Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

11. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(i) *Zeige:* $GL_n(\mathbb{C})$ *kann als Lie-Untergruppe in* $GL_{2n}(\mathbb{R})$ *aufgefasst werden, d.h. es existiert ein Homomorphismus* $\psi\colon GL_n(\mathbb{C}) \to GL_{2n}(\mathbb{R})$, *der auch eine Einbettung ist. (Hinweis: Schreibe komplexe Zahlen als reelle* 2×2-*Matrizen).*

(ii) *Es gilt:* $O(2n) \cap GL_n(\mathbb{C}) = U(n)$ *(mit der Identifizierung aus (i)).*

Aufgabe 2. *(Die Heisenberggruppe)*
Den $\mathbb{R}^3$ *zusammen mit der Verknüpfung*

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2 + x_1 y_2)$$

nennt man die Heisenberggruppe H.

(i) *Zeige:* H *ist isomorph zu*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (x, y, z) \in \mathbb{R} \right\} \subset SL_3(\mathbb{R}).$$

Beschreibe die zugehörige Lie-Algebrastruktur auf $Lie(H) \cong \mathbb{R}^3$.

(ii) *Finde die Exponentialabbildung* $\exp\colon \mathbb{R}^3 \to H$.

Aufgabe 3.
Sei G *eine Lie-Gruppe. Zeige: Für jedes* $\xi \in \mathfrak{g} = Lie(G)$ *die Formel*

$$v_\xi(g) = (L_g)_*\big|_e\, \xi$$

definiert ein glattes linksinvariantes Vektorfeld auf G.

Aufgabe 4.
Seien β *und* γ *glatte Kurven in einer Lie-Gruppe* G, *so dass gilt:* $\beta(0) = e = \gamma(0)$.
Zeige: Für die Kurve $\alpha\colon \mathbb{R} \to G,\ \alpha(t) = \beta(t) \cdot \gamma(t)$ *gilt:*

$$\alpha'(0) = \beta'(0) + \gamma'(0).$$