Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08

Dr. A. Haydys

10. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)$$

eine Einbettung ist.

Aufgabe 2.

Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit reellwertigen Einträgen. Das Vektorfeld $v_A \in \mathfrak{X}(M_n(\mathbb{R}))$ ist wie folgt definiert:

$$v_A(B) = A \cdot B \in T_B M_n(\mathbb{R}).$$

Sei ferner $\gamma_A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ die Integralkurve von v_A durch die Identitätsmatrix (d.h. $\gamma_A(0) = E$). Zeige:

- (i) Die Integralkurve γ_A ist durch $t \mapsto \exp(tA)$ gegeben;
- (ii) $A \in \mathfrak{sl}(n; \mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma_A(t) \in SL(n)$;
- (iii) $A \in \mathfrak{o}(n; \mathbb{R}) \implies \forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma_A(t) \in SO(n) \subset O(n)$.

Aufgabe 3.

Sei N^k eine eingebettete Teilmannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M^n . Zeige: Für jeden Punkt $p \in N$ existiert eine Karte (U, h) um p , so dass $N \cap U$ durch die Gleichungen

$$h_{l+1} = 0, \dots, h_n = 0$$

gegeben ist, wobei $h = (h_1, \dots, h_n)$, $h_i \in C^\infty(M)$. Gilt diese Aussage für nicht-eingebettete Teilmannigfaltigkeiten?

Aufgabe 4.

Mit Hilfe des Satzes von Sard zeige, dass die Sphäre S^k für $k \geq 2$ einfach zusammenhängend ist.