Riemann- und Darboux-Integrierbarkeit

Sei f eine reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$.

Definition. Eine *Zerlegung* Z von $[a,b]$ ist eine endliche streng monoton steigende Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$ und $x_n = b$, d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Setzen wir

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, ..., n$$

und definieren die Feinheit von Z wie folgt:

$$\varphi(Z) = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}.$$

Definition. Gegeben sei eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$, definieren wir eine *Folge von Zwischenstellen* von Z als eine Folge $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ von reellen Zahlen mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Definition. Für jede Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$ mit den Zwischenstellen $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ definieren wir die *Riemann-Summe* wie folgt:

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Definition. Riemann-Summen $S(f, Z, \xi)$ haben einen Grenzwert $A \in \mathbb{R}$ für $\varphi(Z) \to 0$ wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall Z \ \text{ mit } \varphi(Z) < \delta \ \text{ und } \ \forall \xi \ \text{ gilt } \ |S(f, Z, \xi) - A| < \varepsilon.$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} S(f, Z, \xi) = A.$$

Definition. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar* wenn der Grenzwert

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} S(f, Z, \xi)$$

existiert. Der Wert des Grenzwertes heißt das Riemann-Integral (=bestimmtes Integral) von f und wird wie folgt bezeichnet:

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

d.h.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varphi(Z) \to 0} S(f, Z, \xi) = \lim_{\varphi(Z) \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Definition. Für jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ von $[a, b]$, definieren wir die *obere Darboux-Summe* von f und Z mit

$$S^* (f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f) \, \Delta x_k$$

und die *untere Darboux-Summe* mit

$$S_* (f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f) \, \Delta x_k.$$

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf $[a, b]$ heißt *Darboux-integrierbar* wenn

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} (S^* (f, Z) - S_* (f, Z)) = 0,$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; \forall Z \;\; \text{mit} \;\; \varphi(Z) < \delta \text{ gilt } |S^* (f, Z) - S_* (f, Z)| < \varepsilon.$$

Satz 1 *Sei f eine reellwertige Funktion auf $[a, b]$. Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:*

(a) *Funktion f ist Riemann-integrierbar.*

(b) *Funktion f ist Darboux-integrierbar.*

(c) *Die Grenzwerte $\lim_{\varphi(Z) \to 0} S_* (f, Z)$ und $\lim_{\varphi(Z) \to 0} S^* (f, Z)$ existieren (in $\mathbb{R}$) und sind gleich.*

Darüber hinaus gelten unter jeder von den Bedingungen $(a), (b), (c)$ die folgenden Identitäten:

$$\lim_{\varphi(Z) \to 0} S^* (f, Z) = \lim_{\varphi(Z) \to 0} S_* (f, Z) = \int_a^b f(x) \, dx = \sup_Z S_* (f, Z) = \inf_Z S^* (f, Z).$$

Definition. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar* auf $[a, b]$ wenn f eine ($\Leftrightarrow$jede) von den Bedingungen $(a), (b), (c)$ erfüllt.

Korollar 2 (Notwendige Bedingung für Integrierbarkeit) *Ist eine Funktion f auf $[a, b]$ integrierbar, so ist f auf $[a, b]$ beschränkt.*

Satz 3 (Hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)
(a) *Jede stetige Funktion f auf $[a, b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.*
(b) *Jede monotone Funktion f auf $[a, b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.*