Уравнение Лейбензона на римановых многообразиях

Александр Григорьян
Университет Билефельда

Конференция И.Г.Петровского, Москва, МГУ, май 2025

1 Введение

Рассмотрим уравнение

$$\partial_t u = \Delta_p u^q \tag{1}$$

где $p, q > 0$, $u\,(x, t)$ неизвестная неотрицательная функция, а Δ_p – p-Лапласиан, то есть

$$\Delta_p v = \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\,\nabla v\right).$$

Уранение (1) было введено Леонидом Самуиловичем Лейбензоном в 1930-40е годы для описания движения турбулентной сжимаемой жидкости в пористой среде (имелось ввиду применение к движению нефти и газа в грунте).

При этом $u(x, t)$ обозначает объёмную долю жидкости в данной точке в данный момент времени (по физическому смыслу $0 \le u \le 1$). Параметр p характеризует турбулентность жидкости, а q – сжимаемость. Физический смысл имеют следующие значения параметров: $\frac{3}{2} \le p \le 2$ and $q \ge 1$. Значение $p = 2$ соответствует ламинарному течению (=отсутствие турбулетности). В этом случае (1) становится уравнением пористой среды $\partial_t u = \Delta u^q$, если $q > 1$, и классическим уравнением теплопроводности $\partial_t u = \Delta u$, если $q = 1$.

Мы будем предполагать, что $p > 1$ и $q > 0$.

Григорий Исаакович Баренблатт построил в 1952 году автомодельные решения уравнения (1) в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\boxed{q\,(p-1) > 1},$$

то есть $\delta := q(p-1) - 1 > 0$. В этом случае решение Баренблатта имеет вид

$$u\,(x,t) = \frac{1}{t^{n/\beta}} \left(C - \omega \left(\frac{|x|}{t^{1/\beta}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)_+^{\gamma}, \tag{2}$$

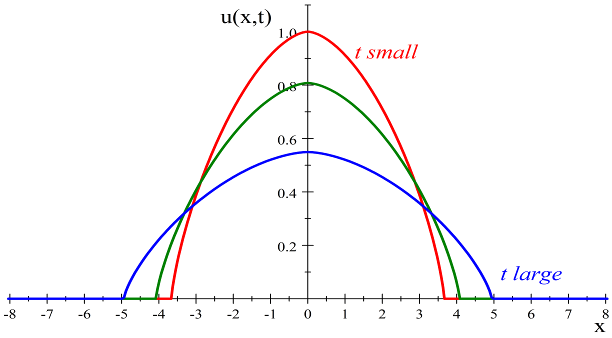
где

$$\beta = p + n\delta\ , \quad \gamma = \tfrac{p-1}{\delta}, \quad \omega = \tfrac{\delta}{pq}\beta^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3}$$

Отметим, что параметр β определяет масштабирование пространство/время и является аналогом понятия *размерность блуждания* для случайных процессов.

Очевидно, что решение $u(x,t)$ обращается в нуль при $|x| > ct^{1/\beta}$, так что $u(\cdot,t)$ имеет *компактный носитель* для всех $t > 0$. Тем самым u имеет *конечную скорость распространения*.

Вот графики функций $x \mapsto u(x,t)$ для различных значений t в случае $n = 1$.



Если $q\,(p-1) < 1$, то $\delta, \gamma, \omega < 0$, и решение Баренблатта

$$u\,(x,t) = \frac{1}{t^{n/\beta}} \left(C + |\omega| \left(\frac{|x|}{t^{1/\beta}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{-|\gamma|}$$

положительно при всех x, t.

В пограничном случае $q\,(p-1) = 1$ решение Баренблатта даётся другой формулой:

$$u\,(x,t) = \frac{1}{t^{n/p}} \exp \left(-c \left(\frac{|x|}{t^{1/p}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

где $c = (p-1)^2\, p^{-\frac{p}{p-1}}$, но также является положительным. Таким образом, решение Баренблатта имеет конечную скорость распространения тогда и только тогда, когда $q\,(p-1) > 1$.

2 Распространение решения внутри шара

Пусть M будет геодезически полным римановым многообразием размерности n. Рассмотрим уравнение Лейбензона на M:

$$\partial_t u = \Delta_p u^q, \tag{4}$$

где $u = u(x,t) \geq 0$, $x \in M$, $t > 0$, и оператор $\Delta_p v = \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\, \nabla v\right)$ определяется римановой метрикой. Предположим, что

$$\boxed{p > 1 \quad \text{и} \quad \delta := q(p-1) - 1 > 0}. \tag{5}$$

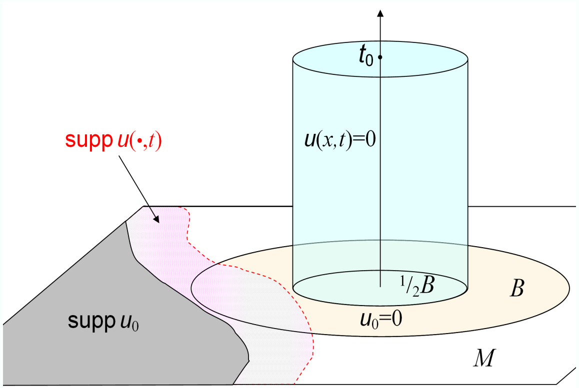
Теорема 1 *Пусть $u(x,t)$ является ограниченным решением (4) в $M \times \mathbb{R}_+$. Предположим, что $u_0 := u(\cdot, 0) = 0$ в шаре B радиуса R. Тогда*

$$u(\cdot, t) = 0 \ \textit{in} \ \tfrac{1}{2}B \quad \textit{для всех} \quad t \leq t_0,$$

где

$$\boxed{t_0 = \eta R^p \left\| u_0 \right\|_{L^\infty(M)}^{-\delta}},$$

а константа $\eta > 0$ определяется внутренней геометрией шара B.



Заметим, что область значений (5) параметров p, q такая же, как и для решений Баренблатта с конечной скоростью распространия.

Теорема 1 доказана в совместной работе [5] с Philipp Sürig в 2024. Случай $q = 1$ (и, тем самым, $p > 2$) был известен ранее: аналог теоремы 1 в этом случае был доказан S. Dekkers [3] в 2005. Теорема 1 является новой даже в случае $p = 2$. В этом случае условие (5) эквивалентно $q > 1$, а уравнение (4) становится уравнением *пористой среды* $\partial_t u = \Delta u^q$.

Замечание. Константа η в определении t_0 зависит от p, q, n, а также от *нормированной константы Соболева* c_B in B: для любой функции $u \in W_0^{1,p}(B)$

$$\left(\fint_B |\nabla u|^p \, d\mu \right)^{1/p} \geq \frac{c_B}{R} \left(\fint_B |u|^{p\kappa} \, d\mu \right)^{1/p\kappa}, \tag{6}$$

где μ – риманова мера, а κ – показатель Соболева, то есть $\kappa = \frac{n}{n-p}$ если $n > p$, и $\kappa > 1$ любое, если $n \leq p$.

Заметим, что $c_B > 0$ благодаря компактности шара, но точное значение c_B определяется внутренней геометрией шара. Известно, что $c_B \geq \mathrm{const} > 0$ на полных некомпактных многообразиях неотрицательной кривизны Риччи (в частности, в $\mathbb{R}^n$). В этом случае значение η можно считать независимым от шара B.

3 Скорость распространения носителя

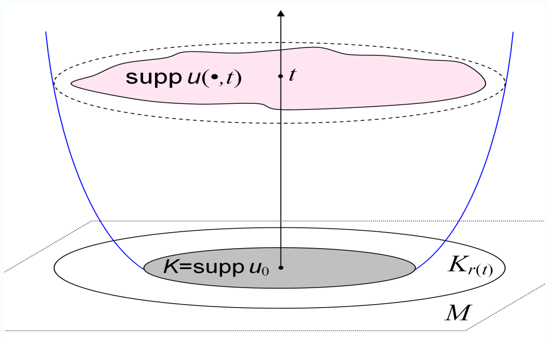
Пусть u будет ограниченным решением (4) с начальным условием $u(\cdot,0)=u_0$. Для любого множества $K\subset M$ и $r>0$ обозначим через K_r замкнутую r-окрестность K.

Следствие 2 *Пусть* $K:=\operatorname{supp} u_0$ *будет компактом. Тогда существует возрастающая функция* $r:(0,T)\to\mathbb{R}_+$, *где* $T\in(0,\infty]$, *такая, что*

$$\operatorname{supp} u\,(\cdot,t)\subset K_{r(t)}$$

для всех $t\in(0,T)$.

То есть, скорость распространения u ограничена функцией $r(t)$.



Неизвестно, можно ли всегда взять $T=\infty$. Было бы интересно либо доказать, что носитель $\operatorname{supp} u\,(\cdot,t)$ всегда компактный для всех $t>0$, либо построить контрпример, то есть, многообразие M и решение u такое, что $\operatorname{supp} u_0$ компактный, а $\operatorname{supp} u(\cdot,t)$ неограниченный при достаточно больших t.

Пусть известно, что константа c_B в (6) может быть взята одной и той же для всех шаров (например, это так, если M имеет неотрицательную кривизну Риччи). Тогда константа η из теоремы 1 одна и та же для всех шаров, откуда можно получить следующее утверждение.

Следствие 3 *Если $c_B \geq \mathrm{const} > 0$ для всех шаров, то для любого ограниченного решения u, имеющего начальную функцию u_0 с компактным носителем K, скорость распространения ограничена функцией $r(t) = Ct^{1/p}$ для всех $t > 0$, то есть*

$$\operatorname{supp} u(\cdot, t) \subset K_{Ct^{1/p}}.$$

Функция $r = Ct^{1/p}$ получается просто обращением формулы $t_0 = cR^p$ из теоремы 1. Отметим для сравнения, что в $\mathbb{R}^n$ скорость распространения решения Баренблатта даётся функцией $r(t) = Ct^{1/\beta}$, где

$$\beta = p + n\delta. \tag{7}$$

Отсюда следует, что для любого ограниченного решения с компактным начальным носителем скорость распространения ограничена функцией $r(t) = Ct^{1/\beta}$ для $t > 1$.

Так как $\beta > p$, то следствие 3 не даёт точной скорости распространения даже в $\mathbb{R}^n$. Чтобы улучшить функцию $r(t)$, нужно увеличить значение t_0 в теореме 1.

4 Точная скорость распространения

Вместо предыдущих условий (5) на p, q, мы наложим на p, q более ограничительные условия:

$$\boxed{p > 2 \quad \text{and} \quad \frac{1}{p-1} < q \leq 1}.$$

В частности, $\delta := q(p-1) - 1 > 0$. Следующая теорема доказана в [6], 2024.

Теорема 4 *Пусть u будет ограниченное решение уравнения (4) в $M \times \mathbb{R}_+$, где $u_0 := u(\cdot, 0) \in L^1$. Предположим, что $u_0 = 0$ в шаре $B \subset M$ радиуса R.*

Тогда

$$u(\cdot, t) = 0 \text{ в } \tfrac{1}{2}B \text{ для всех } t \leq t_0$$

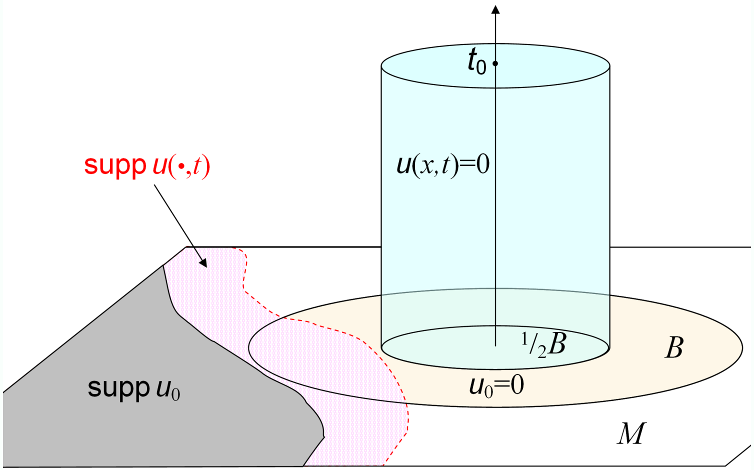
где

$$\boxed{t_0 = \eta R^p \mu(B)^{\delta/\sigma} \|u_0\|_{L^\sigma(M)}^{-\delta}}.$$

Здесь σ любое число, такое, что

$$\sigma \geq 1 \quad and \quad \sigma > \delta, \qquad (*)$$

и $\eta = \eta(p, q, n, \sigma, c_B) > 0$.



Следствие 5 *Пусть* $c_B \geq \mathrm{const} > 0$. *Предположим, что для некоторой точки* $x_0 \in \operatorname{supp} u_0$ *и некоторых* $\alpha, c, r_0 > 0$

$$\mu(B(x_0, r)) \geq cr^\alpha \quad \textit{for all } r \geq r_0. \tag{8}$$

Тогда скорость распространения и ограничена функцией $r(t) = Ct^{1/\beta}$ *(для* $t > 1$*), где*

$$\beta = p + \alpha\delta/\sigma, \tag{9}$$

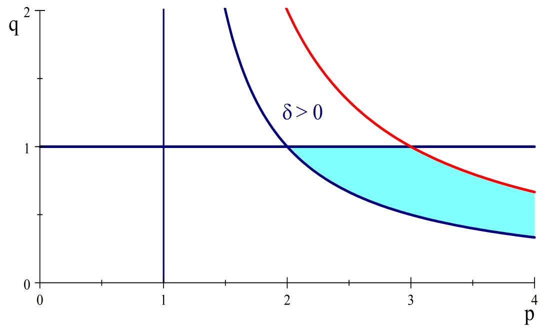
а σ *то же,что и в* $(*)$ *.*

В случае $M = \mathbb{R}^n$ имеем $\alpha = n$, и при $\sigma = 1$ получим $\beta = p + n\delta$, что совпадает со значением β в $\mathbb{R}^n$ (см. (7)). Однако, значение $\sigma = 1$ допустимо в $(*)$ только если $\delta < 1$, то есть, если $q(p-1) < 2$.

На этом рисунке показана область значений p и q:

$$p > 2 \quad \text{and} \quad 1 < q(p-1) < 2.$$

Для этих p, q мы получаем точную оценку скорости распространения в $\mathbb{R}^n$, а также в классе модельных многообразий с $c_B \geq \mathrm{const} > 0$ и с любым $\alpha \in (0, n]$.



Гипотеза. Утверждение теоремы 4 с $\sigma = 1$ справедливо всегда, когда $p > 1$, $\delta > 0$.

5 Неравенство о среднем

Основным ингредиентом доказательства теоремы 1 является следующее неравенство о среднем. Мы предполагаем здесь, что $p > 1$ and $\delta \geq 0$.

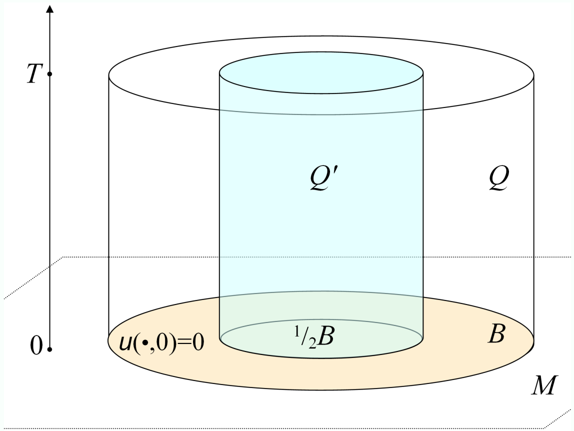
Лемма 6 *Зафиксируем шар $B = B(x_0, R)$ на M, и пусть $u(x,t)$ будет неотрицательное ограниченное субрешение (4) в цилиндре*

$$Q = B \times [0, T]$$

такое, что $u_0 \equiv u(\cdot, 0) = 0$ в B. Тогда в цилиндре

$$Q' = \tfrac{1}{2}B \times [0, T]$$

выполняется для любого $\lambda \geq \max(p, pq)$ следующее неравенство:

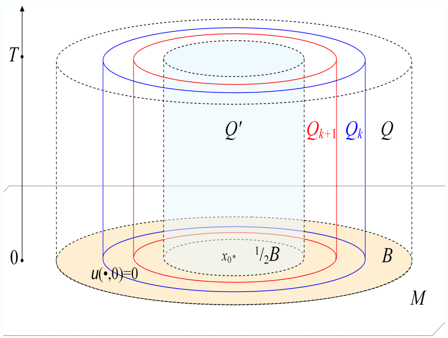


$$\|u\|_{L^\infty(Q')} \leq C \left(\frac{T}{R^p}\right)^{1/\lambda} \|u\|_{L^\infty(Q)}^{\delta/\lambda} \left(⨍_Q u^\lambda\right)^{1/\lambda}, \tag{10}$$

где $C = C(p, q, n, \lambda, c_B)$.

Для доказательства используется неравенство Соболева внутри шара B и техника Мозера. Для этого мы рассматриваем сжимающуюся последовательность цилиндров $\{Q_k\}_{k=0}^{\infty}$ интерполирующих между $Q_0 = Q$ и $Q_\infty = Q'$, и доказываем, что

$$(*) \qquad \int_{Q_{k+1}} u^{\sigma(1+\nu)} \leq C(\cdots) \left(\int_{Q_k} u^\sigma \right)^{1+\nu}$$



для $\sigma \gg 1$, где ν является показателем в неравенстве Соболева. В методе Мозера $(*)$ доказывается сначала для $\sigma = 2$, а затем это неравенство применяется к $u^{\sigma/2}$ с любым $\sigma > 2$ так как $u^{\sigma/2}$ является субрешением.

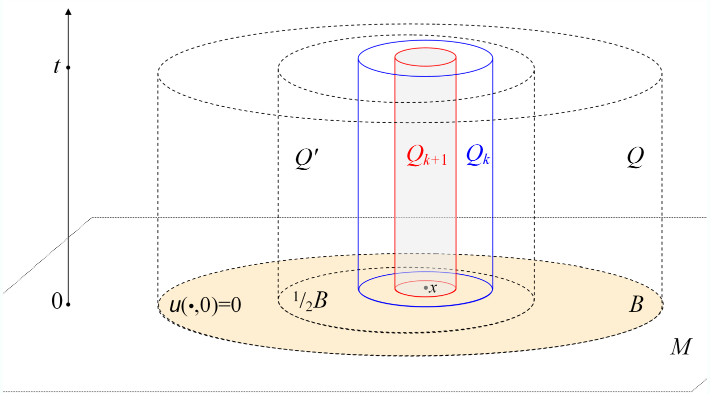
Полагая в $(*)$ $\sigma = \lambda (1+\nu)^k$ и итерируя при $k \to \infty$ приходим в конце концов к оценке $\|u\|_{L^\infty(Q')}$. В нашем случае этот метод не работает, так как $u^{\sigma/2}$ не является субрешением. Мы доказываем $(*)$ напрямую для любого σ и тщательно следим за тем, как константа C в $(*)$ зависит от σ. Оказывается, что $C \simeq \sigma^A$ для некоторого A. Неожиданно оказалось, что степенной рост C по отношению к σ всё ещё позволяет совершить итерации и получить (10).

Используя неравенство $\left(⨍_Q u^\lambda \right)^{1/\lambda} \leq \|u\|_{L^\infty(Q)}$, мы получаем из (10) следующее:

$$\|u\|_{L^\infty(Q')} \leq C \left(\tfrac{T}{R^p} \right)^{1/\lambda} \|u\|_{L^\infty(Q)}^{1+\delta/\lambda}. \qquad (11)$$

6 Конечная скорость распространения решения

Набросок доказательства теоремы 1. Зафиксируем точку $x \in \frac{1}{2}B$ и положим $r = \frac{1}{2}R$ так что $B(x,r) \subset B$.



Зафиксируем также $t > 0$ и положим

$$Q_k = B(x, 2^{-k}r) \times [0,t], \quad k = 0.1\ldots.$$

$$J_k = \|u\|_{L^\infty(Q_k)}.$$

Пусть λ будет как в лемме 6. Тогда (11) даёт

$$J_{k+1} \le C\left(\frac{t}{(2^{-k}R)^p}\right)^{1/\lambda} J_k^{1+\frac{\delta}{\lambda}} = C2^{k/\lambda}\left(\frac{t}{R^p}\right)^{1/\lambda} J_k^{1+\frac{\delta}{\lambda}}.$$

Итерируя это неравенство, мы получаем верхнюю оценку J_k через J_0 которая влечёт следующее: если

$$C\left(\frac{t}{R^p}\right)^{1/\lambda} \le 2^{-1/\delta} J_0^{-\delta/\lambda} \tag{12}$$

то для всех k

$$J_k \leq 2^{-k/\delta} J_0. \tag{13}$$

Условие (12) эквивлентно неравенству

$$t \leq \eta R^p J_0^{-\delta}. \tag{14}$$

Так как $J_0 = \|u\|_{L^\infty(Q)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(M)}$ и поэтому $t_0 = \eta R^p \|u_0\|_{L^\infty(M)}^{-\delta} \leq \eta R^p J_0^{-\delta}$, условие (14) выполняется для всех $t \leq t_0$. Для этих t мы получаем из (13), что для всех k

$$\|u\|_{L^\infty\left(B(x,2^{-k}r)\times[0,t]\right)} \leq 2^{-k/\delta} \|u_0\|_{L^\infty}.$$

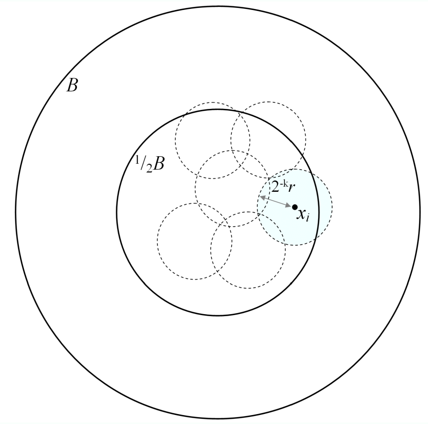
Для любого k покроем шар $\frac{1}{2}B$ конечным числом шаров $B(x_i, 2^{-k}r)$ где $x_i \in \frac{1}{2}B$. Так как для всех i

$$\|u\|_{L^\infty\left(B(x_i,2^{-k}r)\times[0,t]\right)} \leq 2^{-k/\delta} \|u_0\|_{L^\infty}$$

мы получаем, что

$$\|u\|_{L^\infty\left(\frac{1}{2}B\times[0,t]\right)} \leq 2^{-k/\delta} \|u_0\|_{L^\infty}.$$

При $k \to \infty$ получим, что $u = 0$ в $\frac{1}{2}B \times [0,t]$, что и требовалось доказать. ■



7 Неравенство о среднем 2

Основным ингредиентом доказательства теоремы 4 является следующий вариант неравенства о среднем. Мы полагаем здесь $p > 2$ и $\frac{1}{p-1} < q \leq 1$.

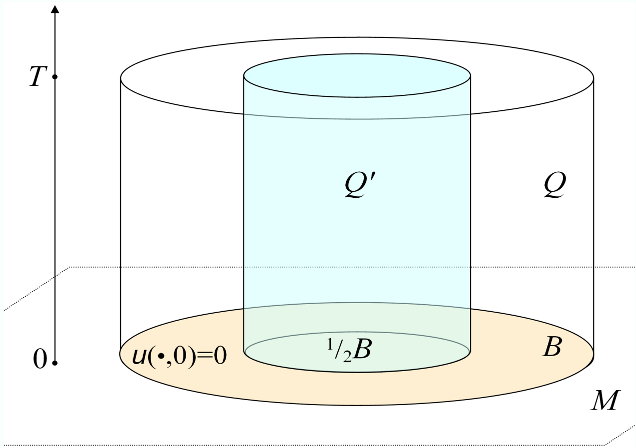
Лемма 7 *Зафиксируем предкомпактный шар $B = B(x_0, R)$ на M. Пусть u будет неотрицательным ограниченным решением (4) в цилиндре*

$$Q = B \times [0, T],$$

и пусть $u(\cdot, 0) = 0$ в шаре B. Тогда в цилиндре

$$Q' = \tfrac{1}{2}B \times [0, T],$$

выполняется следующее неравенство:



$$\|u\|_{L^\infty(Q')} \leq C \left(\tfrac{T}{R^p}\right)^{1/\lambda} \left(\fint_Q u^{\lambda+\delta}\right)^{1/\lambda}, \tag{15}$$

гзе $\lambda > 0$ любое, $\delta = q(p-1) - 1$ и $C = C(p, q, n, \lambda, c_B)$.

Для доказательства леммы 7 используется следующий факт.

Лемма 8 *Пусть u будет неотрицательным субрешением* (4)*.*

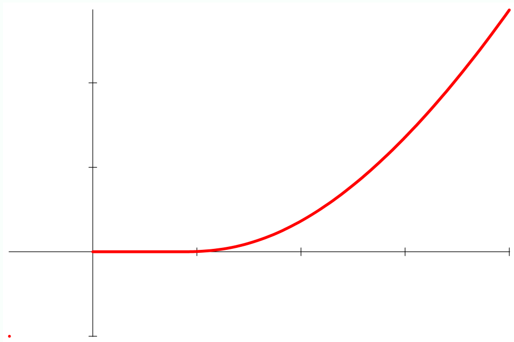
Положим

$$a = \frac{q(p-1)-1}{p-2}$$

Если $0 < a \leq 1$ *то функция*

$$v = (u^a - \theta)_+^{1/a}$$

является субрешением для $\forall\, \theta > 0$.



Функция $f_\theta(s)=(s^a-\theta)_+^{1/a}$

Условие $0 < a \leq 1$ выполняется, например если

$$p > 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{p-1} < q \leq 1$$

В случае p-Лапласиана, то есть когда $q = 1$, получим $a = 1$. Это хорошо известный факт, что в этом случае $v = (u-\theta)_+$ является субрешением. Если также $p = 2$ то есть (4) является линейным уравнением теплопроводности, то $v = f(u)$ является субрешением для любой выпуклой функции f.

Набросок доказательства леммы 7.

Зафиксируем $\theta > 0$ и построим индуктивно последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ функций:

$$u_0 = u, \qquad u_k = f_{2^{-k}\theta}(u_{k-1}) = \left(u_{k-1}^a - 2^{-k}\theta\right)_+^{1/a} \text{ for } \ k \geq 1$$

Используя тождество $f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2} = f_{\theta_1+\theta_2}$ мы получим $u_k = \left(u^a - \left(1 - 2^{-k}\right)\theta\right)_+^{1/a}$.

Рассмотрим убывающую последовательность

$$r_k = \left(\tfrac{1}{2} + 2^{-k-1}\right) R$$

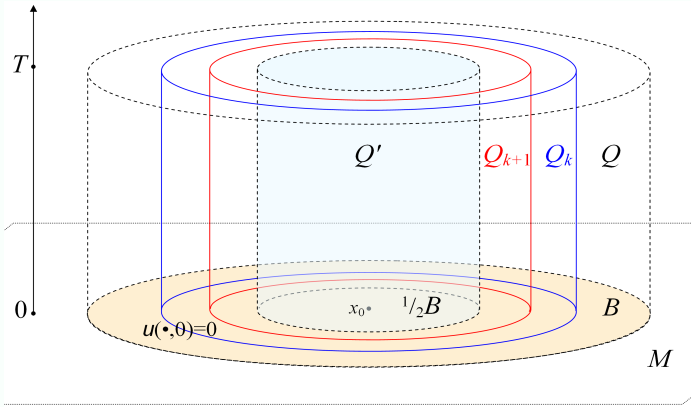
так что $r_0 = R \geq r_k \searrow \frac{1}{2}R$, и цилиндры

$$Q_k = B\left(x_0, r_k\right) \times [0, t]$$

так что

$$Q_0 = Q \supset Q_k \searrow Q'$$

при $k \to \infty$.



Положим $J_k = \int_{Q_k} u_k^{\lambda+\delta}$. Ясно,что $J_{k+1} \leq J_k$. Используя неравенство типа Качиопполи для u_k and u_{k+1}, а также определённое неравенство Фабера-Крана для Δ_p в B (что отражает внутреннюю геометрию B), мы доказываем, что

$$J_{k+1} \le \frac{CA^k}{\left(\mu(B)\theta^{\frac{\lambda}{a}} r^p\right)^\nu} J_k^{1+\nu},$$

где $\nu > 0$ показатель в неравенстве Фабера-Крана, а C, A некоторые константы.

Анализируя это соотношение, мы получаем, что если

$$\theta \ge \left(\frac{CJ_0}{\mu(B)r^p}\right)^{\frac{a}{\lambda}}, \tag{16}$$

то $J_k \to 0$ при $k \to \infty$, что влечёт

$$\int_{Q'} \left[(u^a - \theta)_+^{1/a}\right]^{\lambda+\delta} = 0,$$

то есть $u^a \le \theta$ in Q'. Выбирая минимальное значение θ в (16), получим

$$u \le \left(\frac{CJ_0}{\mu(B)r^p}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \left(\frac{C}{\mu(B)r^p}\int_Q u^{\lambda+\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{in } Q'$$

что доказывает (15).

Этот метод работает при $\lambda \ge 2$. Случай $0 < \lambda < 2$ получается из случая $\lambda = 2$ используя некоторую итерацию. ■

References

[1] **Barenblatt G.I.**, On self-similar motions of compressible fluids in a porous medium, (in Russian) *Prikl. Mat. Mekh.*, **16** (1952) 679–698.

[2] **Benedikt, J., Girg, P., Kotrla, L., Takáč, P.**, Origin of the p-Laplacian and A. Missbach, *Electronic Journal of Differential Equation*, **2018** (2018) no.16, 1-17.

[3] **Dekkers S.A.J.**, Finite propagation speed for solutions of the parabolic p-Laplace equation on manifolds, *Comm. Anal. Geom.*, **14** (2005) no.4, 741-768.

[4] **DiBenedetto E.**, "Degenerate parabolic equations", Universitext, Springer, 1993.

[5] **Grigor'yan A., Sürig Ph.**, Finite propagation speed for Leibenson's equation on Riemannian manifolds, *Comm. Anal. Geom.*, **32** (2024) no.9, 2467–2504.

[6] **Grigor'yan A., Sürig Ph.**, Sharp propagation rate for solutions of Leibenson's equation on Riemannian manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (2024)DOI 10.2422/2036-2145.202404_006

[7] **Leibenson L. S.**, Turbulent movement of gas in a porous medium, (in Russian) *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, **9** (1945) 3–6.

[8] **Leibenson L. S.**, General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium, (in Russian) *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, **9** (1945) 7–10.

[9] **Leibenson L. S.**, "Motion of natural liquids and gases in porous media", (in Russian) Gostekhizdat, Moscow, USSR, 1947.