Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Reparametrisiere die folgenden Raumkurven

(i) $f(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t), \quad t \in \mathbb{R}$

(ii) $f(t) = (\cosh t,\ \sinh t,\ t), \quad t \in \mathbb{R}$

durch Bogenlänge.

Aufgabe 2.

(i) Sei $f(t) = \big(x(t),\ y(t)\big)$ *eine ebene reguläre Kurve, die nicht notwendigerweise durch Bogenlänge parametrisiert ist. Zeige, dass die Krümmung* $\varkappa(t) = \varkappa\big(s(t)\big)$ *von* f *sich mittels der Formel*

$$\varkappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{\big((x')^2 + (y')^2\big)^{3/2}}$$

darstellen lässt.

(ii) Berechne die Krümmungen der Ellipse $(a \cos t,\ b \sin t)$*, der Parabel* (t, t^2) *und der Hyperbel* $(t, \frac{1}{t})$*. An welchen Stellen sind die Krümmungen betragsmäßig maximal?*

Aufgabe 3.
Seien p *und* q *beliebige Punkte aus* $\mathbb{R}^n$*. Zeige, dass die Kurve* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *kürzester Länge von* p *nach* q *(d.h.* $f(a) = p,\ f(b) = q$*) das Geradenstück ist, das diese beiden Punkte verbindet.*

Aufgabe 4.
Sei $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ *eine reguläre ebene Kurve mit Einheitsgeschwindigkeit. Wenn* $\varkappa_0 = \varkappa(s_0) \neq 0,\ s_0 \in I$*, dann ist der* Schmiegkreis an f im Punkt $f(s_0)$ der Kreis mit dem Radius $\frac{1}{|\varkappa_0|}$ und dem Mittelpunkt $f(s_0) + \frac{1}{\varkappa_0} N(s_0)$, wobei $N(s)$ der Normaleneinheitsvektor ist. Zeige:

(i) Der Schmiegkreis approximiert die Kurve f an der Stelle $f(s_0)$ bis zur zweiten Ordnung, d.h. in der kanonischen Parametrisierung $g = g(s)$, $g(s_0) = f(s_0)$ des Schmiegekreises und verträgliche Orientierung (die Tangenteneinheitsvektoren stimmen an der Stelle $f(s_0)$ miteinander überein) gilt

$$f(s) = g(s) + O\big((s - s_0)^3\big) \quad \text{wenn} \quad \mathrm{s} \to \mathrm{s}_0.$$

(ii) Der Schmiegkreis ist durch die Eigenschaft (i) eindeutig bestimmt.