Satz 3.10 ist, sind die Funktionen  $a(t)$  und  $b(t)$  stetig. Ist  $I_s$  der Definitionsbereich der Lösung  $t \mapsto x(t, s)$ , so ist der Definitionsbereich der Variationsgleichung  $I_s \times \mathbb{R}^{n \times m}$ . Nach Satz 2.1 existiert die Lösung  $y(t)$  von (3.47) auf dem ganzen Intervall  $I_s$ . Deshalb kann den Satz 3.12 wie folgt verstanden werden: sind  $x(t, s)$  die Lösung von (3.46) auf  $I_s$  und  $y(t)$  die Lösung von (3.47) auf  $I_s$ , dann gilt  $y(t) = \partial_s x(t, s)$  für alle  $t \in I_s$ .

Somit liefert der Satz 3.12 die Methode für Bestimmung der Ableitung  $\partial_s x(t, s)$  für einen Wert von  $s$ , ohne die Lösung  $x(t, s)$  für alle  $s$  berechnen zu müssen.

**Beispiel.** Betrachten wir das Anfangswertproblem mit Parameter

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2s/t \\ x(1) = -1 \end{cases}$$

im Bereich  $(0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (also,  $t > 0$  und  $x, s$  sind beliebig reell). Berechnen wir  $x(t, s)$  und  $\partial_s x$  für  $s = 0$ . Da die Funktion  $f(t, x, s) = x^2 + 2s/t$  stetig differenzierbar bezüglich  $(x, s)$  ist, ist die Lösung  $x(t, s)$  stetig differenzierbar nach  $(t, s)$ .

Für  $s = 0$  haben wir das AWP

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(1) = -1, \end{cases}$$

das man löst und erhält  $x(t, 0) = -\frac{1}{t}$ . Da  $f_x = 2x$  und  $f_s = 2/t$ , erhalten wir die Variationsgleichung entlang diese Lösung

$$y' = \left( f_x(t, x, s)|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) y + \left( f_s(t, s, x)|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) = -\frac{2}{t}y + \frac{2}{t}.$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung der Form  $y' = a(t)y + b(t)$ , die man mit Hilfe der Identität

$$y = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt$$

löst, wobei  $A(t)$  eine Stammfunktion von  $a(t) = -2/t$  ist. Setzen wir  $A(t) = -2 \ln t$  ein und erhalten

$$y(t) = t^{-2} \int t^2 \frac{2}{t} dt = t^{-2} (t^2 + C) = 1 + Ct^{-2}.$$

Die Anfangsbedingung  $y(1) = 0$  ist mit  $C = -1$  erfüllt, so dass  $y(t) = 1 - t^{-2}$ . Nach Satz 3.12 beschliessen wir, das  $\partial_s x(t, 0) = 1 - t^{-2}$ .

Die Taylor-Entwicklung von  $x(t, s)$  als eine Funktion von  $s$  ist wie folgt:

$$x(t, s) = x(t, 0) + \partial_s x(t, 0) s + o(s) \text{ as } s \rightarrow 0,$$

also

$$x(t, s) = -\frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) s + o(s) \text{ as } s \rightarrow 0.$$

Deshalb erhalten wir für kleine  $s$  eine Annäherung

$$x(t, s) \approx -\frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) s.$$

Später können wir die weiteren Terme in Taylor-Entwicklung der Lösung bestimmen.

Besprechen wir weiter die Variationsgleichung (3.47). Es ist einfach (3.47) zu gewinnen, vorausgesetzt, dass die gemischten Ableitungen  $\partial_s \partial_t x$  und  $\partial_t \partial_s x$  existieren und sind gleich. Ableitung die Gleichung (3.46) in  $s$  mit Hilfe von Kettenregel ergibt

$$\partial_t \partial_s x = \partial_s (\partial_t x) = \partial_s [f(t, x(t, s), s)] = f_x(t, x(t, s), s) \partial_s x + f_s(t, x(t, s), s),$$

woraus (3.47) folgt nach Einsetzen  $\partial_s x = y$ . Obwohl dieses Argument kein Beweis von Satz 3.12 ist, es hilft die Variationsgleichung zu erinnern.

Die Existenz und die Identität der Ableitungen  $\partial_t \partial_s x, \partial_s \partial_t x$  gelten unter den Bedingungen von Satz 3.12, aber im Beweis erhält man sie erst nach der Variationsgleichung<sup>14</sup> (vgl. die Bemerkung nach dem Beweis).

Man kann die Variationsgleichung (3.47) auch durch die Linearisierung gewinnen, wie folgt. Halten wir fest den Wert  $s = s_0$  und setzen  $x(t) = x(t, s_0)$ . Da  $f(t, x, s)$  differenzierbar in  $(x, s)$  ist, können wir für jedes  $t$  schreiben

$$f(t, x, s) = f(t, x(t), s_0) + f_x(t, x(t), s_0) (x - x(t)) + f_s(t, x(t), s_0) (s - s_0) + R,$$

wobei  $R$  der Restterm ist, also

$$R = o(\|x - x(t)\| + \|s - s_0\|) \text{ für } \|x - x(t)\| + \|s - s_0\| \rightarrow 0.$$

Ist  $s$  nahe bei  $s_0$ , dann ist nach Satz 3.10  $x(t, s)$  nahe bei  $x(t)$ , und wir erhalten die Annäherung

$$f(t, x(t, s), s) \approx f(t, x(t), s_0) + a(t) (x(t, s) - x(t)) + b(t) (s - s_0),$$

woraus folgt

$$x'(t, s) \approx f(t, x(t), s_0) + a(t) (x(t, s) - x(t)) + b(t) (s - s_0).$$

---

<sup>14</sup>Man könnte die Identität  $\partial_t \partial_s x = \partial_s \partial_t x$  mit Hilfe von Satz von Schwarz beschließen, indem man zunächst die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen  $\partial_t \partial_s x, \partial_s \partial_t x$  zeigt, aber der Beweis von Stetigkeit liefert gleichzeitig auch die Identität.

Die rechte Seite ist linear bezüglich  $x(t, s)$ , und diese Gleichung heißt die *Linearisierung* der DGL  $x' = f(t, x, s)$  entlang die Lösung  $x(t)$ . Ersetzen  $f(t, x(t), s_0)$  mit  $x'(t)$  und dividieren durch  $s - s_0$  ergibt die folgende ungefähre Gleichung für die Funktion  $z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t)}{s - s_0}$ :

$$z' \approx a(t)z + b(t).$$

Die Ableitung  $y(t) = \partial_s x|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s)$  erfüllt die Gleichung exakt.

### 3.6.2 Höhere Ableitungen in $s$

Der folgende Satz ergänzt den Satz 3.12 im Fall wenn  $f$  die höheren Ableitungen in  $s$  besitzt. Sei  $F$  eine Funktion von Variablen  $a, b, c, \dots$ . Wir schreiben

$$F \in C^k(a, b, \dots)$$

wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  von der Funktion  $F$  bezüglich Variablen  $a, b, \dots$  existieren und sind stetig im Definitionsbereich von  $F$ . Z.B., den ersten Teil von Satz 3.12 schreibt man kurz in der Form

$$f(t, x, s) \in C^1(x, s) \Rightarrow x(t, s) \in C^1(s),$$

weil nach der Voraussetzung  $f_x$  und  $f_s$  existieren und stetig sind und nach der Behauptung  $x$  stetig differenzierbar in  $s$  ist<sup>15</sup>.

**Satz 3.13** *Angenommen, die Funktion  $f(t, x, s)$  ist stetig in  $\Omega$  und  $f(t, x, s) \in C^k(x, s)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $x(t, s) \in C^k(s)$ . Außerdem gilt die folgende Identität für jeden Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  der Ordnung  $|\alpha| \leq k$ :*

$$\partial_t \partial_s^\alpha x = \partial_s^\alpha \partial_t x. \quad (3.48)$$

Ein Multiindex  $\alpha$  ist eine Folge  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  von  $m$  nicht-negativen ganzen Zahlen  $\alpha_i$ , die Ordnung  $|\alpha|$  von  $\alpha$  ist durch  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  definiert, und die Ableitung  $\partial_s^\alpha$  ist durch

$$\partial_s^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s_1^{\alpha_1} \dots \partial s_m^{\alpha_m}}$$

definiert.

Angenommen  $f \in C^2(x, s)$  und  $n = m = 1$ , bestimmen wir jetzt die zweite Ableitung  $z = \partial_{ss}x$ . Die erste Ableitung  $y = \partial_s x$  erfüllt die Variationsgleichung (3.47), die wir umschreiben wie folgt

$$\begin{cases} y' = g(t, y, s) \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

wobei

$$g(t, y, s) = f_x(t, x(t, s), s)y + f_s(t, x(t, s), s). \quad (3.50)$$

Es folgt von (3.50), dass  $g$  stetig ist und  $g \in C^1(y, s)$ . Insbesondere ist Satz 3.12 für (3.49) verwendbar, und wie erhalten die Variationsgleichung für  $z = \partial_s y = \partial_{ss}x$ :

$$z' = g_y(t, y(t, s), s)z + g_s(t, y(t, s), s).$$

Da  $g_y = f_x(t, x, s)$ ,

$$g_s(t, y, s) = f_{xx}(t, x, s)(\partial_s x)y + f_{xs}(t, x, s)y + f_{sx}(t, x, s)\partial_s x + f_{ss}(t, x, s),$$

<sup>15</sup>Satz 3.12 besagt auch die stetige Differenzierbarkeit von  $x(t, s)$  in  $t$ , aber das ist offensichtlich und folgt direkt aus der Gleichung  $\partial_t x = f(t, x, s)$ .

und  $\partial_s x = y$ , erhalten wir das Anfangswertproblem für  $z$ :

$$\begin{cases} z' = f_x(t, x, s)z + f_{xx}(t, x, s)y^2 + 2f_{xs}(t, x, s)y + f_{ss}(t, x, s) \\ z'(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.51)$$

Natürlich müssen überall  $x$  und  $y$  jeweils durch  $x(t, s)$  und  $y(t, s)$  ersetzt werden.

Die Gleichung (3.51) heißt die *zweite Variationsgleichung* entlang die Lösung  $x(t, s)$ . Sie ist eine lineare DGL und sie hat den gleichen Koeffizient  $f_x(t, x(t, s), s)$  vor der unbekanntem Funktion wie die erste Variationsgleichung. Analog bestimmt man die Variationsgleichungen der höheren Ordnungen.

**Beispiel.** Betrachten wir wieder das AWP

$$\begin{cases} x' = x^2 + 2s/t \\ x(1) = -1. \end{cases}$$

Wir haben schon für  $s = 0$  die Lösung und die Ableitung in  $s$  bestimmt:

$$x(t) := x(t, 0) = -\frac{1}{t} \quad \text{und} \quad y(t) := \partial_s x(t, 0) = 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Jetzt bestimmen wir die zweite Ableitung  $z(t) = \partial_{ss}x(t, 0)$ . Da

$$f_x = 2x, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xs} = 0, \quad f_{ss} = 0,$$

ist die zweite Variationsgleichung wie folgt:

$$\begin{aligned} z' &= \left( f_x|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) z + \left( f_{xx}|_{x=-\frac{1}{t}, s=0} \right) y^2 \\ &= -\frac{2}{t}z + 2(1 - t^{-2})^2. \end{aligned}$$

Die Lösung der linearen Gleichung  $z' = a(t)z + b(t)$  mit  $a(t) = -\frac{2}{t}$  und  $b(t) = 2(1 - t^{-2})^2$  ist

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t) dt = t^{-2} \int 2t^2 (1 - t^{-2})^2 dt \\ &= t^{-2} \left( \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{t} - 4t + C \right) = \frac{2}{3}t - \frac{2}{t^3} - \frac{4}{t} + \frac{C}{t^2}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung  $z(1) = 0$  ergibt  $C = \frac{16}{3}$  und somit

$$z(t) = \frac{2}{3}t - \frac{4}{t} + \frac{16}{3t^2} - \frac{2}{t^3}.$$

Dann ist die Taylor-Entwicklung von  $x(t, s)$  der zweiten Ordnung für  $s \rightarrow 0$  wie folgt:

$$\begin{aligned} x(t, s) &= x(t) + y(t)s + \frac{1}{2}z(t)s^2 + o(s^2) \\ &= -\frac{1}{t} + (1 - t^{-2})s + \left( \frac{1}{3}t - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3} \right) s^2 + o(s^2). \end{aligned}$$

Für Vergleich werden auf dem Bild 38 die folgenden Funktionen gezeigt:

1. die Lösung  $x(t, s)$  mit  $s = 0.1$  (schwarz), die sehr präzise mit Hilfe von numerischen Methoden (MAPLE) berechnet worden ist;
2. die Näherungslösung der Ordnung 0, also die Funktion  $-\frac{1}{t}$  (blau);
3. die Näherungslösung der Ordnung 1, also die Funktion  $-\frac{1}{t} + (1 - t^{-2}) s$  (grün);
4. die Näherungslösung der Ordnung 2, also die Funktion

$$-\frac{1}{t} + (1 - t^{-2}) s + \left( \frac{1}{3}t - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3} \right) s^2 \quad (\text{rot}).$$

Offensichtlich ist die letzte Funktion die beste Näherung von  $x(t, s)$ .

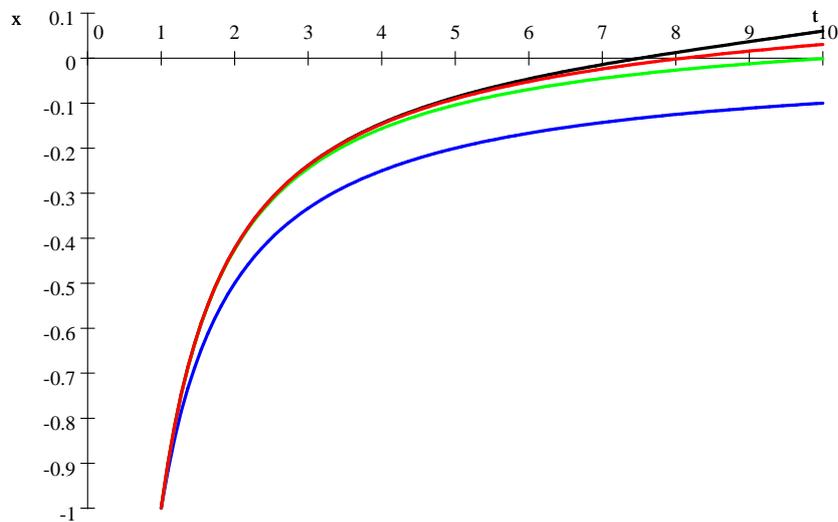


Figure 38: Die Funktion  $x(t, s)$  mit  $s = 0.1$  und Näherungslösungen

Jetzt besprechen wir eine alternative Methode für Bestimmung der Variationsgleichungen erster und zweiter Ordnung. Wie zuvor, seien  $x(t), y(t), z(t)$  jeweils  $x(t, 0), \partial_s x(t, 0)$  und  $\partial_{ss} x(t, 0)$ . Nach Taylor-Formel haben wir für  $s \rightarrow 0$

$$x(t, s) = x(t) + y(t) s + \frac{1}{2} z(t) s^2 + o(s^2). \quad (3.52)$$

Bestimmen wir die ähnliche Entwicklung für  $x' = \partial_t x$ :

$$x'(t, s) = x'(t, 0) + \partial_s x'(t, 0) s + \frac{1}{2} \partial_{ss} x'(t, 0) s^2 + o(s^2)$$

und bemerken, dass nach Satz 3.13

$$\partial_s x' = \partial_s \partial_t x = \partial_t \partial_s x = y'$$

und analog

$$\partial_{ss} x' = \partial_s y' = \partial_t \partial_s y = z',$$

woraus folgt

$$x'(t, s) = x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 + o(s^2). \quad (3.53)$$

Einsetzen (3.52) und (3.53) in die DGL

$$x' = x^2 + 2s/t$$

ergibt

$$x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 + o(s^2) = \left( x(t) + y(t)s + \frac{1}{2}z(t)s^2 + o(s^2) \right)^2 + 2s/t$$

und somit

$$x'(t) + y'(t)s + \frac{1}{2}z'(t)s^2 = x^2(t) + 2x(t)y(t)s + (y(t)^2 + x(t)z(t))s^2 + 2s/t + o(s^2).$$

Gleichsetzen die Terme mit den gleichen Potenzen von  $s$  (was gilt nach der Eindeutigkeit von Taylor-Entwicklung) ergibt die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= x^2(t) \\ y'(t) &= 2x(t)y(t) + 2s/t \\ z'(t) &= 2x(t)z(t) + 2y^2(t). \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung  $x(1, s) = -1$  erhalten wir

$$-1 = x(1) + sy(1) + \frac{s^2}{2}z(1) + o(s^2),$$

woraus folgt

$$x(t) = -1, \quad y(1) = z(1) = 0.$$

Die Lösung von den obigen DGLen mit diesen Anfangsbedingungen ergibt die gleichen Funktionen  $x(t), y(t), z(t)$  wie oberhalb.

### 3.6.3 Konvexität und Hadamard-Lemma

Für den Beweis von Sätze 3.12 und 3.13 brauchen wir einige Hilfssätze aus Analysis.

**Definition.** Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvex* falls mit jeden zwei Punkten  $x, y \in K$  erhält  $K$  auch das ganze Intervall  $[x, y]$ ; also,  $x, y \in K$  ergibt  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$  für jedes  $\lambda \in [0, 1]$ .

Wir brauchen die folgenden einfachen Eigenschaften von konvexen Mengen.

**Behauptung 1** Jede Kugel in  $\mathbb{R}^n$  bezüglich einer beliebigen Norm ist konvex.

**Beweis.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit reicht es zu zeigen, dass die Kugel  $B(0, r)$  in  $\mathbb{R}^n$  konvex. Gilt  $x, y \in B(0, r)$  dann haben wir  $\|x\| < r$  und  $\|y\| < r$ , woraus folgt für jedes  $\lambda \in [0, 1]$

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| < r,$$

und somit  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B(0, r)$ , was zu beweisen war. ■

**Behauptung 2** Sind  $A, B$  zwei konvexen Teilmengen von jeweils  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , dann ist das Produkt  $A \times B$  auch konvex.

**Beweis.** Bezeichnen wir die Elementen von  $A \times B$  mit  $(x, y)$  wobei  $x \in A$  und  $y \in B$ . Sind  $(x, y)$  und  $(x', y')$  Elementen von  $A \times B$  dann gilt für jedes  $\lambda \in [0, 1]$

$$(1 - \lambda)(x, y) + \lambda(x', y') = ((1 - \lambda)x + \lambda x', (1 - \lambda)y + \lambda y') \in A \times B,$$

woraus die Konvexität von  $A \times B$  folgt. ■

**Lemma 3.14** (Hadamard-Lemma) Seien  $\Omega$  eine offene konvexe Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert eine stetige Abbildung  $\varphi(x, y) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ , die die folgende Identität erfüllt:

$$f(y) - f(x) = \varphi(x, y)(y - x), \quad (3.54)$$

für alle  $x, y \in \Omega$  (wobei  $\varphi(x, y)(y - x)$  das Produkt der  $l \times n$  Matrix und des Spaltenvektor der Dimension  $n$ ).

Außerdem gilt für alle  $x \in \Omega$  die folgende Identität

$$\varphi(x, x) = f_x(x). \quad (3.55)$$

Bemerken wir, dass nach der Differenzierbarkeit von  $f$

$$f(y) - f(x) = f_x(x)(y - x) + o(\|y - x\|) \text{ für } y \rightarrow x.$$

Die Identität (3.54) bedeutet, dass die Term  $o(\|x - y\|)$  gelöscht werden kann, vorausgesetzt, dass  $f_x(x)$  durch eine stetige Funktion  $\varphi(x, y)$  ersetzt wird.

Betrachten wir die einfachen Beispiele von Funktionen  $f(x)$  im Fall  $n = l = 1$ . Sei  $f(x) = x^2$ , dann wir haben

$$f(y) - f(x) = (y + x)(y - x)$$

so dass (3.54) gilt mit  $\varphi(x, y) = y + x$ . Insbesondere gilt  $\varphi(x, x) = 2x = f'(x)$ . Analog haben wir für  $f(x) = x^k$  mit jedes  $k \in \mathbb{N}$ :

$$f(y) - f(x) = (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1})(y - x),$$

so dass  $\varphi(x, y) = x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}$  und  $\varphi(x, x) = kx^{k-1} = f'(x)$ .

Im Fall  $n = l = 1$  ist der Beweis von Hadamard-Lemma einfach, weil man die Funktion  $\varphi$  definieren kann, wie folgt:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, & y \neq x, \\ f'(x), & y = x, \end{cases}$$

die offensichtlich die beiden Identitäten (3.54) und (3.55) erfüllt. Es bleibt nur zu zeigen, dass  $\varphi$  stetig ist. Die Funktion  $\varphi$  ist offensichtlich stetig in jedem Punkt  $(x, y)$  mit  $x \neq y$ . Sie ist auch stetig in  $(x, x)$  weil für jede Folge  $\{(x_k, y_k)\}$  mit  $(x_k, y_k) \rightarrow (x, x)$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt

$$\varphi(x_k, y_k) = \begin{cases} \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k}, & x_k \neq y_k, \\ f'(x_k), & x_k = y_k, \end{cases} = f'(\xi_k) \rightarrow f'(x) = \varphi(x, x),$$

wobei nach Mittelwertsatz  $\xi_k \in [x_k, y_k]$ , also  $\xi_k \rightarrow x$  und  $f'(\xi_k) \rightarrow f'(x)$  nach der Stetigkeit von  $f'(x)$ .

Dieses Argument funktioniert für  $n > 1$  nicht, weil man im Fall  $n > 1$  durch  $y - x$  nicht dividieren kann. Im allgemeinen Fall benutzt man einen anderen Ansatz. Darüber hinaus brauchen wir eine Verallgemeinerung von Hadamard-Lemma, wenn die Funktion  $f$  von  $(t, x)$  abhängt, nicht nur von  $x$ .

**Lemma 3.15** (Verallgemeinerung von Hadamard-Lemma) *Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  so dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Menge*

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \Omega\}$$

*konvex ist (vgl. Fig. 39). Sei  $f(t, x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$  eine stetige Funktion ist so dass  $f_x$  existiert und stetig in  $\Omega$  ist. Setzen wir*

$$\begin{aligned} \Omega' &= \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : t \in \mathbb{R}, x, y \in \Omega_t\} \\ &= \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : (t, x) \in \Omega, (t, y) \in \Omega\}. \end{aligned}$$

*Dann existiert eine stetige Abbildung  $\varphi(t, x, y) : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ , die die folgende Identität erfüllt*

$$f(t, y) - f(t, x) = \varphi(t, x, y)(y - x)$$

*für alle  $(t, x, y) \in \Omega'$ .*

*Außerdem gilt für alle  $(t, x) \in \Omega$  die folgende Identität*

$$\varphi(t, x, x) = f_x(t, x). \quad (3.56)$$

Ist Funktion  $f(t, x)$  unabhängig von  $t$ , dann führt sich Lemma 3.15 auf Lemma 3.14 zurück.

**Beweis von Lemma 3.15.** Jede Komponente  $f_i$  kann separat behandelt werden und somit es reicht nur den Fall  $l = 1$  zu betrachten. In diesem Fall ist  $\varphi$  eine Zeile  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , und wir müssen beweisen, dass es  $n$  reellwertige stetige Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  auf  $\Omega'$  gibt, die die folgende Identität erfüllen

$$f(t, y) - f(t, x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x, y)(y_i - x_i),$$

für alle  $(t, x, y) \in \Omega'$ . Halten wir fest einen Punkt  $(t, x, y) \in \Omega'$  und betrachten die Funktion

$$F(\lambda) = f(t, x + \lambda(y - x))$$

für  $\lambda \in [0, 1]$ . Da  $x, y \in \Omega_t$  und  $\Omega_t$  konvex ist, ist der Punkt  $x + \lambda(y - x)$  auch Element von  $\Omega_t$ . Dann gilt  $(t, x + \lambda(y - x)) \in \Omega$  und somit ist die Funktion  $F(\lambda)$  wohl definiert für alle  $\lambda \in [0, 1]$ .

Offensichtlich es gilt  $F(0) = f(t, x)$ ,  $F(1) = f(t, y)$ . Nach der Kettenregel ist Funktion  $F(\lambda)$  stetig differenzierbar und

$$F'(\lambda) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x))(y_i - x_i).$$

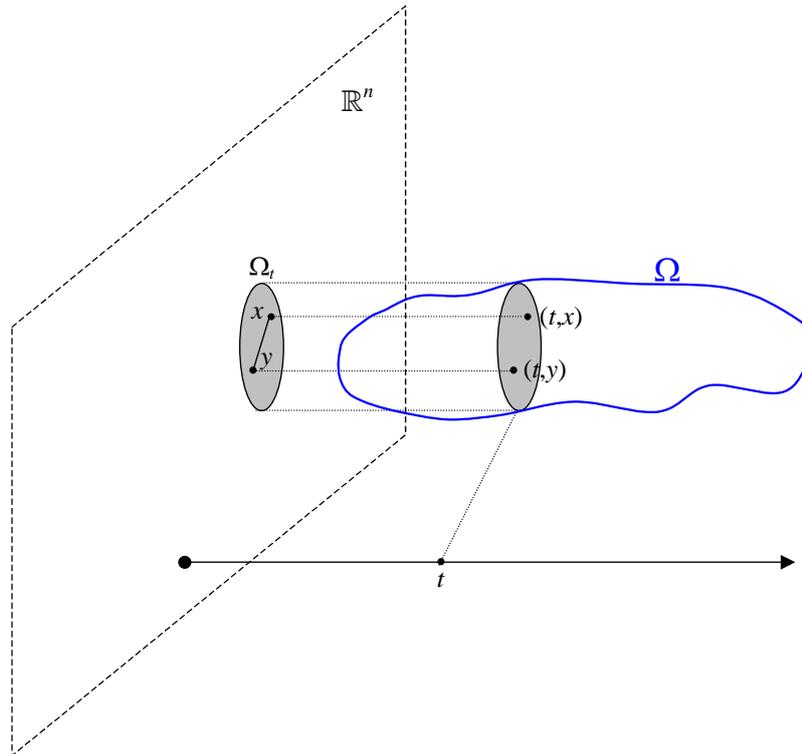


Figure 39: Die Mengen  $\Omega$  und  $\Omega_t$

Nach Fundamentalsatz der Analysis erhalten wir

$$\begin{aligned}
 f(t, y) - f(t, x) &= F(1) - F(0) \\
 &= \int_0^1 F'(\lambda) d\lambda \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) (y_i - x_i) d\lambda \\
 &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(t, x, y) (y_i - x_i)
 \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi_i(t, x, y) = \int_0^1 f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) d\lambda. \quad (3.57)$$

Insbesondere für  $x = y$  haben wir

$$f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x)) = f_{x_i}(t, x)$$

woraus folgt

$$\varphi_i(t, x, x) = f_{x_i}(t, x)$$

und somit  $\varphi(t, x, x) = f_x(t, x)$ , also (3.56).

Um die Stetigkeit von  $\varphi_i$  zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass  $\Omega'$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{2n+1}$  ist, da  $\Omega'$  das Vorbild von  $\Omega \times \Omega$  ist bezüglich der stetigen Abbildung

$(t, x, y) \mapsto ((t, x), (t, y)) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ . Offensichtlich ist  $f_{x_i}(t, x + \lambda(y - x))$  eine stetige Funktion von  $(\lambda, t, x, y) \in [0, 1] \times \Omega'$ . Nach Integration in  $\lambda$  (vgl. (3.57)) erhält man eine stetige Funktion von  $(t, x, y)$ , was zu beweisen war. ■

Der Vollständigkeit halber beweisen wir die letzte Behauptung, die zu Analysis II gehört.

**Lemma** Sei  $f(\lambda, v)$  eine reellwertige stetige Funktion auf  $[a, b] \times V$ , wobei  $V$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^k$  ist,  $\lambda \in [a, b]$  und  $v \in V$ . Dann ist die Funktion

$$\varphi(v) = \int_a^b f(\lambda, v) d\lambda$$

stetig in  $V$ .

**Beweis.** Sei  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $V$ , die gegen einen Punkt  $v \in V$  konvergiert. Da  $V$  offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  so dass  $\overline{B}(v, \varepsilon) \subset V$ . Es folgt aus  $v_k \rightarrow v$ , dass alle Punkte  $v_k$  mit genügend groß  $k$  in der Kugel  $\overline{B}(v, \varepsilon)$  enthalten. Da  $f(\lambda, v)$  stetig  $[a, b] \times V$ , ist  $f(\lambda, v)$  gleichmäßig stetig auf jede kompakte Teilmenge von  $[a, b] \times V$ , insbesondere auf  $[a, b] \times \overline{B}(v, \varepsilon)$ . Daraus folgt, dass

$$f(\lambda, v_k) \rightrightarrows f(\lambda, v) \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

wobei das Zeichen  $\rightrightarrows$  die gleichmäßige Konvergenz bezüglich  $\lambda \in [a, b]$  bedeutet. Da das Integralzeichen und die gleichmäßige Konvergenz vertauschbar sind, erhalten wir

$$\varphi(v_k) = \int_a^b f(\lambda, v_k) d\lambda \rightarrow \int_a^b f(\lambda, v) d\lambda = \varphi(v),$$

also  $\varphi$  stetig ist, was zu beweisen war. ■

### 3.6.4 Die Beweise

**Beweis von Satz 3.12.** Erinnern wir uns daran, dass  $x(t, s)$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems (3.46) ist, die auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$  definiert und stetig ist (vgl. Satz 3.10). Im ersten Teil des Beweises zeigen wir, dass die partielle Ableitung  $\partial_{s_i} x$  existiert in  $U$ . Da dies unabhängig für jede Komponente  $s_j$  gemacht werden kann und auch die Variationsgleichung für jede Komponente  $y_j = \partial_{s_j} x$  unabhängig bewiesen werden kann, setzen wir im diesen Teil des Beweises vor, dass  $s$  ein-dimensional ist, also  $m = 1$ .

Halten wir einen Wert  $s_0$  von dem Parameter  $s$  fest und beweisen, dass die Ableitung  $\partial_s x(t, s)$  existiert in  $s = s_0$ . Dafür werden wir das Verhältnis

$$z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0}$$

betrachten und bemerken, dass  $z$  eine DGL erfüllt, wie folgt:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x'(t, s) - x'(t, s_0)}{s - s_0} \\ &= \frac{f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t, s_0), s_0)}{s - s_0} \\ &= \frac{a(t, s)(x(t, s) - x(t, s_0)) + b(t, s)(s - s_0)}{s - s_0} \\ &= a(t, s)z + b(t, s) \end{aligned} \tag{3.58}$$

wobei die Funktionen  $a$  und  $b$  aus Hadamard-Lemma kommen. Dann werden wir mit Hilfe der DGL (3.58) zeigen, dass  $\lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s)$  existiert.

Die Einzelheiten sowohl auch die Fortsetzung dieses Arguments folgen später, nachdem die Anwendung von Hadamard-Lemma begründet ist. Dafür muss die Funktion  $f(t, x, s)$  in einer offenen Teilmenge  $W \subset \Omega$  betrachtet werden, so dass

- $W_t$  konvex für alle  $t$  ist und
- $(t, x(t, s), s) \in W$  für alle  $s$  in einer Umgebung von  $s_0$ .

Jetzt bilden wir die Menge  $W$ . Sei  $[\alpha, \beta]$  ein beschränktes abgeschlossenes Teilintervall von  $I_{s_0}$ , wobei  $I_{s_0}$  der Definitionsbereich der Lösung  $x(t, s_0)$  ist. Es reicht zu beweisen, dass  $\partial_s x(t, s)$  existiert in  $s = s_0$  für jedes  $t \in (\alpha, \beta)$ . Wir nehmen immer an, dass  $(\alpha, \beta)$  den Punkt  $t_0$  enthält. Nach dem Beweis von Satz 3.10 existieren hinreichend kleine  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  mit folgenden Eigenschaften: die Menge

$$V = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha < t < \beta, \|x - x(t, s_0)\| < \varepsilon\}$$

eine Teilmenge von  $\Omega_{s_0}$ , die Lösung  $t \mapsto x(t, s)$  ist für jedes  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  auf dem Intervall  $(\alpha, \beta)$  definiert, und der Graph dieser Lösung ist in  $V$  enthalten (vgl. Fig. 40).

Setzen wir jetzt

$$W := V \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

und bemerken, dass  $W$  offen ist und  $W \subset \Omega$  für hinreichend klein  $\delta$ . Außerdem ist  $W_t$  konvex für jedes  $t$ . In der Tat haben wir nach Definition von  $W$ , dass

$$W_t = B(x(t, s_0), \varepsilon) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

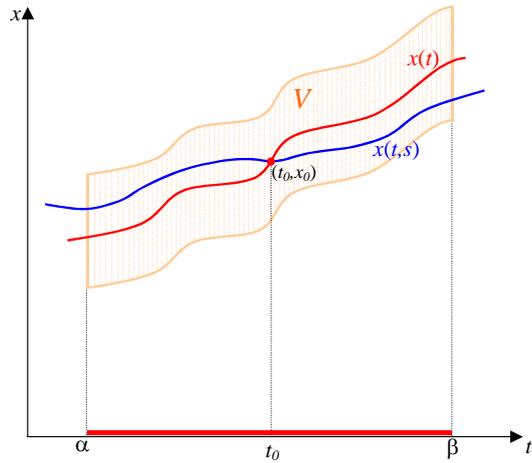


Figure 40: Lösungen  $x(t)$  und  $x(t, s)$

für  $t \in (\alpha, \beta)$ , und  $W_t = \emptyset$  für  $t \notin (\alpha, \beta)$  (vgl. Fig. 41). Da die Kugel  $B(x(t, s_0), \varepsilon)$  und das Intervall  $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  konvex sind, ist  $W_t$  auch konvex.

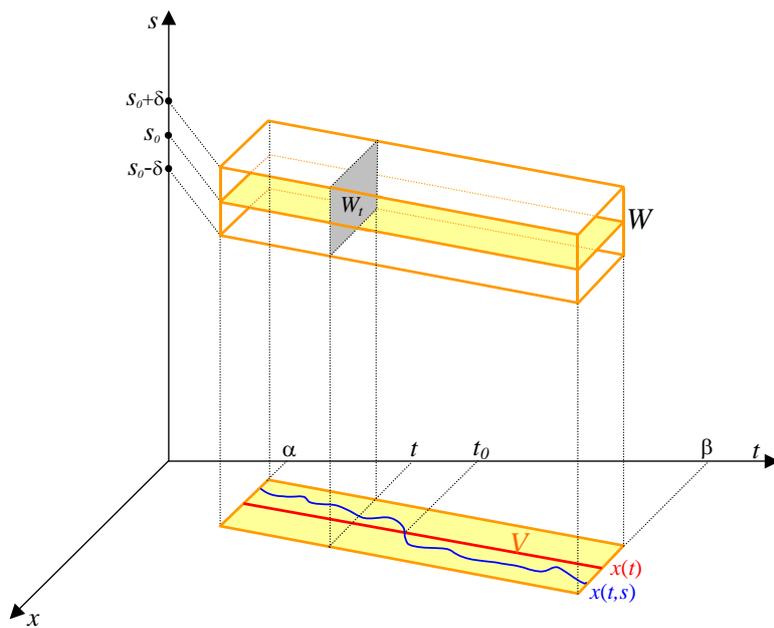


Figure 41: Die Mengen  $W$  und  $W_t$

Da die Funktion  $f(t, x, s)$  stetig in  $(t, x, s)$  und stetig differenzierbar in  $(x, s)$  ist, ist Lemma 3.15 verwendbar mit Funktion  $f(t, x, s)$  im Definitionsbereich  $W$ , mit dem Parameter  $t$  und Funktionsargument  $(x, s)$ . Nach Lemma 3.15 erhalten wir die Identität

$$f(t, y, s) - f(t, x, s_0) = \varphi(t, x, s_0, y, s)(y - x) + \psi(t, x, s_0, y, s)(s - s_0),$$

für alle  $(t, y, s), (t, x, s_0) \in W$ , wobei  $\varphi$  und  $\psi$  stetige Funktionen sind<sup>16</sup>

Insbesondere erhalten wir für  $x = x(t, s_0)$  und  $y = x(t, s)$ , dass

$$\begin{aligned} f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t, s_0), s_0) &= \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) (x(t, s) - x(t, s_0)) \\ &\quad + \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) (s - s_0) \\ &= a(t, s) (x(t, s) - x(t, s_0)) + b(t, s) (s - s_0), \end{aligned}$$

wobei the Funktionen

$$a(t, s) = \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) \quad \text{und} \quad b(t, s) = \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s), s) \quad (3.59)$$

stetig in  $(t, s) \in (\alpha, \beta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  sind (und  $s_0$  als eine Konstante betrachtet wird).

Für alle  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \setminus \{s_0\}$  und  $t \in (\alpha, \beta)$  definieren wir die Funktion

$$z(t, s) = \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0} \quad (3.60)$$

und bemerken, dass nach (3.46) und (3.59),

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x'(t, s) - x'(t, s_0)}{s - s_0} = \frac{f(t, x(t, s), s) - f(t, x(t), s_0)}{s - s_0} \\ &= a(t, s) z + b(t, s). \end{aligned}$$

Da auch  $z(t_0, s) = 0$  gilt (weil  $x(t_0, s) = x(t_0, s_0) = x_0$ ), löst die Funktion  $z(t, s)$  für jedes  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \setminus \{s_0\}$  das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} z' = a(t, s) z + b(t, s) \\ z(t_0, s) = 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Da die DGL (3.61) linear ist und the Funktionen  $a$  und  $b$  stetig in

$$(t, s) \in (\alpha, \beta) \times (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \quad (3.62)$$

sind, erhalten wir nach Satz 2.1, dass die Lösung des AWP's (3.61) für alle  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$  und  $t \in (\alpha, \beta)$  existiert und eindeutig ist. Bezeichnen wir jetzt mit  $z(t, s)$  die Lösung von (3.61), die als Funktion von  $(t, s)$  im Bereich (3.62) definiert ist, und bemerken, dass nach Satz 3.10 die Funktion  $z(t, s)$  stetig im diesen Bereich. Andererseits ist die Lösung von (3.61) für  $s \neq s_0$  durch (3.60) gegeben. Nach der Stetigkeit von  $z(t, s)$  in  $s$  erhalten wir

$$\partial_s x(t, s) \big|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{x(t, s) - x(t, s_0)}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} z(t, s) = z(t, s_0),$$

so dass die Ableitung  $y(t) = \partial_s x(t, s) \big|_{s=s_0}$  existiert und mit  $z(t, s_0)$  übereinstimmt, also  $y(t)$  erfüllt das Anfangswertproblem (3.61) mit  $s = s_0$ :

$$\begin{cases} y' = a(t, s_0) y + b(t, s_0), \\ y(t_0) = 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

---

<sup>16</sup>Der Definitionsbereich der Funktion  $\varphi(t, x, r, y, s)$  ist die Menge

$$\begin{aligned} W' &= \{(t, x, r, y, s) : (t, x, r) \in W, (t, y, s) \in W\} \\ &= \{(t, x, r, y, s) : \alpha < t < \beta, \|x - x(t, s_0)\| < \varepsilon, \|y - x(t, s_0)\| < \varepsilon, |r - s_0| < \delta, |s - s_0| < \delta\} \end{aligned}$$

Nach (3.59) und Lemma 3.15 erhalten wir

$$a(t, s_0) = \varphi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s_0), s_0) = f_x(t, x(t, s_0), s_0)$$

und

$$b(t, s_0) = \psi(t, x(t, s_0), s_0, x(t, s_0), s_0) = f_s(t, x(t, s_0), s_0).$$

Einsetzen in (3.63) ergibt die Variationsgleichung (3.47) für  $y(t)$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion  $x(t, s)$  *stetig* differenzierbar in  $(t, s)$  ist, d.h. die Ableitungen  $\partial_t x$  und  $\partial_s x$  stetig sind. Dafür kehren wir zum allgemeinen Fall  $s \in \mathbb{R}^m$  zurück. Die Ableitung  $\partial_s x = y$  erfüllt die Variationsgleichung (3.47), also

$$\partial_t y = f_x(t, x(t, s), s)y + f_s(t, x(t, s), s) \quad (3.64)$$

und ist somit stetig in  $(t, s)$  nach Satz 3.10. Die Ableitung  $\partial_t x$  erfüllt die DGL

$$\partial_t x = f(t, x(t, s), s), \quad (3.65)$$

woraus die Stetigkeit von  $\partial_t x$  folgt. ■

**Beweis von Satz 3.13.** Induktion nach  $k$ . Für dem Induktionsanfang mit  $k = 1$  haben wir  $x \in C^1(s)$  nach Satz 3.12. Es folgt aus der DGL (3.65), dass  $\partial_t x$  differenzierbar in  $s$  ist, und wir erhalten nach der Kettenregel

$$\partial_s(\partial_t x) = \partial_s[f(t, x(t, s), s)] = f_x(t, x(t, s), s)\partial_s x + f_s(t, x(t, s), s). \quad (3.66)$$

Andererseits die Variationsgleichung (3.64) ergibt

$$\partial_t(\partial_s x) = \partial_t y = f_x(t, x(t, s), s)\partial_s x + f_s(t, x(t, s), s), \quad (3.67)$$

und wir beschliessen nach dem Vergleich von (3.66) und (3.67), dass

$$\partial_s \partial_t x = \partial_t \partial_s x. \quad (3.68)$$

Induktionsschritt von  $k - 1$  nach  $k$  für  $k \geq 2$ . Angenommen  $f \in C^k(x, s)$ , wir haben auch  $f \in C^{k-1}(x, s)$  und erhalten nach der Induktionsvoraussetzung, dass  $x \in C^{k-1}(s)$ . Setzen wir  $y = \partial_s x$  und benutzen die Variationsgleichung von Satz 3.12:

$$\begin{cases} y' = f_x(t, x, s)y + f_s(t, x, s), \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \quad (3.69)$$

wobei  $x = x(t, s)$ . Da  $f_x, f_s \in C^{k-1}(x, s)$  und  $x(t, s) \in C^{k-1}(s)$ , beschließen wir, dass die Verkettungen  $f_x(t, x(t, s), s)$  und  $f_s(t, x(t, s), s)$  von der Klasse  $C^{k-1}(s)$  sind. Deshalb ist die rechte Seite von (3.69) von der Klasse  $C^{k-1}(y, s)$ , und nach der Induktionsvoraussetzung erhalten wir, dass  $y \in C^{k-1}(s)$ . Daraus folgt, dass  $x \in C^k(s)$ .

Jetzt beweisen wir die Identität (3.48). Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  ein Multiindex mit  $0 < |\alpha| \leq k$ . Wählen wir einen Index  $i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\alpha_i \geq 1$  aus und bezeichnen mit  $\beta$  den Index

$$\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m),$$

wobei 1 nur an der Stelle  $i$  subtrahiert wird. Dann gilt die Identität  $\partial_s^\alpha = \partial_s^\beta \partial_{s_i}$  von Differentialoperatoren auf alle Funktionen von  $C^k(s)$ . Da

$$\partial_t x = f(t, x(t, s), s) \in C^k(s),$$

erhalten wir nach (3.68)

$$\partial_s^\alpha \partial_t x = \partial_s^\beta \partial_{s_i} \partial_t x = \partial_s^\beta \partial_t \partial_{s_i} x = \partial_s^\beta \partial_t y_i,$$

wobei  $y_i = \partial_{s_i} x$  die  $i$ -te Spalte der Matrix  $y = \partial_s x$  ist. Nach der Variationsgleichung (3.69) erfüllt  $y_i$  die folgende DGL

$$\partial_t y_i = f_x(t, x, s) y_i + f_{s_i}(t, x, s), \quad (3.70)$$

wobei die rechte Seite zur  $C^{k-1}(y, s)$  gehört. Da  $|\beta| \leq k - 1$ , erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung für die DGL (3.70), dass

$$\partial_s^\beta \partial_t y_i = \partial_t \partial_s^\beta y_i,$$

woraus folgt

$$\partial_s^\alpha \partial_t x = \partial_t \partial_s^\beta y_i = \partial_t \partial_s^\beta \partial_{s_i} x = \partial_t \partial_s^\alpha x.$$

■

## 4 Stabilität von Lösungen

### 4.1 Autonome DGLen

Eine *autonome* DGL ist die DGL der Form

$$x' = f(x) \quad (4.1)$$

wobei die Funktion keine explizite Abhängigkeit von  $t$  enthält. Die Funktion  $f(x)$  ist auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert und nimmt die Werte in  $\mathbb{R}^n$  an. Der Definitionsbereich der DGL (4.1) ist somit  $\mathbb{R} \times \Omega$ .

Die Menge  $\Omega$  heißt der *Phasenraum* (oder *Zustandsraum*) von (4.1). Jede Lösung  $x : I \rightarrow \Omega$  (wobei  $I$  ein Intervall ist) heißt *Phasenraumtrajektorie* oder einfach *Trajektorie* von (4.1). Die Gesamtheit von allen Trajektorien heißt das *Phasendiagramm* von (4.1).

Erinnern wir uns daran, dass der Graph von jeder Lösung, d.h. die Integralkurve, eine Teilmenge des Definitionsbereiches  $\mathbb{R} \times \Omega$  ist, die aus allen Punkten  $(t, x(t))$  besteht. Deshalb ist eine Phasenraumtrajektorie die Projektion der Integralkurve auf  $\Omega$ .

Die Unabhängigkeit von  $f$  von  $t$  impliziert die folgende offensichtliche Bemerkung.

**Behauptung** Sei  $x_0 \in \Omega$ . Die konstante Funktion  $x(t) \equiv x_0$  ist eine Lösung von  $x' = f(x)$  genau dann, wenn  $f(x_0) = 0$ .

**Definition.** Jede Nullstelle von  $f$  heißt *Ruhelage* der DGL  $x' = f(x)$ .

Dann ist jede Ruhelage eine konstante Lösung, was diese Bezeichnung erklärt. Es ist häufig der Fall, dass die Ruhelagen eines Systems die Form des Phasendiagramms bestimmen.

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases} \quad (4.2)$$

die teilweise gelöst werden kann, wie folgt. Dividieren die Gleichungen ergibt die trennbare DGL für  $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+y)}{y(1+x)},$$

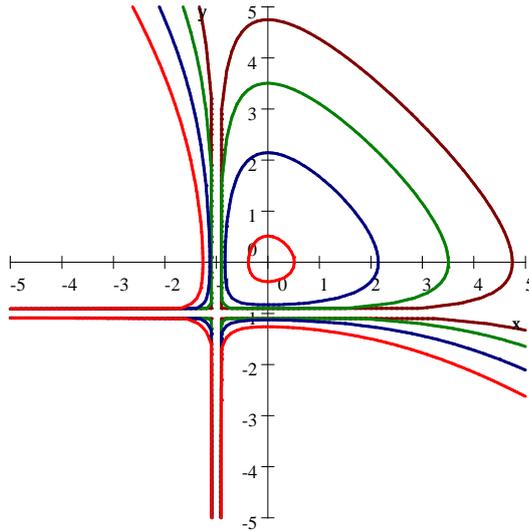


Figure 42: Das Phasendiagramm von (4.2)

woraus folgt

$$\int \frac{ydy}{1+y} = - \int \frac{xdx}{1+x}$$

und

$$y - \ln|y+1| + x - \ln|x+1| = C. \quad (4.3)$$

Die Trajektorien von (4.3) sind auf das Bild 42 gezeichnet. Man sieht zwei "Besonderheiten" des Phasendiagramms: die Punkte  $(0,0)$  und  $(-1,-1)$ , die genau die Ruhelagen von (4.2) sind.

**Definition.** Eine Ruhelage  $x_0$  des Systems  $x' = f(x)$  heißt *Ljapunow-stabil* wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  derart, dass jede maximale Lösung  $x(t)$  mit  $\|x(0) - x_0\| < \delta$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist und die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\sup_{t \in [0, +\infty)} \|x(t) - x_0\| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

Also, die Ljapunow-Stabilität bedeutet, dass

$$x(0) \in B(x_0, \delta) \implies x(t) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Für ein beschränktes Intervall  $[0, T]$  gilt es immer, dass

$$x(0) \in B(x_0, \delta) \implies x(t) \in B(x_0, \varepsilon) \text{ für alle } t \in [0, T],$$

was aus Korollar 3.11 folgt. Deshalb ist die Hauptfrage der Ljapunow-Stabilität das Verhalten der Lösung für  $t \rightarrow +\infty$ .

**Definition.** Eine Ruhelage  $x_0$  des Systems  $x' = f(x)$  heißt *asymptotisch stabil* wenn  $x_0$  Ljapunow-stabil ist und *attraktiv*, d.h.

$$x(t) \rightarrow x_0 \text{ as } t \rightarrow +\infty,$$

vorausgesetzt  $\|x(0) - x_0\|$  hinreichend klein ist.

Die Ljapunow-Stabilität und die asymptotische Stabilität sind unabhängig von der Wahl der Norm, da alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind.

Die Stabilität kann man auch für beliebige Lösungen des Systems  $x' = f(t, x)$  definieren. Dann bedeutet die Ljapunow-Stabilität, dass die kleinen Störungen des Anfangswerts  $x(0)$  zu kleinen Störungen von  $x(t)$  für alle  $t > 0$  führen. Für eine asymptotisch stabile Lösung gilt, dass die Lösung  $x(t)$  sich asymptotisch für  $t \rightarrow \infty$  nicht ändern lässt trotz der Störung von  $x(0)$ .

Die Stabilität der bestimmten physikalischen Systems hat die große Bedeutung für die Menschheit, z.B. die Stabilität des Sonnensystems. Die matematische Untersuchung der Stabilität solches komplizierten Systems kann extrem schwierig sein.

## 4.2 Stabilität eines linearen Systems

Betrachten wir ein lineares System  $x' = Ax$  in  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ein konstante Operator ist. Offensichtlich ist  $x = 0$  eine Ruhelage.

**Satz 4.1** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Setzen wir

$$\alpha = \max \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \}.$$

Gilt  $\alpha < 0$ , dann ist 0 asymptotisch stabil (und somit auch Ljapunow-stabil) für das System  $x' = Ax$ . Gilt  $\alpha \geq 0$ , dann ist 0 nicht asymptotisch stabil. Gilt  $\alpha > 0$ , dann ist 0 instabil (=nicht Ljapunow-stabil).

Im Fall  $\alpha = 0$  kann man die Ljapunow-Stabilität nicht eindeutig bestimmen, wie die Beispiele zeigen.

Den Satz 4.1 beweisen wir später. Jetzt betrachten wir den Fall  $n = 2$ , wenn die vollständige Klassifikation der Fällen von Stabilität möglich ist, sowohl auch die Beschreibung von den Phasendiagrammen.

Seien  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b = \{b_1, b_2\}$  die Jordan-Basis von  $A$ , und  $A^b$  die Jordan-Normalform von  $A$  in dieser Basis. Betrachten wir zunächst den Fall, wenn

$$A^b = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Dann sind  $b_1$  und  $b_2$  die Eigenvektoren mit den Eigenwerten jeweils  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , und die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} b_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} b_2,$$

also in der Basis  $b$

$$x(t) = (C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t})$$

und  $x(0) = (C_1, C_2)$ . Daraus folgt, dass

$$\|x(t)\|_\infty = \max(|C_1 e^{\lambda_1 t}|, |C_2 e^{\lambda_2 t}|) = \max(|C_1| e^{\operatorname{Re} \lambda_1 t}, |C_2| e^{\operatorname{Re} \lambda_2 t}) \leq \|x(0)\|_\infty e^{\alpha t}$$

wobei

$$\alpha = \max(\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2).$$

Ist  $\alpha \leq 0$ , so gilt

$$\|x(t)\|_\infty \leq \|x(0)\|$$

woraus die Ljapunow-Stabilität folgt<sup>17</sup>. Ist  $\alpha > 0$ , so ergibt der Satz 4.1 die Instabilität.

Zeichnen wir das Phasendiagramm des Systems  $x' = Ax$  unter der obigen Voraussetzungen in den verschiedenen Fällen.

Fall  $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell.

Für die Komponenten  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  der Lösung  $x(t)$  in der Basis  $\{b_1, b_2\}$  haben wir

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Im Fall  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  erhalten wir die folgende Beziehung zwischen  $x_1$  und  $x_2$ :

$$x_2 = C |x_1|^\gamma, \tag{4.5}$$

wobei  $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ . Das Phasendiagramm besteht aus den Kurven (4.5) sowohl auch aus den Halbgeraden  $x_1 > 0, x_1 < 0, x_2 > 0, x_2 < 0$ , die den Nullwerten von  $C_2$  und  $C_1$  entsprechen.

Ist  $\gamma > 0$  (d.h.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  haben gleiches Vorzeichen), so heißt die Ruhelage (bzw. das Phasendiagramm) der *Knoten* (vgl. Fig. 43 und 44). Der Knoten ist (und heißt) stabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , und instabil falls  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

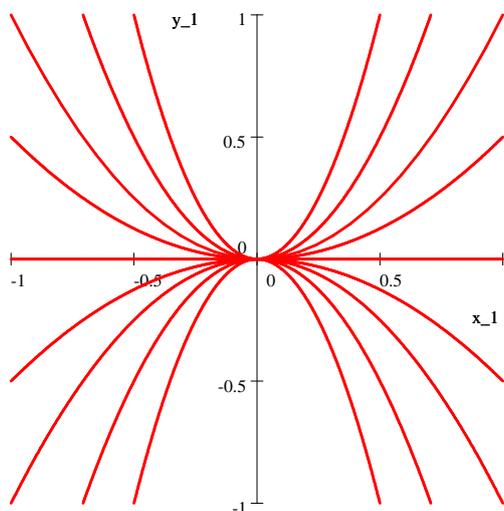


Figure 43: Der Knoten mit  $\gamma > 1$

Ist  $\gamma < 0$  (d.h.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  haben verschiedene Vorzeichen), dann heißt die Ruhelage der *Sattel* (vgl. Fig. 45). Der Sattel ist immer instabil.

Ist einer (oder die beiden) von  $\lambda_1, \lambda_2$  gleich 0, dann heißt die Ruhelage *ausgeartet* (horizontale oder vertikale Geraden oder Punkte).

Fall  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind imaginär, also  $\lambda_1 = \alpha - i\beta$  und  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ , wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , und  $\beta \neq 0$ .

<sup>17</sup>Ist  $\alpha < 0$ , so folgt die Stabilität auch aus Satz 4.1.

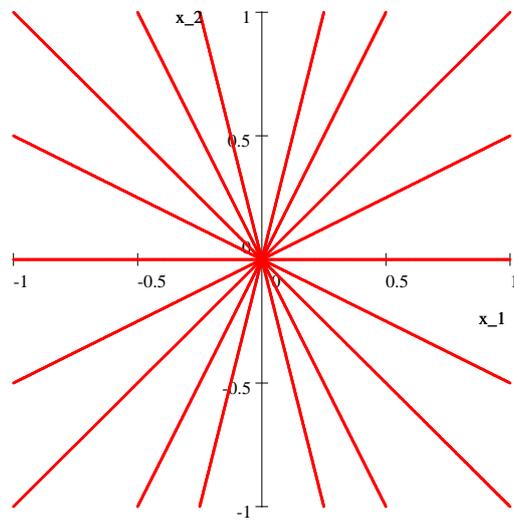


Figure 44: Der Knoten mit  $\gamma = 1$

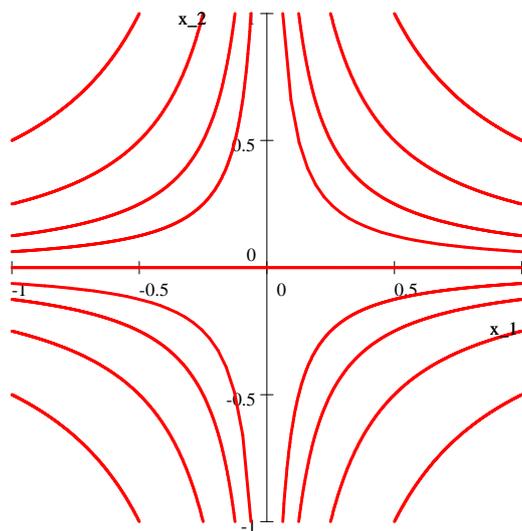


Figure 45: Der Sattel

Betrachten wir eine neue Basis  $\{u, v\}$  mit  $u = \frac{b_1+b_2}{2}$  und  $v = \frac{b_1-b_2}{2i}$ . Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \operatorname{Re} e^{(\alpha-i\beta)t} b_1 + C_2 \operatorname{Im} e^{(\alpha-i\beta)t} b_1 \\ &= C_1 e^{\alpha t} \operatorname{Re} (\cos \beta t - i \sin \beta t) (u + iv) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{Im} (\cos \beta t - i \sin \beta t) (u + iv) \\ &= e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t) u + e^{\alpha t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) v \\ &= C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \psi) u + C e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi) v \end{aligned}$$

wobei  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  und

$$\cos \psi = \frac{C_1}{C}, \quad \sin \psi = \frac{C_2}{C}.$$

Offensichtlich hat die Lösung die folgende Polarkoordinaten in der Ebene  $(u, v)$ :

$$r(t) = C e^{\alpha t} \quad \text{und} \quad \theta(t) = \beta t + \psi.$$

Ist  $\alpha \neq 0$  so bestimmen diese Gleichungen eine logarithmische Spirale, und die Ruhelage heißt auch *Spirale* (vgl. Fig. 46). Die Spirale ist stabil, falls  $\alpha < 0$  und instabil falls  $\alpha > 0$ .

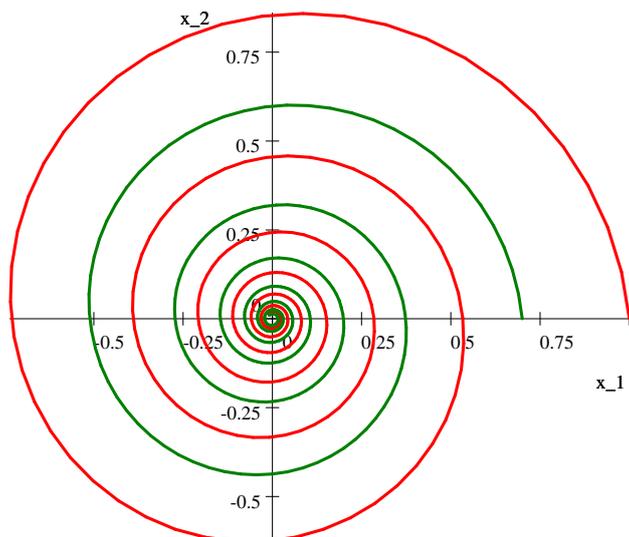


Figure 46: Die Spirale

Ist  $\alpha = 0$  (d.h.  $\lambda_1 = i\beta$  und  $\lambda_2 = -i\beta$ ), so ist die allgemeine Lösung durch  $r(t) = C$  gegeben, was die konzentrischen Kreislinien ergibt. In diesem Fall heißt die Ruhelage das *Zentrum* (vgl. Fig. 47). Das Zentrum ist Ljapunow-stabil aber nicht asymptotisch stabil.

Jetzt betrachten wir den Fall, wenn  $A^b$  keine Diagonalmatrix ist, d.h.  $A^b$  ein Jordanblock ist:

$$A^b = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist  $\lambda$  unbedingt reell, weil sonst die Matrix  $A$  auch den Eigenwert  $\bar{\lambda}$  besitzen muss. Nach Satz 2.26 ist die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} b_1 + C_2 e^{\lambda t} (t b_1 + b_2)$$

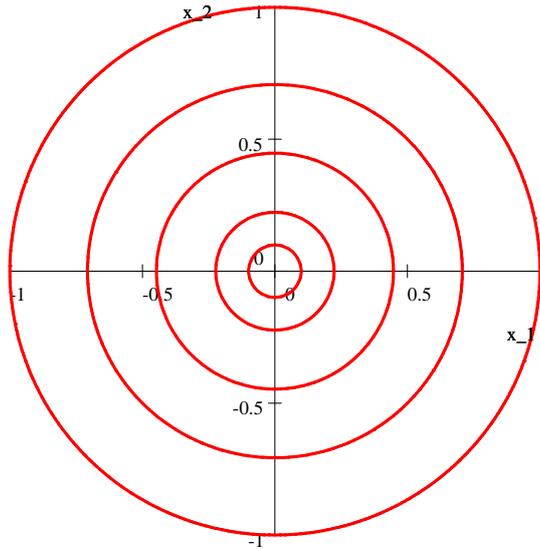


Figure 47: Das Zentrum

In der Basis  $b$  hat  $x(t)$  die folgende Komponenten:

$$x(t) = (e^{\lambda t} (C_1 + C_2 t), e^{\lambda t} C_2). \quad (4.6)$$

Ist  $\lambda < 0$  so ist die Ruhelage asymptotisch stabil nach Satz 4.1 (oder kann direkt gezeigt werden). Im Fall  $\lambda \geq 0$  ist die Ruhelage instabil, weil für  $C_1 = 0$  und  $C_2 = 1$  erhalten wir

$$\|x(t)\|_1 = e^{\lambda t} (1 + t),$$

so dass  $\|x(t)\|_1$  unbeschränkt ist, während jede stabile Lösung muss beschränkt sein.

Zeichnen wir jetzt das Phasendiagramm. Im Fall  $\lambda \neq 0$  erhalten wir aus (4.6) die folgenden Gleichungen für die Komponenten  $x_1$  und  $x_2$  von  $x$ :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{C_1}{C_2} + t \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{x_2}{C_2},$$

woraus folgt

$$x_1 = Cx_2 + \frac{x_2 \ln |x_2|}{\lambda}$$

mit  $C = \frac{C_1}{C_2} - \ln |C_2|$ . In diesem Fall heißt die Ruhelage auch der Knoten (vgl. Fig. 48).

Sie ist asymptotisch stabil fall  $\lambda < 0$  und instabil fall  $\lambda > 0$ .

Im Fall  $\lambda = 0$  erhalten wir ein ausgeartetes Phasendiagramm – eine Menge von parallelen Geraden.

Hier ist die Zusammenfassung von Typen der Ruhelagen in  $\mathbb{R}^2$ :

- ein *Knoten* ( $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell und  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ );
- ein *Sattel* ( $\lambda_1, \lambda_2$  sind reell und  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ );
- eine *Spirale* ( $\text{Im } \lambda \neq 0$  und  $\text{Re } \lambda \neq 0$ );

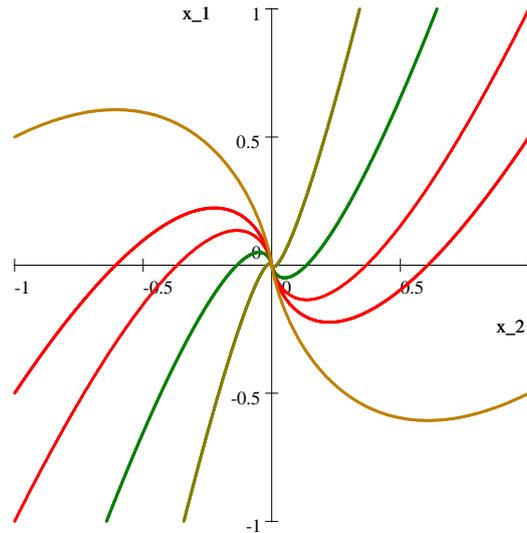


Figure 48: Der Knoten

- ein *Zentrum* ( $\text{Im } \lambda \neq 0$  und  $\text{Re } \lambda = 0$ );
- ausgeartete Ruhelage, wenn das Phasendiagramm aus parallelen Geraden oder Punkten besteht.

Wir betonen, dass im Fall  $\max \text{Re } \lambda = 0$  die beiden Stabilität und Instabilität geschehen können abhängig von der Jordan-Normalform von  $A$ .

### 4.3 Ljapunow's theorems

Betrachten wir eine allgemeine autonome DGL  $x' = f(x)$  wobei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $x_0$  eine Ruhelage, d.h.  $f(x_0) = 0$ . Wir untersuchen die Stabilität von  $x_0$ .

**Satz 4.2** (1-er Ljapunow-Satz) *Sei  $f \in C^2(\Omega)$  und setzen wir  $A = f_x(x_0)$  (d.h.  $A$  ist die Jacobi-Matrix von  $f$  in  $x_0$ ). Bezeichnen*

$$\alpha = \max \{ \text{Re } \lambda : \lambda \text{ ein Eigenwert von } A \}$$

- (a) *Ist  $\alpha < 0$  so ist  $x_0$  asymptotisch stabil.*  
 (b) *Ist  $\alpha > 0$  so ist  $x_0$  instabil.*

Den Teil (b) beweisen wir nicht, da der Beweis zu lang ist, aber man darf trotzdem den Teil (b) für den Aufgaben benutzen. here.

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y} \\ y' = \sin 3x + \ln(1 - 4y) \end{cases} \quad (4.7)$$

Der Punkt  $(0, 0)$  ist offensichtlich eine Ruhelage. Für die Funktion

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y} \\ \sin 3x + \ln(1 - 4y) \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$A = f_x(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man alle Komponenten von  $f(x,y)$  nach Taylor-Formel entwickeln wie folgt:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 2\sqrt{1+y} - 2e^{x+y} = 2\left(1 + \frac{y}{2} + o(x)\right) - 2(1 + (x+y) + o(|x| + |y|)) \\ &= -2x - y + o(|x| + |y|) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2(x,y) &= \sin 3x + \ln(1-4y) = 3x + o(x) - 4y + o(y) \\ &= 3x - 4y + o(|x| + |y|), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(|x| + |y|) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(|x| + |y|)$$

mit gleicher Matrix  $A$ .

Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 3 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 11,$$

und die Eigenwerte sind  $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{2}$ . Deshalb  $\alpha := \max \operatorname{Re} \lambda < 0$  und somit ist 0 für das System 4.7 asymptotisch stabil.

Kommen wir zurück zum Satz 4.2 und betrachten wir das lineare System  $X' = AX$ , die eine Linearisierung von  $x' = f(x)$  in  $x_0$  heißt<sup>18</sup>. Die Stabilität von Ruhelage 0 für die linearisierte DGL  $X' = AX$  steht in Zusammenhang (aber ist nicht identisch) mit der Stabilität von  $x_0$  für die DGL  $x' = f(x)$ . Die Voraussetzung  $\alpha < 0$  ergibt nach Satz 4.2 die asymptotische Stabilität von  $x_0$  für  $x' = f(x)$ , sowohl auch nach Satz 4.1 die asymptotische Stabilität von 0 für  $X' = AX$ . Ist  $\alpha > 0$ , so sind  $x_0$  instabil für  $x' = f(x)$  und 0 instabil für  $X' = AX$ . Aber im Fall  $\alpha = 0$  sind die Typen von Stabilität für  $x' = f(x)$  und  $X' = AX$  nicht unbedingt gleich.

**Beispiel.** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases}. \quad (4.8)$$

Die Lösung der Gleichungen

$$\begin{cases} y + xy = 0 \\ x + xy = 0 \end{cases}$$

ergibt zwei Ruhelagen  $(0,0)$  und  $(-1,-1)$ . Um die linearisierte Gleichung in  $(-1,-1)$  zu bestimmen, bezeichnen wir  $X = x + 1$  und  $Y = y + 1$ , so dass

$$\begin{cases} X' = (Y-1)X = -X + XY = -X + o(\|(X,Y)\|) \\ Y' = -(X-1)Y = Y - XY = Y + o(\|(X,Y)\|), \end{cases} \quad (4.9)$$

<sup>18</sup>Die Funktion  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0$  erfüllt die DGL

$$\tilde{x}' = f(\tilde{x} + x_0) = A\tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|).$$

Dann erhält man die linearisierte Gleichung indem man den Term  $o(\|\tilde{x}\|)$  ignoriert.

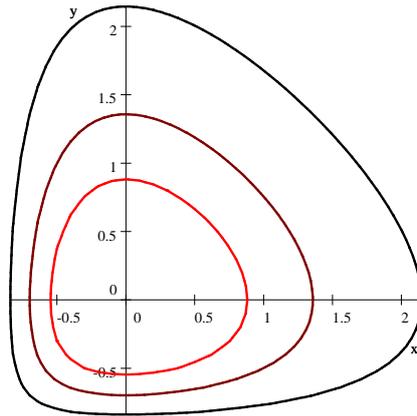


Figure 49: Die Trajektorien des System (4.8) in der Nähe von  $(0, 0)$

und die Linearisierung ist

$$\begin{cases} X' = -X \\ Y' = Y. \end{cases}$$

Die Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und die Eigenwerte sind  $-1$  und  $+1$ . Da  $\alpha = 1 > 0$ , ist die Ruhelage  $(-1, -1)$  instabil für (4.8).

In der Nähe von  $(0, 0)$  schreibt man das System (4.8) in der Form

$$\begin{cases} x' = y + o(\|(x, y)\|) \\ y' = -x + o(\|(x, y)\|), \end{cases}$$

woraus das linearisierte System folgt

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Die Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Eigenwerte sind  $\pm i$ . Da  $\alpha = 0$ , ist die Ruhelage  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil (aber nicht asymptotisch stabil) für die Linearisierung. Im Fall  $\alpha = 0$  können wir über die Stabilität von  $(0, 0)$  für (4.8) nicht beschliessen.

Da die Lösung von (4.8) kann explizit durch

$$x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C$$

gegeben werden (vgl. (4.3)), es folgt, dass die Trajektorien in der Nähe von  $(0, 0)$  geschlossene Kurven sind (vgl. Fig. 49). Somit ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.8) Ljapunow-stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Der Satz 4.2 wird mit Hilfe von dem zweiten Satz von Ljapunow bewiesen.

**Satz 4.3** (2-ter Ljapunow-Satz) Sei  $f \in C^1(\Omega)$  und  $x_0$  eine Ruhelage von  $f$ . Seien  $U$  eine offene Teilmenge von  $\Omega$  mit  $x_0 \in U$ , und  $V$  eine stetig differenzierbare skalare Funktion auf  $U$  mit  $V(x) > 0$  für alle  $x \in U \setminus \{x_0\}$  und  $V(x_0) = 0$ .

(a) Gilt für alle  $x \in U$

$$\partial_{f(x)}V(x) \leq 0, \quad (4.10)$$

so ist die Ruhelage  $x_0$  stabil für  $x' = f(x)$ .

(b) Sei  $W(x)$  eine stetige skalare Funktion auf  $U$  mit  $W(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_0\}$ . Gilt für alle  $x \in U$

$$\partial_{f(x)}V(x) \leq -W(x), \quad (4.11)$$

so ist die Ruhelage  $x_0$  asymptotisch stabil.

(c) Gilt für alle  $x \in U$

$$\partial_{f(x)}V(x) \geq W(x), \quad (4.12)$$

wobei  $W$  ist wie im (b), so ist die Ruhelage  $x_0$  instabil.

Die Funktion  $V$  heißt die *Ljapunow-Funktion*. Wir betonen, dass der Vektor  $f(x)$  im Ausdruck  $\partial_{f(x)}V(x)$  auch von  $x$  abhängt. Nach Definition haben wir

$$\partial_{f(x)}V(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) f_k(x).$$

Die Ableitung  $\partial_f V$  heißt die *orbitale Ableitung* von  $V$  bezüglich der DGL  $x' = f(x)$ .

**Bemerkung.** Für jeden Vektor  $u \in \mathbb{R}^n$  und für eine differenzierbare Funktion  $V$  auf (einer Teilmenge von)  $\mathbb{R}^n$  ist die Ableitung  $\partial_u V$  von  $V$  in der Richtung  $u$  definiert wie folgt:

$$\partial_u V(x) = V_x(x) u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) u_k.$$

Insbesondere für  $u = f(x)$  erhalten wir einen expliziten Ausdruck für die orbitale Ableitung:

$$\partial_{f(x)} V(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) f_k(x). \quad (4.13)$$

Die geometrische Bedeutung von der orbitalen Ableitung wird aus dem Beweis klar sein.

## 4.4 Beispiele

Hier zeigen wir einige Beispiele von Ljapunow-Funktionen.

**Beispiel.** Betrachten wir ein lineares Normalsystem  $x' = Ax$  wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um die Stabilität der Ruhelage 0 zu untersuchen, betrachten wir die Funktion

$$V(x) = \|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

die offensichtlich stetig differenzierbar in  $\mathbb{R}^n$  ist,  $V(0) = 0$  und  $V(x) > 0$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Setzen wir  $f(x) = Ax$  und  $A = (A_{kj})$  und bemerken, dass

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^n A_{kj} x_j.$$

Da  $\frac{\partial V}{\partial x_k} = 2x_k$ , es folgt aus (4.13), dass

$$\partial_f V = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k = 2 \sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k.$$

Erinnern wir uns daran, dass eine Matrix  $A$  *negativ semidefinit* heißt falls

$$\sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k \leq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Also, ist  $A$  negativ semidefinit so gilt  $\partial_f V \leq 0$ , und nach Satz 4.3(a) beschliessen wir, dass die Ruhelage 0 Ljapunow-stabil ist. Die matrix  $A$  heißt *negativ definit* falls

$$\sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Ist  $A$  negativ definit, dann haben wir

$$\partial_f V = -W \quad \text{mit } W = -2 \sum_{j,k=1}^n A_{kj} x_j x_k,$$

und nach Satz 4.3(b) ist 0 asymptotisch stabil. Analog, ist die matrix  $A$  *positiv definit* so ist 0 instabil nach Satz 4.3(c).

Z.B., sei  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  wobei  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ . Gilt  $\lambda_k \leq 0$  für alle  $k$ , dann ist  $A$  negativ semidefinit und somit ist 0 Ljapunow-stabil. Gilt  $\lambda_k < 0$  für alle  $k$ , dann ist  $A$  negativ definit und somit ist 0 asymptotisch stabil. Gilt  $\lambda_k > 0$  für alle  $k$ , so ist  $A$  positiv definit und somit ist 0 instabil.

**Beispiel.** Betrachten wir eine skalare DGL 2-ter Ordnung ODE

$$x'' + kx' = F(x),$$

die 1-dimensionale Bewegung eines Teilchens von Masse 1 unter einer konservativen Kraft  $F(x)$  beschreibt und zwar mit der Reibungskoeffizient  $k \geq 0$ . Das entsprechende Normalsystem ist

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky + F(x). \end{cases} \quad (4.14)$$

Ist  $F$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert, dann ist der Phasenraum des Systems (4.14) gleich  $\mathbb{R}^2$ , und ein Punkt  $(x, y)$  im Phasenraum ist ein Paar Koordinate-Geschwindigkeit.

Angenommen  $F(0) = 0$  so that  $(0, 0)$  eine Ruhelage ist. Wir versuchen herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Ruhelage  $(0, 0)$  stabil ist. In diesem Fall kann die gesamte Energie als die Ljapunow Funktion benutzt werden, so setzen wir

$$V(x, y) = U(x) + \frac{y^2}{2},$$

wobei

$$U(x) = - \int F(x) dx$$

die potentielle Energie ist und  $\frac{y^2}{2}$  die kinetische Energie. Setzen wir weiter vor, dass

$$F(x) < 0 \quad \text{für } x > 0, \quad F(x) > 0 \quad \text{für } x < 0, \quad (4.15)$$

und wählen die folgende Version der Potentialfunktion

$$U(x) = - \int_0^x F(s) ds,$$

so dass  $U(0) = 0$  und  $U(x) > 0$  für  $x \neq 0$ . Dann verschwindet die Funktion  $V(x, y)$  in  $(0, 0)$  und ist positiv außerhalb  $(0, 0)$ .

Für die Vektorfunktion

$$f(x, y) = (y, -ky + F(x)),$$

die die rechte Seite von (4.14) darstellt, berechnen wir die orbitale Ableitung  $\partial_f V$  wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\
 &= V_x y + V_y (-ky + F(x)) \\
 &= U'(x) y + y(-ky + F(x)) \\
 &= -F(x) y - ky^2 + yF(x) \\
 &= -ky^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Deshalb ist  $V$  eine Ljapunow Funktion, und nach Satz 4.3 ist die Ruhelage  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil.

Physikalisch bedeutet die Bedingung (4.15), dass die Kraft immer in Richtung auf 0 wirkt und somit wird das Teilchen gezwungen immer wieder zur 0 zu bewegen, was die Stabilität ergibt.

Betrachten wir, z.B., die folgenden Funktionen  $F$ , die (4.15) erfüllen:

$$F(x) = -x \quad \text{und} \quad F(x) = -x^3.$$

Die entsprechenden Ljapunow-Funktionen sind jeweils

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad \text{und} \quad V(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}.$$

**Beispiel.** Betrachten wir ein System

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = -x^3, \end{cases} \quad (4.16)$$

mit der Ruhelage  $(0, 0)$ . Die Funktion

$$V(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

ist echt positiv in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , und die orbitale Ableitung dieser Funktion bezüglich der DGL (4.16) ist

$$\begin{aligned}
 \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\
 &= x^3 (y - x) - yx^3 \\
 &= -x^4 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Nach Satz 4.3(a) ist  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil.

Mit Hilfe von einer anderen Ljapunow-Funktion kann man zeigen, dass die Ruhelage  $(0, 0)$  tatsächlich asymptotisch stabil ist. Für die Funktion

$$V(x, y) = (x - y)^2 + y^2$$

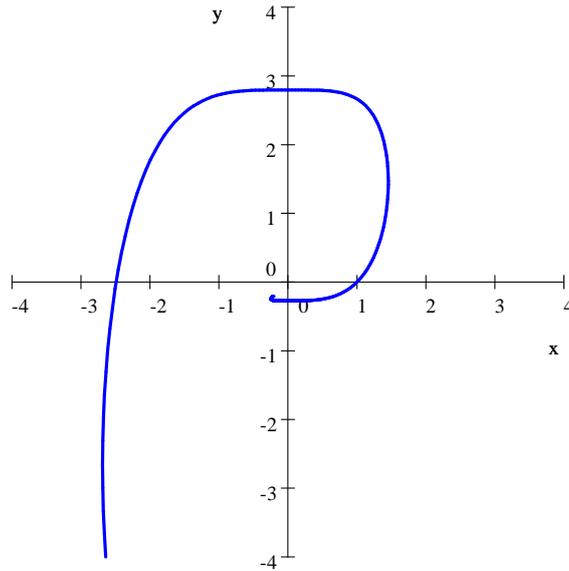


Figure 50: Eine Trajektorie des Systems (4.16)

haben wir

$$\begin{aligned}
 \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\
 &= 2(x-y)(y-x) - (-2(x-y) + 2y)x^3 \\
 &= -2(x-y)^2 - (4y-2x)x^3 \\
 &= -2(x-y)^2 - (4y-4x+2x)x^3 \\
 &= -2((x-y)^2 + 2(y-x)x^3 + x^4) \\
 &= -2\left((x-y+x^3)^2 + x^4 - x^6\right) = -2W,
 \end{aligned}$$

wobei

$$W(x, y) := (x - y + x^3)^2 + x^4 - x^6 > 0$$

für alle  $-1 < x < 1$  und  $y \in \mathbb{R}$  außer  $(x, y) = (0, 0)$ . Nach Satz 4.3 ist  $(0, 0)$  asymptotisch stabil für (4.16), was zu beweisen war. Auf dem Bild 50 wird eine Trajektorie des Systems (4.16) gezeichnet, so dass die Phasendiagramm in der Nähe von  $(0, 0)$  wie eine Spirale aussieht.

Betrachten wir auch das linearisierte System von (4.16) in der Nähe von  $(0, 0)$ :

$$\begin{cases} X' = -X + Y \\ Y' = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Die Matrix ist  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dieses Systems hat die Eigenwerte 0 und  $-1$ . Nach Satz 4.1 ist die Ruhelage  $(0, 0)$  für (4.17) nicht asymptotisch stabil. Trotzdem ist  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil, da  $A$  diagonalisierbar ist (vgl. Abschnitt 4.2).

Das linearisierte System (4.17) lässt sich explizit lösen wie folgt:

$$\begin{cases} X(t) = C_2 e^{-t} + C_1 \\ Y(t) = C_1 \end{cases},$$

woraus folgt, dass die Phasentrajektorien die horizontalen Geraden sind.

**Beispiel.** Betrachten wir wieder das System (4.8), also

$$\begin{cases} x' = y + xy \\ y' = -x - xy \end{cases}$$

und die Ruhelage  $(0, 0)$ . Wie wir es schon gesehen haben, erfüllen die Phasentrajektorien des System die Gleichung

$$x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1| = C.$$

Deshalb ist es sinnvoll die folgende Funktion

$$V(x, y) = x - \ln|x + 1| + y - \ln|y + 1|$$

in der Nähe von  $(0, 0)$  zu betrachten. Da

$$x > \ln|x + 1|$$

für alle  $x > -1$ ,  $x \neq 0$ , ist die Funktion  $V$  echt positiv für alle  $x > -1$ ,  $y > -1$  außer  $(x, y) = (0, 0)$ . Die orbitale Ableitung ist

$$\begin{aligned} \partial_f V &= V_x f_1 + V_y f_2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)(y + xy) + \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)(-x - xy) \\ &= xy - xy = 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.3(a) ist die Ruhelage  $(0, 0)$  Ljapunow-stabil, wie wir es auf dem Bild 49 schon gesehen haben.

## 4.5 Beweise

**Beweis von Satz 4.1.** Angenommen  $\alpha < 0$ , beweisen wir, dass die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist. Nach Corollary 2.27 ist die allgemeine komplexwertige Lösung des Systems  $x' = Ax$  durch die Identität

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} P_k(t) \quad (4.18)$$

gegeben, wobei  $C_k$  beliebige komplexe Konstanten sind,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  alle Eigenwerte von  $A$  sind mit den algebraischen Vielfachheiten, und  $P_k(t)$  vektorwertige Polynome, also

$$P_k(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_N t^N \quad (4.19)$$

mit einem  $N = 0, 1, \dots$  und mit Vektoren  $u_0, \dots, u_N \in \mathbb{R}^n$ .

Es folgt aus (4.18), dass für alle  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sum_{k=1}^n |C_k e^{\lambda_k t}| \|P_k(t)\| \\ &\leq \max_k |C_k| e^{(\operatorname{Re} \lambda_k) t} \sum_{k=1}^n \|P_k(t)\| \\ &\leq \max_k |C_k| e^{\alpha t} \sum_{k=1}^n \|P_k(t)\|. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die Norm des Polynoms (4.19) lässt sich abschätzen wie folgt:

$$\begin{aligned}\|P_k(t)\| &\leq \|u_0\| + \|u_1\|t + \dots + \|u_N\|t^N \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\| (1 + t + \dots + t^N) \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq N} \|u_j\| (N+1) (1 + t^N)\end{aligned}\quad (4.21)$$

weil  $t^j \leq 1 + t^N$  für alle  $j = 0, \dots, N$ . Daraus folgt, dass die folgende Abschätzung

$$\|P_k(t)\| \leq c(1 + t^N)$$

für alle  $k = 1, \dots, n$  und  $t \geq 0$  gilt, vorausgesetzt, dass  $c$  und  $N$  genügend groß sind. und für some large enough constants  $c$  und  $N$ .

Andererseits (4.18) ergibt

$$x(0) = \sum_{k=1}^n C_k P_k(0),$$

so dass die Koeffizienten  $C_k$  die Koordinaten des Anfangsvektors  $x(0)$  in der Basis  $\{P_k(0)\}_{k=1}^n$  sind. Daraus folgt, dass in dieser Basis

$$\max_k |C_k| = \|x(0)\|_\infty \leq c' \|x(0)\|, \quad (4.22)$$

mit einer Konstante  $c'$ , wo wir benutzt haben, dass alle Normen in  $\mathbb{R}^n$  äquivalent sind. Es folgt aus (4.20), (4.21) und (4.22), dass die folgende Ungleichung

$$\|x(t)\| \leq C \|x(0)\| e^{\alpha t} (1 + t^N) \quad (4.23)$$

gilt für alle  $t \geq 0$  mit einer Konstante  $C$ .

Gilt  $\alpha < 0$ , so ist die Funktion  $e^{\alpha t} (1 + t^N)$  auf  $[0, +\infty)$  beschränkt, und wir erhalten, dass für alle  $t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq K \|x(0)\|,$$

wobei

$$K = C \sup_{t \geq 0} e^{\alpha t} (1 + t^N) < \infty,$$

woraus die Ljapunow-Stabilität von 0 folgt.

Außerdem, da

$$e^{\alpha t} (1 + t^N) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty,$$

erhalten wir aus (4.23) dass auch  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , so dass 0 asymptotisch stabil ist.

Angenommen  $\alpha \geq 0$ , beweisen wir, dass 0 nicht asymptotisch stabil ist. Es reicht eine reellwertige Lösung  $x(t)$  zu bestimmen mit  $\|x(t)\| \not\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow +\infty$ . In der Tat ist die Funktion  $cx(t)$  für jede reelle Konstante  $c$  eine Lösung des Systems mit dem Anfangswert  $cx(0)$ , der beliebig klein sein kann, weil  $c$  beliebige ist, während  $cx(t) \not\rightarrow 0$  für  $t \rightarrow +\infty$ , so dass die asymptotische Stabilität nicht gilt.

Um eine solche Lösung zu bestimmen, wählen wir einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  aus, der aufgrund der Voraussetzung  $\alpha \geq 0$  existiert. Sei  $v$  ein Eigenvektor mit dem Eigenwert  $\lambda$ . Betrachten wir die Lösung

$$x(t) = e^{\lambda t} v \quad (4.24)$$

und schätzen sie ab wie folgt:

$$\|x(t)\| = |e^{\lambda t}| \|v\| = e^{t \operatorname{Re} \lambda} \|v\| \geq \|v\|. \quad (4.25)$$

Somit konvergiert  $x(t)$  gegen 0 nicht für  $t \rightarrow \infty$ . Ist  $x(t)$  eine reellwertige Lösung, so beendet das den Beweis. Ist  $x(t)$  eine komplexwertige Lösung, so sind die beiden Funktionen  $\operatorname{Re} x(t)$  und  $\operatorname{Im} x(t)$  reellwertige Lösungen, und mindestens eine davon konvergiert gegen 0 nicht.

Angenommen  $\alpha > 0$ , beweisen wir, dass die Ruhelage instabil ist. Es reicht zu zeigen, dass es eine reellwertige Lösung  $x(t)$  gibt mit unbeschränkter Norm  $\|x(t)\|$ . Wählen wir einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  aus und betrachten wieder die Lösung (4.24). Es folgt aus (4.25), dass  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow +\infty$ . Dann ist einer von den Lösungen  $\operatorname{Re} x(t)$  und  $\operatorname{Im} x(t)$  unbeschränkt, woraus die Behauptung folgt. ■

**Beweis von Satz 4.3.** (a) Die Hauptidee von Beweis ist wie folgt. Die Lösung  $x(t)$  hat den Anfangswert  $x(0)$  in der Nähe von  $x_0$ , insbesondere kann man voraussetzen, dass  $x(0) \in U$ . Dann gilt auch  $x(t) \in U$  für  $t \in [0, T)$  mit einem  $T > 0$ , und wir erhalten nach Kettenregel für alle  $t \in [0, T)$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = V_x(x) x'(t) = V_x(x) f(x) = \partial_{f(x)} V(x) \leq 0, \quad (4.26)$$

wobei wir auch die Voraussetzung (4.10) benutzt haben. Daraus folgt, dass die Funktion  $V$  monoton fallend entlang die Lösung  $x(t)$  ist, insbesondere gilt

$$V(x(t)) \leq V(x(0)).$$

Da  $V(x(0)) \approx 0$ , erhalten wir auch  $V(x(t)) \approx 0$  und somit muss der Punkt  $x(t)$  in der Nähe von  $x_0$  immer bleiben.

Um diese Idee umzusetzen, verkleinern wir zunächst die Menge  $U$  so dass  $U$  beschränkt ist und  $V(x)$  auf dem Abschluss  $\bar{U}$  definiert ist. Bezeichnen wir

$$B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein so dass  $\bar{B}_\varepsilon \subset U$ . Für solche  $\varepsilon$  definieren wir

$$m(\varepsilon) := \inf_{x \in \bar{U} \setminus B_\varepsilon} V(x).$$

Da  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  kompakt ist und  $V$  stetig und echt positiv auf  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  ist, erhalten wir, dass auch  $m(\varepsilon) > 0$  (da nach dem Satz von Minimum die Funktion  $V$  ihre untere Grenze auf  $\bar{U} \setminus B_\varepsilon$  annimmt).

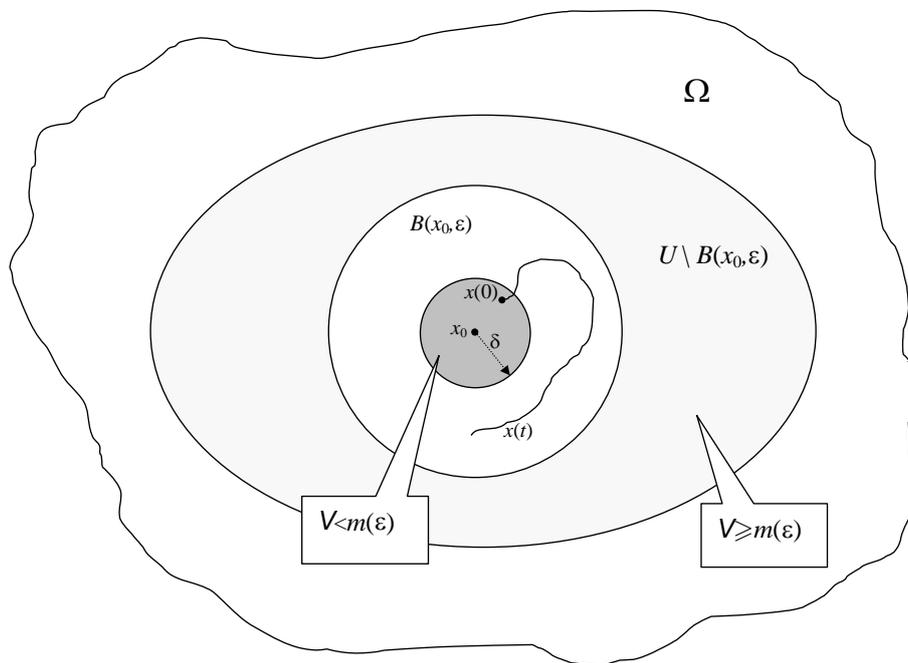


Figure 51: Beweis von Satz 4.3(a)

Nach Definition von  $m(\varepsilon)$  haben wir

$$V(x) \geq m(\varepsilon) \quad \text{für alle } x \in \bar{U} \setminus B_\varepsilon. \quad (4.27)$$

Da  $V(x_0) = 0$  und  $m(\varepsilon) > 0$ , existiert  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  so klein, dass

$$V(x) < m(\varepsilon) \quad \text{für alle } x \in B_\delta. \quad (4.28)$$

Sei  $x(t)$  eine maximale Lösung der DGL  $x' = f(x)$  im Bereich  $\mathbb{R} \times U$  mit  $x(0) \in B_\delta$ . Wir beweisen, dass  $x(t)$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist und  $x(t) \in B_\varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ , woraus die Ljapunow-Stabilität von 0 folgen wird.

Da  $x(0) \in B_\delta$ , erhalten wir nach (4.28), dass

$$V(x(0)) < m(\varepsilon).$$

Da die Funktion  $V(x(t))$  monoton fallend ist, erhalten wir auch

$$V(x(t)) < m(\varepsilon) \quad \text{für alle } t > 0,$$

sofern  $x(t)$  definiert ist<sup>19</sup>. Es folgt aus (4.27) dass  $x(t) \in B_\varepsilon$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $x(t)$  für alle  $t > 0$  definiert ist. Angenommen das Gegenteil gilt, also  $x(t)$  nur für  $t < T$  definiert ist, wobei  $T < \infty$ . Nach Satz 3.6 verlässt der Graph der Lösung  $x(t)$  jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R} \times U$  für  $t \rightarrow T-$ , während der Graph tatsächlich in der kompakten Menge  $[0, T] \times \overline{B_\varepsilon}$  enthalten ist. Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

(b) Es folgt aus (4.11) und (4.26), dass

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -W(x(t)).$$

Es reicht zu zeigen, dass

$$V(x(t)) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

da das die Konvergenz  $x(t) \rightarrow x_0$  ergibt (erinnern wir uns daran, dass  $x_0$  die einzige Nullstelle von  $V$  ist). Da  $V(x(t))$  monoton fallend ist, existiert der Grenzwert

$$c = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)).$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass  $c > 0$ . Nach der Stetigkeit von  $V$  existiert  $r > 0$  mit

$$V(x) < c \quad \text{für alle } x \in B_r.$$

Da  $V(x(t)) \geq c$  für alle  $t > 0$ , es folgt, dass  $x(t) \notin B_r$  für alle  $t > 0$ . Bezeichnen

$$m := \inf_{z \in \overline{U} \setminus B_r} W(z) > 0.$$

Da  $x(t) \in \overline{U} \setminus B_r$ , es folgt, dass  $W(x(t)) \geq m$  für alle  $t > 0$  und somit

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -W(x(t)) \leq -m.$$

Integration in  $t$  ergibt

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - mt,$$

woraus folgt, dass  $V(x(t)) < 0$  für hinreichend große  $t$ . Dieser Widerspruch beendet den Beweis.

(c) Nehmen wir das Gegenteil an, dass die Ruhelage  $x_0$  stabil ist, also, für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(t) \in B_\varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Wählen wir  $\varepsilon$  so dass  $\overline{B_\varepsilon} \subset U$ . Sei  $x(0)$  ein Punkt in  $B_\delta \setminus \{x_0\}$ . Dann  $x(t) \in B_\varepsilon$  für alle  $t > 0$ ; insbesondere haben wir  $x(t) \in U$  für alle  $t > 0$ . Es folgt aus der Voraussetzung (4.12), dass

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \geq W(x(t)) \geq 0 \tag{4.29}$$

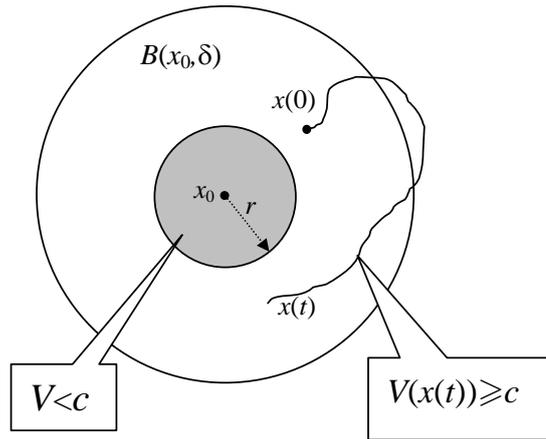


Figure 52: Beweis von Satz 4.3(c)

so dass die Funktion  $V(x(t))$  monoton wachsend ist und somit

$$V(x(t)) \geq V(x(0)) =: c > 0$$

für alle  $t \geq 0$ . Es existiert  $r > 0$  so dass  $V(x) < c$  für alle  $x \in B_r$ .

Daraus folgt, dass  $x(t) \notin B_r$  für alle  $t > 0$ . Bezeichnen

$$m := \inf_{z \in \overline{U} \setminus B_r} W(z) > 0,$$

und erhalten  $W(x(t)) \geq m$ , was zusammen mit (4.29) ergibt

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \geq m \text{ für alle } t > 0.$$

Es folgt nach Integration, dass  $V(x(t)) \geq mt \rightarrow +\infty$  für  $t \rightarrow +\infty$ , was im Widerspruch zur Beschränktheit von  $V$  auf  $\overline{U}$  ist. ■

**Beweis von Satz 4.2.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir  $x_0 = 0$ , so dass  $f(0) = 0$ . Nach der Differenzierbarkeit von  $f(x)$  in 0 haben wir

$$f(x) = Ax + h(x), \quad (4.30)$$

wobei  $A = f_x(0)$  und

$$h(x) = o(\|x\|) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Wir beweisen zunächst, dass unter der Voraussetzung  $f \in C^2(\Omega)$  gilt

$$h(x) = O(\|x\|^2) \text{ für } x \rightarrow 0,$$

d.h.

$$\|h(x)\| \leq C \|x\|^2 \quad (4.31)$$

<sup>19</sup>Da  $x(t)$  als eine Lösung bezüglich des Definitionsbereiches  $\mathbb{R} \times U$  der DGL definiert ist, ist der Punkt  $x(t)$  immer in  $U$  enthalten, sofern  $x(t)$  definiert ist.

mit einer Konstante  $C$ , vorausgesetzt  $\|x\|$  hinreichend klein ist. Nach Taylor-Formel erhalten wir für jedes  $k = 1, \dots, n$

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_k(0) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f_k(0) x_i x_j + o(\|x\|^2) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Die erste Term auf der rechten Seite ist die  $k$ -te Komponente von  $Ax$ , und der Rest ist die  $k$ -te Komponente von  $h(x)$ , also

$$h_k(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij} f_k(0) x_i x_j + o(\|x\|^2),$$

woraus folgt

$$|h_k(x)| \leq B \sum_{i,j=1}^n |x_i x_j| + o(\|x\|^2) = B \|x\|_1^2 + o(\|x\|^2),$$

wobei  $B = \max_{i,j,k} |\partial_{ij} f_k(0)|$ . Die Abschätzung von  $\|x\|_1$  durch  $\text{const} \|x\|$  ergibt (4.31).

Beweisen wir, dass die folgende Funktion

$$V(x) = \int_0^\infty \|e^{sA} x\|_2^2 ds \tag{4.32}$$

die Ljapunow-Funktion ist. Zunächst überprüfen wir, dass  $V(x) < \infty$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ , also das Integral in (4.32) konvergiert. Im Beweis von Satz 4.1 haben wir die folgende Ungleichung bewiesen:

$$\|e^{tA} x\| \leq C e^{\alpha t} (t^N + 1) \|x\| \tag{4.33}$$

(vgl. (4.23)), wobei  $C, N$  positive Konstanten sind und

$$\alpha = \max \{ \text{Re } \lambda : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \}.$$

Da nach der Voraussetzung gilt  $\alpha < 0$ , ergibt (4.33), dass die Funktion  $s \mapsto \|e^{sA} x\|$  exponentiell fallend für  $s \rightarrow +\infty$  ist, woraus die Konvergenz des Integrals (4.32) folgt.

Jetzt zeigen wir, dass  $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  (tatsächlich  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ). Stellen wir den Vektor  $x$  in der Standardbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{R}^n$  wie folgt dar:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Da

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = x \cdot x$$

und

$$e^{sA} x = \sum x_i e^{sA} v_i,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \|e^{sA} x\|_2^2 &= e^{sA} x \cdot e^{sA} x = \left( \sum_i x_i (e^{sA} v_i) \right) \cdot \left( \sum_j x_j (e^{sA} v_j) \right) \\ &= \sum_{i,j} x_i x_j (e^{sA} v_i \cdot e^{sA} v_j). \end{aligned}$$

Integration in  $s$  ergibt

$$V(x) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j,$$

wobei

$$b_{ij} = \int_0^\infty (e^{sA} v_i \cdot e^{sA} v_j) ds$$

Konstanten sind. Deshalb ist  $V(x)$  eine quadratische Funktion von  $x_1, \dots, x_n$ , woraus folgt, dass  $V$   $\infty$ -fach differenzierbar ist.

**Bemerkung.** Normalerweise benutzen wir eine beliebige Norm in  $\mathbb{R}^n$ . Im Gegensatz benutzen wir in der Definition (4.32) von  $V(x)$  ausdrücklich die 2-Norm, um die Differenzierbarkeit von  $V(x)$  zu sichern.

Die Funktion  $V(x)$  ist offensichtlich nicht-negativ und  $V(x) = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = 0$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\partial_{f(x)} V(x) \leq 0$ . Nach (4.30) haben wir

$$\partial_{f(x)} V(x) = \partial_{Ax} V(x) + \partial_{h(x)} V(x). \quad (4.34)$$

Das die Funktion  $y(t) = e^{tA}x$  nach Satz 2.21 die DGL  $y' = Ay$  löst, haben wir nach (4.26) für alle  $t \geq 0$

$$\partial_{Ay} V(y) = \frac{d}{dt} V(y(t)),$$

woraus folgt für  $t = 0$

$$\partial_{Ax} V(x) = \left. \frac{d}{dt} V(e^{tA}x) \right|_{t=0}. \quad (4.35)$$

Andererseits nach Definition (4.32) von  $V$  erhalten wir

$$V(e^{tA}x) = \int_0^\infty \|e^{sA}(e^{tA}x)\|_2^2 ds = \int_0^\infty \|e^{(s+t)A}x\|_2^2 ds = \int_t^\infty \|e^{\tau A}x\|_2^2 d\tau,$$

wo wir die Substitution  $\tau = s + t$  benutzt haben. Ableiten dieser Identität in  $t$  ergibt

$$\frac{d}{dt} V(e^{tA}x) = - \|e^{tA}x\|_2^2.$$

Nach dem Einsetzen in (4.35) erhalten wir

$$\partial_{Ax} V(x) = - \|x\|_2^2. \quad (4.36)$$

Die zweite Term (4.34) kann wie folgt abgeschätzt werden

$$\partial_{h(x)} V(x) = V_x(x) h(x) \leq \|V_x(x)\| \|h(x)\|_2, \quad (4.37)$$

wobei  $\|V_x(x)\|$  die Operatornorm des linearen Operator  $V_x(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (da  $V_x(x)$  eine  $1 \times n$  Matrix ist, sie kann auch mit einem Vektor in  $\mathbb{R}^n$  identifiziert werden). Es folgt aus (4.34), (4.36), (4.37) und (4.31), dass

$$\begin{aligned} \partial_{f(x)} V(x) &= \partial_{Ax} V(x) + \partial_{h(x)} V(x) \\ &\leq - \|x\|_2^2 + \|V_x(x)\| \|h(x)\|_2 \\ &\quad - \|x\|_2^2 + C \|V_x(x)\| \|x\|_2^2, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass  $\|x\|_2$  hinreichend klein ist.

Da die Funktion  $V(x)$  ein Minimum in 0 annimmt, erhalten wir  $V_x(0) = 0$ . Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\|V_x(x)\| \leq \varepsilon,$$

vorausgesetzt  $\|x\|$  hinreichend klein ist. Setzen wir  $\varepsilon = \frac{1}{2}C$  und erhalten die folgende Ungleichung

$$\partial_{f(x)}V(x) \leq -\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|_2^2 = -\frac{1}{2}\|x\|_2^2,$$

die in einer kleinen Umgebung  $U$  von 0 gilt. Nach Satz 4.3 mit  $W(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$  erhalten wir, dass die Ruhelage 0 asymptotisch stabil ist. ■